UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS GRADUAÇÃO
DEPARTAMENTO DE APÓIO À PESQUISA
PROGRAMA INSTITUCIONAL DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA

RIGOR CIENTÍFICO EM LÓGICA MATEMÁTICA E ÁLGEBRA
GRUPOS FUNDAMENTAIS DE SUPERFÍCIES COMPACTAS

Bolsista: André Carneiro da Rocha, CNPq

Manaus
2009

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS GRADUAÇÃO
DEPARTAMENTO DE APÓIO À PESQUISA
PROGRAMA INSTITUCIONAL DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA

RELATÓRIO FINAL
PIB - E/0094/2008
RIGOR CIENTÍFICO EM LÓGICA MATEMÁTICA E ÁLGEBRA
GRUPOS FUNDAMENTAIS DE SUPERFÍCIES COMPACTAS

Bolsista: André Carneiro da Rocha

Orientador: Prof. Dr. Renato de Azevedo Tribuzy

Manaus
2009

Sumário

1 Introdução **5**

2 Objetivos **6**

2.1 Objetivo Geral: 6

2.2 Objetivos Específicos: 6

3 Metodologia **7**

4 Preliminares **8**

4.1 Lógica Proposicional 8

4.1.1 Proposição 8

4.1.2 Conectivos Lógicos 8

4.1.3 Tautologia 10

4.1.4 Argumento 10

4.1.5 Justificativa lógica da demonstração por redução a um absurdo 10

4.2 Conjuntos, Funções, Famílias: Reunião, Interseção e Produto Cartesiano, Equivalência 12

4.2.1 Conjuntos 12

4.2.2 Funções 14

4.2.3 Famílias: Reunião, Interseção e Produto Cartesiano 15

4.2.4 Equivalência 16

4.3 Grupos 18

4.4 Espaços Topológicos 24

4.5 O Grupo Fundamental 27

4.6 Teorema de Seifert e Van Kampen 33

5 Resultados **34**

6 Cronograma **35**

7 Conclusão **36**

8 Bibliografia **37**

1 Introdução

Informações matemáticas devem ser expressas com a linguagem e com os cuidados específicos, muitas vezes, diferentes daqueles que estamos acostumados a usar e a interpretar na linguagem coloquial. A Lógica-matemática nos fornece elementos teóricos para que possamos aprender essa linguagem e esses cuidados específicos. A Álgebra tem amplas ligações e aplicações em diversas áreas da Matemática, ela estuda as estruturas algébricas como grupos, anéis e corpos. Grupos são usados na Matemática e nas ciências em geral para capturar a simetria interna de uma estrutura na forma de automorfismos de grupo. Na Topologia Algebrica, grupos são usados para descrever os invariantes de espaços topológicos são chamados invariantes porque não mudam se o espaço é submetido a uma transformação, como por exemplo o grupo fundamental. No relatório encontram-se os estudos realizados em Lógica Matemática, Álgebra, onde serão abordados os seguintes tópicos: Lógica Proposicional, Conjuntos, Funções, Famílias, Equivalência, Grupos. E também encontram-se estudos em Topologia, Grupo fundamental de um espaço topológico que é um invariante importantíssimo no estudo de espaços topológicos, Teorema de Van Kampen que é usado para calcular o grupo fundamental de algumas superfícies compactas como o toro e plano projetivo, nos resultados determina-se o grupo fundamental do toro, plano projetivo e da esfera. O cronograma das atividades desenvolvidas e referências bibliográficas que foram utilizadas também estão no relatório.

2 Objetivos

2.1 Objetivo Geral:

O projeto de Iniciação Científica em Matemática tem como objetivos despertar a vocação científica, proporcionar ao acadêmico a aprendizagem de técnicas e métodos científicos, bem como estimular o desenvolvimento do pensar cientificamente e da criatividade decorrentes das condições criadas pelo confronto direto com os problemas de pesquisa.

2.2 Objetivos Específicos:

Os objetivos específicos do projeto são:

- propiciar subsídios téoricos da Lógica-matemática e da Álgebra para que o acadêmico possa usá-los como ferramenta de trabalho, por exemplo, evitar ou reconhecer mais rapidamente erros usuais cometidos em demonstrações matemáticas, outro exemplo é aplicar a teoria de Grupo no estudo de Grupo Fundamental.
- aprender a utilizar o conceito de Grupos Fundandamentais de Superfícies Compactas.

3 Metodologia

Este projeto enfatiza duas disciplinas da matemática oferecidas especificamente para bolsistas do PIBIC que são Lógica Matemática e Álgebra, sendo que na primeira etapa do projeto foi estudada a disciplina Lógica Matemática. Iniciou-se com estudos de Lógica Proposicional (Proposição, Conectivos Lógicos, Tabela-verdade, Tautologias, Argumentos, Inferências), já na segunda foi estudada a disciplina Álgebra com ênfase em Grupos. Paralelamente foi estudado o LaTeX 2_ε para obtenção de conhecimentos básicos para digitar os textos matemáticos e também foram estudados outros tópicos com objetivo de entender a noção de Grupo Fundamental e calcular o grupo fundamental das superfícies compactas. Foi usada a seguinte metodologia:

1. Execução de leituras de textos da bibliografia.
2. Resolução de exercícios para fixação dos conceitos.
3. Aulas oferecidas pela coordenação do projeto.
4. Estudos em grupo.
5. Apresentação de seminários.

4 Preliminares

4.1 Lógica Proposicional

4.1.1 Proposição

Definição 4.1.1 *Proposição é uma sentença declarativa que é verdadeira ou falsa, mas não ambas. Dada uma proposição, ela pode assumir um dos valores: ela é verdadeira(V) ou ela é falsa(F).*

Satisfazendo assim os seguintes princípios:

- **Princípio do Terceiro Excluído:** uma sentença é falsa ou verdadeira, não havendo terceira alternativa;
- **Princípio da Não-contradição:** uma sentença não pode ser falsa e verdadeira ao mesmo tempo.

4.1.2 Conectivos Lógicos

Proposições podem ser combinadas de forma coerente através de conectivos lógicos, formando sentenças mais ricas e essas proposições formadas por outras com o auxílio de conectivos lógicos, são chamadas de proposições compostas. Quando um operador ou conectivo lógico é usado para construir uma nova proposição, seu valor-verdade depende da natureza dos operadores lógicos usados e do valor-verdade das proposições originalmente dadas.

Definição 4.1.2 *Tabela-verdade é um dispositivo prático para encontrar e exibir os valores lógicos das proposições compostas.*

Conectivo ou operador negação ($\neg$)

Quando P representa uma proposição qualquer, o valor de $\neg P$ assume valor diferente de P. Este fato pode ser representado através da seguinte tabela-verdade:

P	$\neg P$
V	F
F	V

Operador conjunção ($\wedge$)

Para o caso geral, dadas duas proposições P e Q, $P \wedge Q$ será verdadeiro desde que ambas as componentes P e Q sejam verdadeiras. O valor verdade de $P \wedge Q$ segue a tabela:

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Operador disjunção ($\vee$)

Para $P \vee Q$ ser verdadeira basta que tenhamos pelo menos uma das componentes válida. Segue a tabela-verdade:

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Operador condicional ($\rightarrow$)

Notação: $P \rightarrow Q$ (P: antecedente ou hipótese, Q: conseqüente ou conclusão)

A única possibilidade de $P \rightarrow Q$ ser falso é quando P é verdadeiro e Q é falso.

Quando P e Q assumirem proposições arbitrárias, $P \rightarrow Q$ será regida pela seguinte tabela:

P	Q	$P \rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Operador bicondicional ($\leftrightarrow$)

$P \leftrightarrow Q$ vale quando P e Q possuem o mesmo valor.

É definido pela composição de operações: $(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow Q)$. Assim sua tabela fica:

P	Q	$P \to Q$	$Q \to P$	$P \leftrightarrow Q$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

4.1.3 Tautologia

Definição 4.1.3 *Tautologia é uma proposição que assume sempre o valor verdade (V), independente dos valores verdade das proposições que as compõe.*

Definição 4.1.4 *Duas proposições P e Q são equivalentes (equivalência lógica: notação: $P \equiv Q$) se ambas possuem a mesma tabela verdade. Ou ainda, $P \equiv Q$ se e somente se $P \leftrightarrow Q$ for uma tautologia. Neste caso, dizemos P e Q formam uma identidade lógica.*

4.1.4 Argumento

Definição 4.1.5 *Dado um número finito de proposições $P_1, ..., P_n, Q$ chamamos argumento a qualquer afirmação de que as sentenças $P_1, ..., P_n$ acarretam, ou têm como conseqüência a sentença Q. Quando isto ocorre, também diz-se que "a sentença Q se deduz (ou se infere) das sentenças $P_1, ..., P_n$ ". As sentenças $P_1, ..., P_n$ são chamadas premissas, e a sentença Q chama-se conclusão.*

4.1.5 Justificativa lógica da demonstração por redução a um absurdo

Consideremos as seguintes equivalências:

$\mathbf{E}_1$. $P \wedge V \equiv P$

$\mathbf{E}_2$. $Q \wedge \neg Q \equiv F$

$\mathbf{E}_3$. $\neg F \equiv V$

$\mathbf{E}_4$. $P \to Q \equiv \neg(P \wedge \neg Q) \equiv \neg P \vee F$

Considere uma sentença Q. A equivalência a seguir é válida.

$$\boxed{(H \to T) \Leftrightarrow [(H \wedge \neg T) \to (\neg Q \wedge Q)]}$$

Demonstração:

$$\begin{gathered}((\mathrm{H} \to T) \to (\neg Q \wedge Q) \overbrace{\Leftrightarrow}^{E_2} ((H \to T) \to F) \\ \overbrace{\Leftrightarrow}^{E_4} \neg((H \wedge \neg T) \wedge \neg F) \\ \overbrace{\Leftrightarrow}^{E_3} \neg((H \wedge \neg T) \wedge V) \\ \overbrace{\Leftrightarrow}^{E_1} \neg(H \wedge \neg T) \overbrace{\Leftrightarrow}^{E_4} (H \to T)\end{gathered}$$

C.Q.D.

Nessa equivalência está a justificativa que queremos. Basta interpretá-la:

Para provarmos a validade da sentença $H \to T$, suponhamos que a hipótese H ocorra, mas que a tese T não ocorra, isto é, que $H \wedge \neg T$ ocorra, o que é o mesmo de admitir que essa sentença seja vrsdadeira. Partindo-se da ocorrência de $H \wedge \neg T$, devemos deduzir uma sentença contraditória da forma $\neg Q \wedge Q$, que é falsa. Ora, mas não podemos deduzir uma sentença falsa, partindo-se de uma verdadeira. Logo nossa suposição inicial, $H \wedge \neg T$, não pode ocorrer e como $(H \wedge \neg T) \equiv \neg(H \to T)$, então $(H \wedge \neg T)$ também não pode ocorrer. Portanto, $H \to T$ deve ocorrer.

C.Q.J.

4.2 Conjuntos, Funções, Famílias: Reunião, Interseção e Produto Cartesiano, Equivalência

4.2.1 Conjuntos

Os termos *conjunto* e *elemento* e a relação de um elemento pertencer a um conjunto são conceitos que não procuraremos definir. A afirmação de que o elemento a pertence ao conjunto A é simbolizada por

$$a \in A,$$

enquanto que a sua negação é simbolizada por

$$a \notin A.$$

A condição de que todo elemento de um conjunto A pertence a um conjunto B estabelece uma relação entre A e B chamada de relação de *inclusão* que é representada por

$$A \subset B \text{ ou } B \subset A,$$

que se lê A está *contido* em B ou A é *subconjunto* de B, ou ainda B *contém* A. A relação de inclusão possui claramente as seguintes propriedades

1. $A \subset A$, para todo A
2. $A = B$ se e somente se $A \subset B$ e $B \subset A$
3. Se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$.

A negação de $A \subset B$ é simbolizada por $A \not\subset B$.

O conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto, isto é, $\emptyset \subset A$ qualquer que seja o conjunto A. De fato, suponhamos que $\emptyset \not\subset A$ significa que existe $x \in \emptyset$ tal que $x \notin A$ e isto é claramente um absurdo visto que o cunjunto $\emptyset$ não possui nenhum elemento.

Operações com Conjuntos

União de Conjuntos

Dados dois conjuntos A e B, a união é portanto o conjunto de todos os elementos que pertencem a A ou pertencem a B, que será denotado por $A \cup B$.

Propriedades: Para todos os conjuntos A, B e C temos que

1. $A \cup \emptyset = A$ e $A \cup A = A$
2. $A \subset A \cup B$ e $B \subset A \cup B$
3. $A \cup B = B \cup A$
4. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

Interseção de Conjuntos

Dados dois conjuntos A e B, a *interseção* de A e B é o conjunto

$$A \cap B = \{x;\ x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

Quando $A \cap B = \emptyset$, dizemos que os conjuntos A e B são *disjuntos*.

Propriedades: Para todos os conjuntos A, B e C temos que

1. $A \cap \emptyset = \emptyset$ e $A \cap A = A$
2. $A \cap B \subset A$ e $A \cap B \subset B$
3. $A \cap B = B \cap A$
4. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Diferença de Conjuntos

Dados dois conjuntos A e B, a *diferença* A menos B é conjunto

$$A - B = \{x;\ x \in A \text{ e } x \notin B\}.$$

Quando $B \subset A$, a diferença $A - B$ é denotada por $C_A(B)$ e é chamada de *complementar* de B em A.

As seguintes propriedades decorrem imediatamente das definições.

Propriedades: Para todos os conjuntos A, B, temos que

1. $A - \emptyset = A$ e $A - A = \emptyset$
2. Se $A \cap B = \emptyset$, então $A - B = A$ e $B - A = B$
3. $C_A(\emptyset) = A$ e $C_A(A) = \emptyset$.

Conjuntos das Partes e Produto Cartesiano

Dado um cinjunto A qualquer admitiremos a existência de um conjunto $P(A)$ cujos elementos são todos os subconjuntos de A.

Um *par ordenado* (a, b) de elementos de A é um elemento de $P(P(A))$ da forma

$$\{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

Dados dois conjuntos A e B, o produto cartesiano de A e B é o conjunto $A \times B$ de todos os pares ordenados (a, b) de elementos de $A \cup B$ tais que $a \in A$ e $b \in B$. Simbolicamente escrevemos

$$A \times B = \{(a, b);\ a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

Note que em geral temos que $A \times B \neq B \times A$. Temos também que $A \times B = \emptyset$ se e somente se $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$.

4.2.2 Funções

Definição 4.2.1 *Sejam A e B dois conjuntos. Uma aplicação ou função f de A em B, denotada por $f : A \longrightarrow B$ é uma relação em $A \times B$ tal que para todo $a \in A$, existe um único $b \in B$ tal que $f(a) = b$.*

Os conjuntos A e B são camados, respectivamente, domínio e contradomínio. A imagem da função $f : A \longrightarrow B$ é definida por:

$$f(A) = \{f(a);\ a \in A\}$$

Duas aplicações f e g são iguais se, e somente se, seus domínios e contradomínios são iguais e para todo elemento a de seus domínios tem-se $f(a) = g(a)$.

Definição 4.2.2 *Uma função $f : A \longrightarrow B$ é injetora (ou biunívoca) se $f(a) = f(b)$ implicar $a = b$. Ou equivalente, se $a \neq b$ implicar que $f(a) \neq f(b)$.*

*A função f é sobrejetora (ou uma função $f : A \longrightarrow B$ diz-se **sobre** B) se para cada $b \in B$ existe um $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Isto é, $f(A) = B$.*

Uma função que é injetora e sobrejetora é denominada bijetora (ou correspondência biunívoca entre A e B).

Dada uma aplicação $f : A \longrightarrow B$, consideremos um subconjunto $Z \subset B$. A *imagem inversa* de Z por f é o conjunto $f^{-1}(Z)$ dos elementos de A que se aplicam por f em elementos de Z. Isto é:

$$f^{-1}(Z) = \{a \in A;\ f(a) \in Z\}.$$

Sejam as aplicações $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow C$.
A *aplicação composta* $g \circ f : A \longrightarrow C$ consite em aplicar primeiro f e depois g. Ou seja, para todo $a \in A$, pomos $(g \circ f)(a) = g(f(a))$.

Seja X um subconjunto de A. A aplicação $i : X \longrightarrow A$, definida por $i(a) = a$ para todo $a \in A$, chama-se a *aplicação de inclusão de X em A*. Em particular, quando $X = A$, a aplicação de inclusão de A em A, chama-se a *aplicação identidade* de A e indica-se com $id._A : A \longrightarrow A$. Por questão de simplicidade, escrevemos apenas $id. : A \longrightarrow A$.

Dados uma aplicação $f : A \longrightarrow B$ e um subconjunto $X \subset A$, a *restrição de f ao subconjunto X* é aplicação $f \mid X : X \longrightarrow B$ definida por $(f \mid X)(x) = f(x)$ para todo $x \in X$. Tem-se $f \mid X = f \circ i$, onde $i : X \longrightarrow A$ é a inclusão de x em A. Por outro lado, dada uma aplicação $g : X \longrightarrow B$, toda aplicação $f : A \longrightarrow B$ tal que $g = f \mid X$ chama-se *extensão de g ao conjunto A*.

Dados uma aplicação $f : A \longrightarrow B$, chama-se *inversa à direita* de f uma aplicação $g : B \longrightarrow A$ (se existir) tal que $f \circ g = id._B$, isto é, $f(g(z)) = z$ para todo $z \in B$. Para que exista inversa à direita de f é necessário e suficiente que f seja sobre B. Analogamente, diz-se que $h : B \longrightarrow A$ é uma *inversa à esquerda* de f quando $h \circ f = id._A$, isto é, $h(f(x)) = x$ para todo $x \in A$. Afim de que possua uma inversa à esquerda é necessário e suficiente que f seja injetora. Finalmente, diz-se que uma aplicação $f^{-1} : B \longrightarrow A$ é uma *inversa* de f quando $f \circ f^{-1} = id._B$ e $f^{-1} \circ f = id._A$, isto é, quando f^{-1} é, ao mesmo tempo, uma inversa à direita e à esquerda de f. Logo, f possui uma inversa se, e somente se, for bijetora. Nestas condições, a inversa não somente existe, mas é unica. Se $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow C$ são aplicações bijetoras, então $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} : C \longrightarrow A$.

4.2.3 Famílias: Reunião, Interseção e Produto Cartesiano

Seja L um conjunto, cujos elementos chamaremos *índices* e representaremos de forma genérica por λ. Dado um conjunto arbitrário X, uma *família* de elementos de X com índices em L é uma aplicação $x : L \longrightarrow X$. Uma tal família será denotada por $(x_\lambda)_{\lambda \in L}$ ou simplesmente (x_λ), quando não houver dúvidas sobre o conjunto de índices L.

Seja $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma família de conjuntos A_λ com índices em L. A *reunião* dessa família é o conjunto dos elementos que pertencem apelo menos um dos A_λ. Escreve-se:

$$\bigcup_{\lambda \in L} \mathrm{A}_\lambda = \{x;\ \text{existe } \lambda \in L \text{ com } x \in A_\lambda\}.$$

Ou seja, $\cup A_\lambda$ é oconjunto dos x tais que x pertence a algum A_λ.

Analogamente, a *interseção* da família $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ é oconjunto dos elementos que pertencem simultaneamente a todos os conjuntos da família.

Põe-se

$$\bigcap_{\lambda\in L} \mathrm{A}_\lambda = \{x;\ x \in A_\lambda \text{ para todo } \lambda \in L\}.$$

Dadas duas famílias de conjuntos $(A_\lambda)_{\lambda\in L}$ e $(B_\mu)_{\mu\in M}$, obtém-se as famílias com índices em $L \times M$:

$$(A_\lambda \cap B_\lambda)_{(\lambda,\mu)\in L\times M} \quad \text{e} \quad (A_\lambda \cup B_\lambda)_{(\lambda,\mu)\in L\times M}.$$

A noção de família permite generalizar o conceito de produto cartesiano. Consideraremos o caso finito.

Dados os conjuntos A_1, A_2, ..., A_n, seu produto é conjunto $A = A_1 \times ... \times A_n = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{A}_i$, formado por todas as n-uplas $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ tais que $a(i) = a_i \in A_i$ para todo $i = 1, 2, ..., n$. Isto estende o produto cartesiano $A \times B$ visto acima. Quando $A_1 = ... = A_n = A$, o produto cartesiano cartesiano $A \times A \times ... \times A$ de n cópias de A é indicado por A^n.

4.2.4 Equivalência

Definição 4.2.3 *Uma relação binária num conjunto A é um subconjunto $R \subset A \times A$ do produto cartesiano de A por si mesmo. Se $(a, b) \in R$, escreve-se aRb e diz-se que a mantém a relação R com b.*

Definição 4.2.4 *Uma relação de equivalência num conjunto A é uma relação binária R com as seguintes propriedades:*

Reflexividade: aRa para todo $a \in A$;
Simetria: se aRb, então bRa;
Transitividade: se aRb e bRc, então aRc.

Seja R uma relação de equivalência num conjunto A. Para cada elemento $x \in A$ indiquemos com C_x o conjunto de todos os elementos $y \in A$ que são equivalentes a x segundo a relação R:

$$C_x = \{y \in A;\ yRx\}.$$

O conjunto C_x chama-se a classe de equivalência de x segundo a relação R.

A família $(C_x)_{x\in A}$ goza das seguintes propriedades:

1. $A = \bigcup_{x \in A} C_x$;

2. dados x, $y \in$ A, *ou* $\mathrm{C}_x = C_y$ ou $C_x \cap C_y = \emptyset$.

A toda coleção de subconjuntos de A com as duas propriedades acima, chamaremos de *partição* de A. Dada uma relação de equivalência R num conjunto A, as classes de equivalência segundo R formam uma partição de A. Dois elementos x, $y \in A$ pertencem ao mesmo conjunto da partição se, e somente se, xRy. Reciprocamente, toda partição de A define uma relação de equivalência R, desde que ponhamos xRy para indicar que x e y pertecem ao mesmo conjunto da partição.

Definição 4.2.5 *O conjunto quociente de um conjunto A por uma relação de equivalência R é o conjunto A/R, cujos elementos são classes de equivalência dos elementos de A segundo a relação R:*

$$A/R = \{C_x;\ x \in A\}.$$

4.3 Grupos

Definição 4.3.1 (Grupo) *Sejam G um conjunto não vazio e uma operação binária (geralmente chamada multiplicação) em G , que associa para cada par de elementos (a, b) em G um elemento em G denotado por $a * b$. Dizemos que o por $(G, *)$ é um grupo quando as seguintes propriedades são satisfeitas:*

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G \\ (a,\ b) &\longmapsto a * b \end{aligned}$$

(i) *(associatividade) para todo a, b, $c \in G$, $(a * b) * c = a * (b * c)$;*

(ii) *(existência do elemento identidade) existe um elemento $e \in G$ tal que $a * e = a = e * e$ para todo $a \in G$;*

(iii) *(existência do elemento inverso) para cada $a \in G$, existe um $a^{'} \in G$ tal que $aa^{'} = e = a^{'} * a$.*

Dizemos que $(G, *)$ é um semi-grupo quando as condições (i) e (ii), mas (iii) não necessariamente. Podemos dizer, que um grupo é um conjunto junto com uma operação associativa tal que todo elemento tem um inverso, e todo par de elementos podem ser operados sem que o resultado sai do conjunto, é condição é chamada fechamento. Escreveremos $a * b$ e e respectivamente por ab e 1, ou como $a + b$ e 0. E indicaremos o inverso de cada elemento $a \neq 0$ por a^{-1}, ou $-a$. Um grupo G é dito *abeliano* se a operação é comutativa. Caso exista pelo menos um par de elementos a, b em G tal que $ab \neq ba$ este grupo é chamado *não-aleliano*.

Os grupo com finitos elementos possuem propriedades interessantes, e para facilitar o estudo dos grupos finitos introduziremos a noção de ordem de um grupo G e de ordem de um elemento em um grupo finito G.

Definição 4.3.2 (Ordem do Grupo) *O número de elementos de um grupo G (finito ou infinito) é chamada a ordem do grupo e será denotada por $|G|$.*
*(**Ordem de um elemento**). A ordem de um elemento g em um grupo G é o menor inteiro positivo tal que $g^n = e$. Se um tal inteiro não existe dizemos que o elemento g tem ordem infinita. A ordem de um elemento g é denotada $|g|$.*

Proposição 4.3.1 .

1. *(Unicidade do elemento neutro). Seja G um grupo, suponha que e_1 e e_2 são os elementos identidade de G com respeito a sua operação $*$. Então $e_1 = e_2$. Em outras palavras, se a operação $*$ tem elemento neutro, ele é único.*

2. *(Unicidade do Inverso). Seja G um grupo, então cada elemento de G possui um único elemento inverso, com respeito à operação $*$. Em outras palavras, se g_1 e g_2 são inversos de g com respeito à operação $*$, então $g_1 = g_2$.*

3. *(Lei do cancelamento). Em um grupo G valem os cancelamentos à esquerda e a direita, isto é, sempre que tivermos $g_1h = g_2h$, então $g_1 = g_2$. Analogamente, se tivermos $hg_1 = hg_2$, então $g_1 = g_2$*

Definição 4.3.3 (Subgrupo) *Seja G um grupo , um subconjunto não vazio H de G é um subgrupo de G , é um subgrupo de G , quando com a operação G restrita a H faz do subconjunto H um grupo.*

Os subgrupo nada mais são que os subconjuntos de G , que são eles mesmo grupos com respeito a operação definida sobre G , isto é , a operação binária de G restrita à H fornece uma operação binária sobre H que é associativa , tem identidade , e tem inverso em H para todos elementos de H. Usaremos a notação $H \leq G$, para significar que H é um subgrupo de G . Agora se quisermos expressar que H é um subgrupo próprio de G , isto é , que $H \neq G$, usaremos a notação $H \leq G$. O subgrupo 1 é chamado subgrupo trivial de G.

Proposição 4.3.2 (Teste do Subgrupo) *Um subconjunto H não vazio de um grupo G é um subgrupo de G se , e somente se, $xy^{-1} \in H$ para todo $x, y \in H$. Além disso , se H um subconjunto finito é suficiente verificar que H é fechado para o produto.*

Proposição 4.3.3 .

1. *A interseção de uma família arbitrária de subgrupo de um grupo G é um subgrupo.*

2. *A união de todos os subgrupos H de um grupo G é um subgrupo de um grupo de G.*

Definição 4.3.4 *Seja $X \in G$ um subconjunto de um grupo G. O subgrupo de G gerado por X , e denotado por $\langle X \rangle = \bigcap_{\substack{S \leq G \\ S \supset X}} S$ é o menor subgrupo de G contendo X.*

Na definição acima não é descartada a hipótese que $X = \emptyset$, e se assim o for, $\langle X \rangle = 1$. Se X é um subconjunto de um grupo G e $\langle X \rangle = G$, então dizemos que X é um conjunto gerador. O subgrupo gerado por X é o menor subgrupo de G, contendo X.

Definição 4.3.5 *Seja X um subconjunto não vazio de um grupo G, então uma palavra sobre X é um elemento $w \in G$ que tem a forma*

$$w = x_1^{e_1} x_2^{e_2} \cdots x_n^{e_n},$$

onde $x_i \in X$, $e_i = \pm 1$ *e* $n \geq 1$.

Definição 4.3.6 (Grupo Cíclico) *Se* G *é um grupo e* $a \in G$, *então o subgrupo cíclico gerado por* a, *denotado por* $\langle a \rangle$, *é o conjunto de todas as potências de* a. *Um grupo* G *é chamado cíclico se existe* $a \in g$ *tal que* $G = \langle a \rangle$

Proposição 4.3.4 *Todo subgrupo cíclico é abeliano.*

Proposição 4.3.5 *Seja* G *um grupo cíclico com gerador* a. *Se a ordem* G *é infinita, então* G, *é isomorfo à* $(Z, +)$. *Se* G *tem ordem finita, então* G *é isomorfo à* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Definição 4.3.7 (Homomorfismo) *Sejam* $(G, *)$ *e* $(H, \circ)$ *grupos. A função* $f : G \longrightarrow H$ *é um* ***homomorfismo*** *se , para todo* $a, b \in G$,

$$f(a * b) = f(a) \circ f(b)$$

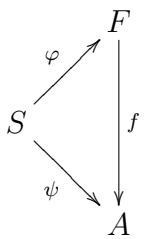
Um homorfismo do grupo G *nele próprio é chamado* ***endomorfismo*** *de* G.
Se f *é injetora, então* f *recebe o nome de* ***monomorfismo*** *de* G *em* H, *e se* f *é sobrejetora recebe o nome de* ***epimorfismo*** *de* G. *em* H.

Definição 4.3.8 (Isomorfismo) *Um isomorfismo é homomorfismo que é uma bijeção. Dizemos que* G *é isomorfo a* H, *denotamos por* $G \approx H$, *se existe um isomorfismo* $f : G \longrightarrow H$.

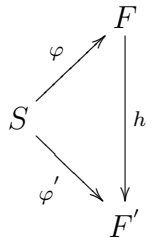
Definição 4.3.9 *Sejam* $(G, *)$ *e* $(H, \circ)$ *grupos e* $f : G \longrightarrow H$ *um homomorfismo. Chama-se* ***núcleo*** *de* f *e denota-se por* $N(f)$ *ou* $Kerf$ *o seguinte subconjunto de* G: $N(f) = x \in G;\ f(x) = u$, *onde* $u = e_H$ *indica o elemento neutro de* J.

Definição 4.3.10 (Subgrupo Normal) *Um subgrupo* N *de* G *é chamado normal, e denotamos* $N \triangleleft G$, *se* $gNg^{-1} = N$, *para todo* $g \in G$.

Definição 4.3.11 (Grupo Abeliano Livre) *Seja* S *um conjunto arbitrário. Um grupo abeliano livre sobre o conjunto* S *é um grupo abeliano* F *junto com uma função* $\phi : S \longrightarrow F$ *tal que a seguinte condição é verdadeira. Para qualquer grupo abeliano* A *e qualquer função* $\psi : S \longrightarrow A$, *existe um único homomorfismo* $f : F \longrightarrow A$ *tal que o seguinte diagrama é comutativo:*

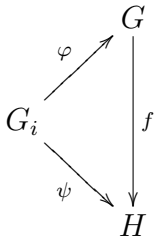


Proposição 4.3.6 *Sejam F e F' grupos abelianos livres no conjunto S com respeito às funções $\varphi : S \longrightarrow F$ e $\varphi' : S \longrightarrow F'$, respectivamente. Então, existe um único isomorfismo $h : F \longrightarrow F'$ tal que o diagrama abaixo é comutativo*

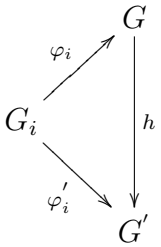


Proposição 4.3.7 *Todo grupo abeliano é a imagem homomórfica de um grupo abeliano livre. Isto é, dado um grupo abeliano A, existe um grupo abeliano livre F e um epimorfismo $f : F \longrightarrow A$ ($A \approx F/Kerf$).*

Definição 4.3.12 (Produto Livre de Grupos) *Seja $G_i/\ i \in I$ uma coleção de grupos e assuma que para cada $i$existe um homomorfismo φ de G_i para um grupo fixo G. Dizemos que G é o produto livre dos grupos G_i (com respeito aos homomorfismos φ) se, e somente se, a seguinte condição é satisfeita: Para qualquer grupo H e quaisquer homomorfismos $\psi : G_i \longrightarrow H$, $i \in I$, existe um único homomorfismo $f : G \longrightarrow H$ tal que para qualquer $i \in I$, o seguinte diagrama*

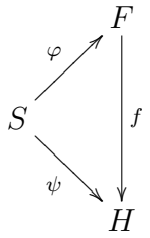


Proposição 4.3.8 *Suponha que G e G' são produtos livres de uma coleção $G_i : i \in I$ de grupos (com respeito aos homomorfismos $\varphi_i : Gi \longrightarrow G$ e $\varphi_i' : Gi \longrightarrow G'$. Então, existe um único isomorfismo $h : G \longrightarrow G'$ tal que o seguinte diagrama é comutativo para todo $i \in I$:*

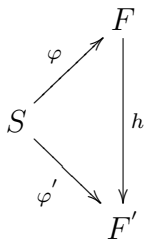


Definição 4.3.13 (Grupo Livre) *Seja S um conjunto arbitrário. Um grupo livre sobre o conjunto S (ou um grupo livre gerado por S) é um grupo F junto com a função*

$\varphi : S \longrightarrow F$ tal que a seguinte condição é satisfeita: Para qualquer grupo H e qualquer função $\psi : S \longrightarrow H$, há um único homomorfismo $f : F \longrightarrow H$ tal que o seguinte diagrama é comutativo:



Proposição 4.3.9 *Sejam F e F' grupos livres sobre o conjunto S com respeito às funções $\varphi : S \longrightarrow F$ e $\varphi' : S \longrightarrow F'$, respectivamente. Então, existe um único homomorfismo $h : F \longrightarrow F'$ tal que o seguinte diagrama comuta:*



Proposição 4.3.10 *Todo grupo é a imagem homomórfica de um grupo livre. Mais precisamente, se S é qualquer conjunto de geradores para um grupo G e (F, φ) grupo livre sobre S, então existe um único epimorfismo $f : F \longrightarrow G$ ($G \approx F/Kerf$).*

Apresentação de Grupos

Seja G um grupo e $S \subset G$. Dizemos que S gera G se todo elemento de G pode ser escrito como produto de potências positivas e negativas de elementos de S. Como por exemplos $G = \{x^1, x^2, ..., x^n = 1\} \approx \mathbb{Z}_n$ é gerado pelo conjunto $S = \{x\}$; $G = \{..., t^{-2}, t^{-1}, 1, t, t^2, ...\} \approx \mathbb{Z}$ é gerado pelo conjunto $S = \{t\}$.

Uma relação trivial entre os elementos de um grupo G é uma relação que é consequência dos axiomas de grupos. Uma relação não-trivial entre os elementos de um grupo G é uma relação que depende da escolha particular de G e S. Segue os exemplos se $x \in S$, então $x \cdot x_1 = 1$. Esta relação é chamada relação trivial; Se G é cíclico de ordem n, gerado por $S = x$, então $x_n = 1$. Esta é uma relação não-trivial.

Uma relação entre geradores (elementos de S) do grupo G é um elemento $r \neq 1$ tal que $r \in Kerf$. Logo, r pode ser expresso unicamente como uma palavra reduzida formada por potências de elementos de S. Se r_j é qualquer conjunto de relações, então qualquer outra relação r é dita ser consequência das r_j se, e somente se, r pertence ao menor subgrupo normal que contém r_j. No caso onde toda relação é consequência do

conjunto de relações r_j, o núcleo de f é completamente determinado pelo conjunto r_j, que é a intersecção de todos os subgrupos normais de F que contém o conjunto r_j.

Definição 4.3.14 *Uma* ***apresentação*** *de um grupo G é um par (S, r_j) formado por um conjunto de geradores de G e um conjunto de relações entre estes geradores. A representação é dita finita se tanto S como r_j são conjuntos finitos, e diz-se que o grupo G é de apresentação finita se possuí pelo menos uma tal apresentação.*

4.4 Espaços Topológicos

Definição 4.4.1 (Topologia) *Uma topologia num conjunto X é uma coleção $\Im$ de subconjuntos de X, chamados* ***os subconjuntos abertos*** *(segundo a topologia $\Im$) satisfazendo às seguintes condições:*

1. *X e o subconjunto vazio $\emptyset$ são abertos;*
2. *a reunião de uma família qualquer de subconjuntos abertos é um subconjunto aberto;*
3. *a interseção de uma família finita de subconjuntos abertos é um subconjunto aberto.*

Observação - é equivalente, em vez de 3), afirmar apenas que a interseção de dois abertos é um aberto.

Definição 4.4.2 (Espaço Topológico) *Um espaço topológico é um par $(X, \Im)$ onde X é um conjunto e $\Im$ é uma topologia em X. Freqüentemente se diz apenas o "espaço topológico X", mencionando $\Im$ somente quando for necessário para evitar ambigüidade.*

Definição 4.4.3 (Aplicação Contínua) *Uma aplicação $f : X \longrightarrow Y$, de um espaço topológico X num espaço topológico Y, diz- se continua quando a imagem inversa $f^{-1}(B)$ de todo aberto $B \subset Y$ for um aberto em X.*

Proposição 4.4.1 *A relação $(g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B))$ mostra que a composta $g \circ f : X \longrightarrow Z$ de duas aplicações continuas $f : X \longrightarrow Y$ $g : Y \longrightarrow Z$ é uma aplicação contínua.*

Definição 4.4.4 (Homeomorfismo) *Um homeomorfismo $f : X \longrightarrow Y$, de um espaço topológico X sobre um espaço topológico Y é uma aplicação continua e biunívoca de X sobre Y, cuja inversa $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ também é continua.*

Definição 4.4.5 *Uma aplicação $f : X \longrightarrow Y$, de um espaço topológico X num espaço topológico Y diz- se aberta quando, para cada aberto $A \subset$, $f(A)$ é aberto em Y.*
De modo análago definimos aplicação fechada.

Definição 4.4.6 *Um espaço topológico X chama- se* ***um espaço de Hausdorff*** *(**ou espaço separado**) quando, dados dois pontos arbitrários $x \neq Y$ em X, existem abertos $A, B \subset X$ tais que $x \in A$, $y \in B$ e $A \cup B = \emptyset$.*

Definição 4.4.7 *Seja $(X, \Im)$ um espaço topológico e $\emptyset \neq Y \subset X$, então:*

$$\Im_Y = \{A \cap Y;\ A \in \Im\},$$

é uma topologia sobre Y chamada topologia relativa a Y,ou topologia de subespaço, ou ainda de topologia induzida. O par $(Y, \Im_Y)$ é dito ***subespaço topológico*** *de $(X, \Im)$. Os elementos de $\Im_Y$ são ditos abertos relativos.*

Definição 4.4.8 *Seja S um subconjunto de um espaço topológico X. Um ponto $x \in S$ chama- se um* ***ponto interior*** *de S quando existe um aberto A de X tal que $x \in A \subset S$. O* ***interior*** *de S é o conjunto $int.(S)$ formado pelos pontos interiores de S.*

Proposição 4.4.2 *O interior de um conjunto S, num espaço topológico X, é a reunião de todos os subconjuntos abertos de X que estão contidos em S.Em particular, $int.(S)$ é aberto em x*

Corolário 4.4.1 *S é aberto se, e somentese, $S = int.(S)$*

Definição 4.4.9 *Num espaço topológico X, diz-se que um conjunto V é uma* ***vizinhança*** *de um ponto $x \in X$ quando $x \in int.(V)$. Isto quer dizer, naturalmente, que V contém um aberto que contém x.*

Definição 4.4.10 *A* ***fronteira*** *de um subconjunto S de um espaço topológico X é conjunto $fr.(S)$ formados todos os pontos $x \in X$ tais que toda vinhança de x contém pontos de S e do complementar $X - S$.*

Definição 4.4.11 *Um subconjunto F de um espaço topológico X diz-se* ***fechado*** *quando o seu complementar $X - F$ é aberto.*

Definição 4.4.12 (Conexo) *Um espaço topológico X chama- se conexo quando $\emptyset$ e X são os únicos subconjuntos de X simultaneamente abertos e fechados. Um subconjunto S de um espaço topológico X chama- se um subconjunto conexo quando, com a topologia induzida de X, S é um espaço topológico conexo.*

Definição 4.4.13 (Caminho) *Um caminho ou arco num espaço topológico X é uma aplicação continua $f : I \longrightarrow X$, onde I é o intervalo fechado $[0, 1]$. Os pontos $a = f(0)$ e $b = f(1)$ são chamados as extremidades do caminho f; $a = f(0)$ é o ponto inicial e $b = f(1)$ é o ponto final. Diz- se também que os pontos a e b são ligados pelo caminho f.*

Definição 4.4.14 (Conexo por Caminhos) *Um espaço topológico X diz-se conexo por caminhos ou arco-conexo quando, dados dois pontos $a, b \in X$, existe sempre um caminho $f : I \longrightarrow X$ com $f(0) = a$ e $f(1) = b$.*

Definição 4.4.15 (Componente Conexa) *A reunião de todos os subconjuntos conexos de um espaço topológico X que contem um ponto $x \in X$ é um conjunto conexo C_x, ao qual chamaremos a componente conexa de x no espaço X, ou ainda arco-componente.*

Definição 4.4.16 (Componente Conexa por Caminhos) *A componente conexa por caminhos de um ponto x, num espaço topológico X é a reunião de todos os subconjuntos conexos por caminhos de X contem x.*

Definição 4.4.17 *Sejam X um espaço topológico e S um subconjunto de X. Uma **cobertura** de S é uma família $\copyright = (C_\lambda)_{\lambda \in L}$ de subconjuntos de X com $S \subset \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$, isto é, para cada $s \in S$ existe um índice $\lambda \in L$ tal que $s \in C_\lambda$.*

Equivalentemente, pode- se considerar uma cobertura de S como uma coleção © de subconjuntos de X (sem índices) tal que, para cada $s \in S$ existe um conjunto C da coleção © com $s \in C$. Diz-se que uma cobertura © é aberta, fechada etc. quando os conjuntos C_λ que a compõem, são abertos, fechados etc. Do mesmo modo, diz-se que © e uma cobertura finita, ou enumerável, ou não- enumerável quando o conjunto L dos índices λ é finito, ou enumerável, ou não enumerável. Seja $\copyright = (C_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma cobertura de S. Uma subcobertura de © é uma subfamília $\copyright = (C_{\lambda'})_{\lambda' \in L'}$, $L' \subset L$, que ainda é uma cobertura de S, isto é, continua válida a propriedade $S \subset \bigcup_{\lambda' \in L'} C_{\lambda'}$.

Definição 4.4.18 *Um espaço topológico X chama- se **compacto** quando toda cobertura aberta de X possui uma subcobertura finita. Diz- se que um subconjunto S de um espaço topológico X é um **subconjunto compacto** quando S, com a topologia induzida de X, é um espaço compacto. Isto significa que, se $(U_{\lambda)_{\lambda \in L}}$ é uma família de subconjuntos de S, abertos em S, com $\cup U_\lambda = S$, então existe uma subfamília finita $(U_1, \cdots, U_{\lambda n})$ tal que $S = U_{\lambda 1} \cup \cdots \cup U_{\lambda n}$.*

Proposição 4.4.3 *A imagem de um conjunto compacto por uma aplicação contínua é um conjunto compacto.*

4.5 O Grupo Fundamental

Definição 4.5.1 *Sejam $f_0, f_1 : [a,b] \longrightarrow X$ dos caminhos em X, tais que $f_0(a) = f_1(a)$, $f_0(b) = f_1(b)$ (isto é, os dois caminhos têm a mesma origem e o mesmo extremo). Diremos que estes caiminhos são* ***equivalentes****, e o denotaremos por $f_0 \sim f_1$, se e somente se exite uma aplicação contínua*

$$F : [a,b] \times I \longrightarrow X,$$

tal que

$$\left.\begin{array}{l} F(t,0) = f_0(t) \\ F(t,1) = f_1(t) \end{array}\right\} t \in [a,b],$$

$$\left.\begin{array}{l} F(a,s) = f_0(a) = f_1(a) \\ F(b,s) = f_0(b) = f_1(b) \end{array}\right\} s \in I.$$

Esta relação é reflexiva, simétrica e transitiva. De agora em diante, por um *caminho* em X (X é um espaço topológico) entenderemos como uma aplicação contínua $I \longrightarrow X$. Se f e g são caminhos em X tais que o extremo de f coincida com a origem de g, então o *produto* $f \cdot g$ estará definido por

$$(f \cdot g)\, t = \begin{cases} f(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ g(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}.$$

Lema 4.5.1 *A relação de equivalência e o produto que temos definidos são compativeis no seguinte sentido: Se $f_0 \sim f_1$ e $g_0 \sim g_1$, então $f_0 \cdot g_0 \sim f_1 \cdot g_1$ (se supõe, desde logo, que o extremo de f_0 coincide com a origem de g_0).*

Como consequência do lema 4.1, a multiplicação de caminhos define uma multiplicação de classes de equivalência de caminhos (supondo que o extremo do primeiro caminho coincida com a origem do segundo). Observe que a multiplicação de caminho em geral não é associativa, ou seja, $(f \cdot g) \cdot h \neq f \cdot (g \cdot h)$ (suponhamos que ambos produtos estão definidos).

Lema 4.5.2 *A multiplicação de clases de equivalência de caminhos é associativa.*

Dado um ponto $x \in X$ qualquer, denominamos por ϵ_x a classe de equivalência da aplicação constante de I no ponto x de X, onde $e : I \longrightarrow X$ tal que $e(I) = \{x\}$ é a aplicação constante.

Lema 4.5.3 *Seja α uma calsse de equivalência de caminhos com origem no ponto x e extremo no ponto y. Então $\epsilon_x \cdot \alpha = \alpha$ e $\alpha \cdot \epsilon_y = \alpha$.*

Dado um caminho $f : I \longrightarrow X$ arbitrário, designemos por $\bar{f}$ o caminho definido por

$$\bar{f}(t) = f(1-t), \quad t \in I.$$

O caminho $\bar{f}$ se obtém percorrendo o caminho f na direção oposta.

Lema 4.5.4 *Sejam α e $\bar{\alpha}$ as classes de equivalência dos caminhos f e $\bar{f}$ respectivamente. Então*

$$\alpha \cdot \bar{\alpha} = \epsilon_x, \quad \bar{\alpha} \cdot \alpha = \epsilon_y,$$

onde x e y denotam a origem e o extremo do caminho f.

Em virtude destas propriedades da classe de caminho $\bar{\alpha}$, a designaremos apartir de agora, por α^{-1}. Vê-se em ses]guida que as condições do lema 4.4 determinam α^{-1} univocamente. Assim pois, se $f_0 \sim f_1$, então $\bar{f_0} \sim \bar{f_1}$.

Podemos resumir os lemas até agora vistos, dizendo que o conjunto de classes de camonhos em X satisfaz os axioma de grupo, salvo quando o produto de dois caminhos não está sempre definido.

Definição 4.5.2 *Um caminho, ou classe de caminhos, se chama fechado, ou laço, se seus extremos coincidem. O extremo comum, diz-se que é a base do laço, ou que se trata de um laço com base no extremo comum.*

Definição 4.5.3 (Grupo Fundamental) *Seja x um ponto arbitrário de X; vê-se em seguida que o conjunto de todos os laços com base em x é um grupo. Este grupo se chama o grupo fundamental ou grupo de Poincaré de X no ponto base x, e se denota por $\pi(X, x)$.*

Proposição 4.5.1 *Se X é conexo por caminhos, os grupos $\pi(X, x)$ e $\pi(X, y)$ são isomorfos, para todo par de puntos x, $y \in X$.*

Homomorfismo induzido

Seja $\varphi : X \longrightarrow Y$ uma aplicação contínua, e $f_0, f_1 : I \longrightarrow X$ caminhos em X. Se vê em seguida que se f_0 e f_1 são equivalentes, então também são os caminhos $\varphi \circ f_0$ e $\varphi \circ f_1$ representados pelas correspondentes funções compostas. Assim, se α denota a classe de caminhos que contém a $\varphi \circ f_0$ e $\varphi \circ f_1$. $\varphi_*(\alpha)$ é a imagem da classe de caminhos α no espaço Y, e se comprova em seguida que a aplicação φ_*. que aplica α em $\varphi_*(\alpha)$ verifica as seguintes propriedades:

1. Se α e β são classes de caminhos em X tais que $\alpha \cdot \beta$ estão definido, então $\varphi_*(\alpha \cdot \beta) = (\varphi_*\alpha) \cdot (\varphi_*\beta)$.

2. Para todo ponto $x \in X$, $\varphi_*(\epsilon_{\varphi(x)}$.

3. $\varphi_*(\alpha^{-1}) = (\varphi_*\alpha)^{-1}$.
   Por estas razões, chamaremos a φ_* *homomorfismo*, ou ainda, o *homomorfismo induzido por* φ.
   Se $\psi : Y \longrightarrow Z$ é uma aplicação contínua, então podemos comprovar facilmente a seguinte propriedade:

4. $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$.
   Finalmente, se $\varphi : X \longrightarrow X$ é a identidade, então

5. $\varphi_*(\alpha) = \alpha$, para toda classe de caminhos α em X; é dito, φ_* é o homomorfismo identidade.

Observe que em virtude destas propriedades, uma aplicação cantínua $\varphi : X \longrightarrow Y$ induz um homomorfismo $\varphi_* : \pi(X, x) \longrightarrow \pi(Y, \varphi(x))$; e, se φ é um homeomorfismo, então φ_* é um isomorfismo.

Definição 4.5.4 *Duas aplicações contínuas $\varphi_0, \varphi_1 : X \longrightarrow Y$ são* ***homotópicas*** *se, e somente se, existe uma aplicação contínua $\Phi : X \times I \longrightarrow Y$ tal que, para todo $x \in X$,*

$$\begin{aligned} \Phi(x, 0) &= \varphi_0(x), \\ \Phi(x, 1) &= \varphi_1(x). \end{aligned}$$

E é simbolizado por $\varphi_0 \simeq \varphi_1$.

Esta é uma relação de equivalência sobre o conjunto de todas as aplicações contínuas de X em Y. As classes de equivalência denominam-se *classes de homotopia* de aplicações.

Definição 4.5.5 *Duas aplicações $\varphi_0, \varphi_1 : X \longrightarrow Y$ se dizem homotópicas relativamente ao conjunto A de X se e somente se existe uma aplicação contínua $\Phi : X \times I \longrightarrow Y$ tal que, para toda $x \in X$ tal que*

$$\begin{aligned} &\Phi(x, 0) = \varphi_0(x), && x \in X, \\ &\Phi(x, 1) = \varphi_1(x), && x \in X, \\ &\Phi(a, t) = \varphi_0(a) = \varphi_1(a), && a \in A, t \in I. \end{aligned}$$

E escreve-se $\varphi_0 \simeq \varphi_1$ $(rel.A)$.

Definição 4.5.6 *Diremos que $a, b : I \longrightarrow X$ são* ***caminhos homotópicos*** *quando tivermos $a \simeq b$ $(rel.\partial I)$. Abreviaremos esta afirmação com a notoção $a \cong b$. Onde $\partial I = \{0, 1\}$ é a fronteira do intervalo I.*

Definição 4.5.7 *Dois caminhos fechados $a, b : I \longrightarrow X$ dizem-se* ***livremente homotópicos*** *quando uma aplicação contínua $F : I \times I \longrightarrow X$ tal que $F(s,0) = a(s)$, $F(s,1) = b(s)$ e $F(0,t) = F(1,t)$ para quaisquer $s,\ t \in I$.*

Definição 4.5.8 *Diremos que um subconjunto A de um espaço topológico X é um* ***retrato*** *de X se existe uma aplicação contínua $r : X \longrightarrow A$ (chamada uma* ***retração****) tal que $r(a) = a$ para todo $a \in a$.*

Definição 4.5.9 *Um subconjunto A de X é um retrato de deformação de X, se existe uma retração $r : X \longrightarrow A$ e uma homotopia $F : X \times I \longrightarrow X$ tal que*

$$\left.\begin{array}{l} F\,(x,0) = x \\ F\,(x,1) = r(x) \end{array}\right\} x \in X,$$

$$F(a,t) = a, \quad a \in A \text{ e } t \in I.$$

Proposição 4.5.2 *Se A é um retratato de deformação de X, então a inclusão $i : A \longrightarrow X$ induz um isomorfismo de $\pi(A,a)$ sobre $\pi(X,a)$ para todo $a \in A$.*

Definição 4.5.10 *Um espaço topológico X é contrátil a um ponto se existe um ponto $x_0 \in X$ tal que x_0 é um retrato de deformação de X.*

Definição 4.5.11 *Um espaço topológico X é* ***simplesmente conexo*** *se é conexo por caminhos e $\pi(X,x) = \{1\}$ para algum (e portanto para todo) $x \in X$.*

Corolário 4.5.1 *Se X é contrátil a um ponto, é simplesmente conexo*

Proposição 4.5.3 *O grupo fundamental do espaço produto, $\pi(X \times Y, (x,y))$, é naturalmente isomorfo ao produto direto dos grupos fundamentais $\pi(X,x) \times \pi(Y,y)$.*

$$\pi(X \times Y) \approx \pi(X) \times \pi(Y)$$

Este teorema obviamente pode estenderse ao produto de uma família finita de espaços.

Definição 4.5.12 *Diz-se que dois espaços X e Y são do mesmo tipo de homotopia se existem aplicações contínuas (chamadas equivalência homotópicas) $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow X$ tais que $g \circ f \simeq id._X$ e $f \circ g \simeq id._Y$.*

Claramente dois espaços homeomorfos são do mesmo tipo de homotopia.

Proposição 4.5.4 (★) *Seja $a : I \longrightarrow S^n$ um caminho tal que $a(I) \neq S^n$. Então $a \cong e_{x_0}$ se $a(0) = a(1) = x_0$ e $a \cong c$, onde $c : I \longrightarrow S^n$ é um caminho injetivo, se for $a(0) \neq a(1)$.*

Proposição 4.5.5 (★) *Todo caminho $a : I \longrightarrow S^n$ é homotópico (com extremos fixos) a um caminho $b : I \longrightarrow S^n$ tal que $b(I) \neq S^n$.*

Tomaremos como ponto de partida para a determinação de $\pi(S^1)$ (grupo fundamental do círculo) a *aplicação exponencial* $\xi : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$, $\xi(t) = e^{it} = (cost, sent)$.

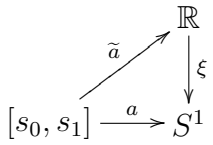
Lema 4.5.5 *$\xi(t) = e^{it} = (cost, sent)$, ξ é uma aplicação aberta.*

Proposição 4.5.6 *A restrição de ξ a todo intervalo aberto $(t, t + 2\pi)$ de comprimento 2π é homeomorfismo sobre $S^1 - \xi(t)$.*

Corolário 4.5.2 *Todo ponto $u = \xi(t) \in S^1$ possui uma vizinhança aberta $V = S^1 - u^*$, $u^* = -u$, cuja imagem inversa $\xi^{-1}(V)$ é a reunião dos intervalos abertos $I_n = t + \pi(2n - 1), t + \pi(2n + 1))$, $n \in \mathbb{Z}$, cada um dos quais é aplicado homeomorficamente por ξ sobre V.*

Proposição 4.5.7 *Dado um intervalo $J = [s_0, s_1]$, uma função contínua $a : J \longrightarrow S^1$ e um número real t_0 com $a(s_0 = e^{it_0}$, existe uma única função contínua $\widetilde{a} : J \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $a(s) = e^{ia(s)}$ para todo $s \in J$ (isto é, $a = \xi \circ \widetilde{a}$) e $\widetilde{a}(s_0) = t_0$.*

A existência da função $\widetilde{a}$ tal que $\xi \circ \widetilde{a}$ é frequentemente ilustrada com o seguinte diagrama comutativo:



A função $\widetilde{a} : J \longrightarrow \mathbb{R}$ chama-se função-ângulo para a. Se $a : I \longrightarrow S^1$ é um caminho fechado, toda função-ângulo $\widetilde{a} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ para a deve ser tal que o número

$$n(a) = \frac{\widetilde{a}(1) - \widetilde{a}(0)}{2\pi}$$

é inteiro. O número $n(a)$ não depende da função-ângulo escolhida, já que duas quaisquer delas diferem por uma constante e essa constante desaparece ao se efetuar a duferença $\widetilde{a}(1) - \widetilde{a}(0)$.

Definição 4.5.13 *O número inteiro $n(a)$, associado ao caminho fechado $a : I \longrightarrow S^1$, da maneira acima , chama-se o* ***grau*** *do caminho a.*

Proposição 4.5.8 *Sejam $a, b : I \longrightarrow S^1$ caminhos fechados. Então:*

1. *Se a e b têm o mesmo ponto básico, vale $n(ab) = n(a) + n(b)$;*
2. *Se a e b são livremente homotópicos, tem-se $n(a) = n(b)$;*
3. *Se $n(a) = n(b)$, então a e b são livremente homotópivos. Além disso, $a \cong b$ quando a e b têm o msmo ponto básico,*
4. *Dados $p \in S^1$ e $k \in \mathbb{Z}$, existe um caminho fechado $a : I \longrightarrow S^1$ com base no ponto p, tal que $n(a) = k$.*

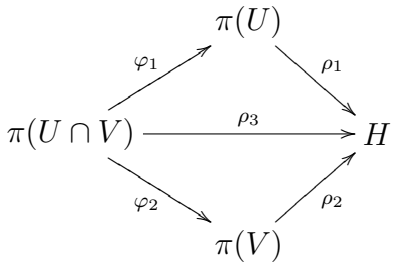
Proposição 4.5.9 *O grupo fundamental do círculo S^1 é isomorfo ao grupo aditivo $\mathbb{Z}$ dos inteiros*

$$\pi(S^1) \approx \mathbb{Z}$$

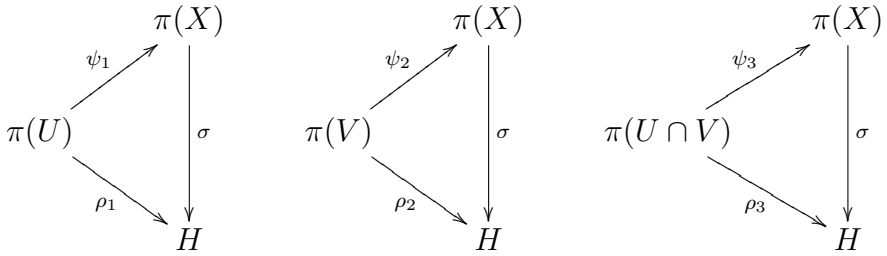
4.6 Teorema de Seifert e Van Kampen

Em primeiro lugar vamos dar um enunciado preciso do teorema. Suponhamos que U e V são subconjuntos abertos arco-conexos de X tais que $X = U \cup V$ e $U \cap V$ é não vazio e arco-conexo. Escolhemos um ponto base $x_0 \in U \cap V$ para todos os grupos fundamentais que consideremos.

Teorema 4.6.1 (Seifert e Van Kampen) *Seja H um grupo arbitrário e ρ_1, ρ_2, e ρ_3 três homomorfismos tais que o seguinte diagrama seja comutativo:*



Então existe um único homorfismo $\sigma : \pi(X) \longrightarrow H$ tal que os três diagramas seguintes sejam comutativos:



(Os homomorfismos φ_i e ψ_i, $i = 1, 2, 3$ estão induzidos pelas inclusões.)

Corolário 4.6.1 Suponhamos, como no teorema 4.6.1, que X é a união de dois abertos U e V, e que U, V e $U \cap V$ são todos arco-conexos. Damos a φ_i e ψ_i o significado que temos associado ao teorema.
Se $U \cup V$ é simplismente conexo, então $\pi(X)$ é o produto livre dos grupos $\pi(U)$ e $\pi(V)$ respeito aos homomorfismos $\psi_1 : \pi(U) \longrightarrow \pi(X)$ e $\psi_2 : \pi(V) \longrightarrow \pi(X)$

Corolário 4.6.2 Ponhamos de novo a situação do teorema 4.6.1: U, V e $U \cap V$ são subconjuntos de X abertos e arco-conexos, $X = U \cup V$ e $x_0 \in U \cap V$.
Suponhamos que V é simplismente conexo. Então $\psi_1 : \pi(U) \longrightarrow \pi(X)$ é um epimorfismo, e seu núcleo é o menor subgrupo normal de $\pi(U)$ que contém a imagem $\varphi_1 [\pi(U \cap V]$.

5 Resultados

Podemos aplicar o corolário 4.6.2 para determinar a estrutura do grupo fundamental das distintas 2-variedades conexas compactas.

Proposição 5.0.1 (Toro) $\pi(T) \approx \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2$

Posto que $T = S^1 \times S^1$, pela proposição 4.5.3 sabemos que

$$\pi(T) \approx \pi(s^1) \times \pi(s^1) \approx \mathbb{Z}^2$$

é o produto de dois grupos cíclicos infinitos, é dito, um grupo abeliano livre de dois geradores. Pode se obter este mesmo resultado a apartir do corolário 4.6.2

Proposição 5.0.2 (Plano Projetivo) *O grupo fundamental do plano projetivo real é cíclico de ordem 2.*$(\pi(P_2) \approx \mathbb{Z}_2)$

Aplicando o corolário 4.6.2 demonstra-se que $\pi(P_2)$ é um grupo cíclico de ordem 2.

Proposição 5.0.3 (Esfera) *Se $n \geq 2$, a esfera S^n é simplismente conexa, ou seja,* $\pi(S^n) = \{1\}$

Esta proposição decorre da proposição 4.5.4(★) e 4.5.5(★).

6 Cronograma

O desenvolvimento do projeto obedece o seguinte cronograma:

Atividades	Ago	Set	Out	Nov	Dez	Jan
Estudo bibliográfico em Lógica-matemática	X					
Estudo bibliográfico em Lógica-matemática		X				
Estudo bibliográfico em Lógica-matemática			X			
Apresentação Oral Parcial				X		
Estudo bibliográfico em Lógica-matemática				X		
Estudo bibliográfico em Lógica-matemática					X	
Estudo bibliográfico em Lógica-matemática						X
Relatório Parcial						X

Atividades	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul	Ago
Estudo bibliográfico em Álgebra	X						
Estudo bibliográfico em Álgebra		X					
Estudo bibliográfico em Álgebra			X				
Estudo bibliográfico em Álgebra				X			
Estudo bibliográfico em Álgebra					X		
Estudo bibliográfico em Álgebra						X	
Relatório Final						X	
Apresentação Oral Final							X

7 Conclusão

A partir dos estudos feitos em Lógica-matemática e Álgebra conseguiu-se compreender de forma clara os tópicos abordados. Os estudos foram essenciais para compreender como a matemática funciona, como as idéias da matemática surgem e se desenvolvem. O aluno passou a dar mais atenção ao rigor que as idéias matemáticas demandam, aprendeu a se comunicar com linguagem mais clara, precisa e fundamentada na lógica. O grupo fundamental é uma ferramenta estremamente importante no estudo da topologia. O método mas eficaz para determinar a estrutura do grupo fundamental de uma ampla gama de espaços é o Teorema de Seifert-Van Kampen. Para a sua compreensão foi necessário o estudo de vários objetos algébricos como grupo abeliano livre, produto livre de grupos, grupos levres etc.. Utilizando estes conceitos podemos converter alguns problemas topológicos em problemas puramente algébricos. Esta é a estratégia fundamental da topologia algébrica: encontrar métodos para reduzir problemas topológicos a questões de pura álgebra. O estudo tornou mais fácil a aprendizagem de vários outros tópicos.

8 Bibliografia

Referências

[1] Massey, W. S., *Algebraic Topology: An Introduction*, Springer-Verlag, Inc., New York, 1987.

[2] Lima, E. L., *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*, 2ª edição, Impa, Rio de Janeiro, 1993.

[3] Lima, E. L., *Elementos de Topologia Geral*, 2ª edição, LTC, Rio de Janeiro, 1976.

[4] Lima, E. L., *Espaços Métricos*, Impa, Rio de Janeiro, 1977.

[5] Lipschutz, Seymour, *Topologia Geral* (Coleção Schaum), McGraw-Hill do Brasil, Brasília, 1973.

[6] Sampaio, J. C. V., *Topologia das Superfícies uma Introduçao Intuitiva*, UFSC-CCET-DM.

[7] Carlos E. N., *Inteiros e Introdução a Teoria de Grupos*, Notas de aula, UFB-IM-DM.

[8] Domingues, H. H., Álgebra Moderna, Atual, São Paulo, 1982.

[9] Hefez, A., *Curso de Álgebra V.1*, Impa, Rio de Janeiro, 1993.

[10] Andrade, Doherty. *Elementos de Lógica*, Notas de aula , UEM-DMA.

[11] Morais Filho, Daniel C. de. *Um Convite à Matemática*, 2ª edição (revista e ampliada). Campina Grande, EDUFCG, 2007.