UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

DEPARTAMENTO DE APOIO À PESQUISA

PROGRAMA DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA

Relatório Final

GRUPOS LIVRES E TEOREMA DE NIELSEN - SCHREIER

PROGRAMA DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA-UFAM

Ramon Códamo Braga da Costa - CNPQ

MANAUS-2011

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS GRADUAÇÃO

DEPARTAMENTO DE APOIO À PESQUISA

PROGRAMA DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA

Relatório Final

PIB-E-0076/2010-2011

GRUPOS LIVRES E TEOREMA DE NIELSEN - SCHREIER

PROGRAMA DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA - UFAM

Ramon Códamo Braga da Costa, CNPQ

Orientador: Dr. Claudenir Rodrigues

MANAUS-2011

Sumário

1 INTRODUÇÃO **4**

2 Grupo Fundamental de Complexos **5**
2.1 Complexos 5
2.2 Homotopia 8
2.3 Funções Simpliciais 9
2.4 Teorema de Tietze 11

3 Cobertura Complexa **14**
3.1 O Teorema de Nielsen - Schreier 16

4 CONCLUSÃO **17**

5 CRONOGRAMA **18**

6 BIBLIOGRAFIA **19**

1 INTRODUÇÃO

Na primeira etapa do projeto definimos grupos livres, apresentações de grupos e explicitamos alguns resultados importantes envolvendo tais objetos; nesta segunda fase voltaremos nossa atenção para a teoria dos complexos, aos quais associaremos um grupo, a saber, o grupo fundamental.
Em Álgebra é de extrema importância o uso de homomorfismos, especialmente os isomorfismos, pois estes garantem que dois grupos, por exemplo, são indistinguiveis algebricamente. Em outras palavras dois grupos isormorfos diferem, apenas pela natureza de seus elementos. Assim se dois grupos, digamos G_1 e G_2 são isomorfos e o primeiro (ou segundo) é finito, abeliano, cíclico, então assim é o outro. Na prática o que ocorre é o seguinte, se estamos procurando informações sobre G_1 que é isomorfo a um grupo G_2 bem mais simples de ser estudado, ou ao menos mais familiar, nos voltamos ao estudo de G_2 e assim tudo que for descoberto neste será válido também no primeiro. No processo de investigação de complexos definiremos também uma noção de "isomorfismo", a saber, as funções simpliciais bijetivas com inversa simplicial.

2 Grupo Fundamental de Complexos

2.1 Complexos

Se A é um conjunto, então $\mathbb{P}(A)$, estará denotando o conjunto das partes de A, assim

Definição 2.1. *Sejam V um conjunto e K um subconjunto de $\mathbb{P}(V)$ formado por subconjuntos finitos e não - vazios. Ao conjunto K daremos o nome de complexo se as condições abaixo forem satisfeitas:*

(i) *se* K possui todos os subconjuntos unitários de V;

(ii) $\forall s \in K$ se $\varnothing \neq r \subset s$, então $r \in K$.

Cada elemento de V será chamado de **vértice**, assim escreveremos convenientemente $V = Vert(K)$, e além disso os elementos K serão denominados **simplexos**. Observemos que o item (i) nos garante que a cada complexo K está associado um único conjunto de vértices, ou seja não é possível que K seja complexo em $Vert(K)$ e em um outro conjunto. Com efeito, suponhamos que W seja um conjunto no qual K é um complexo, assim dado qualquer elemento $x \in W$ é verdade que $\{x\}$ é um simplexo de K, ou seja $\{x\} \in K$, portanto $\{x\} \subset Vert(K)$ e consequentemente $W \subset Vert(K)$. Analogamente verifica - se a inclusão contrária, mostrando - nos por sua vez que $W = Vert(K)$.

Definição 2.2 (Subcomplexos)**.** *Um complexo L é dito subcomplexo de um complexo K se $L \subset K$.*

Definição 2.3. *Um subcomplexo L de K é* ***completo*** *se nenhum simplexo em K com vértices apenas em $Vert(L)$ está fora de L.*

Observemos que se L_1, L_2 são dois subcomplexos completos de K com vértices em $Vert(L) \subset Vert(K)$, então para cada simplexo $s = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ de L_1, tem - se $s \in K$, então s é um simplexo em K com vértices apenas em $Vert(L)$ e como L_2 é completo conclui-se que $s \in L_2$, logo $L_1 \subset L_2$. De modo análogo poderíamos concluir a inclusão contrária, assim $L_1 = L_2$. Em outras palavras um subcomplexo completo fica determinado com a escolha do conjunto de seus vértices. Na verdade para todo subconjunto não - vazio s de $Vert(K)$ o conjunto $L_s = \{r \in K | \, r \subset s\}$ com vértices em $Vert(L_s) = s$ é um subcomplexo completo de K. De fato L_s é uma coleção de subconjuntos não - vazios de s e além disso dado $u \in s$ temos $\{u\} \subset s$, mas K é complexo e portanto $\{u\} \in K$, logo $\{u\} \in L_s$. E finalmente, se $a \in L_s$ e $\varnothing \neq r \subset a$, então $a \in K$ e $a \subset s \therefore r \subset s$ e $r \in K$ ou seja $r \in L_s$ e desta forma L_s é um

subcomplexo de K com vértices em s. É claro que L_s é completo, pois dado qualquer simplexo h de K com vértices apenas em s, ou seja $h \subset s$, temos $h \in L_s$.

Observemos que qualquer que seja a família $\{L_i : i \in I\}$ de subcomplexos de um complexo K, o conjunto $\bigcup L_i$ é um subcomplexo de K com vértices em $\bigcup Vert(L_i)$ e de modo análogo vale para $\bigcap L_i$.

Definição 2.4. *Se um complexo K é união disjunta de subcomplexos K_i, então cada K_i é chamado de componente de K.*

Definição 2.5. *Seja $s = \{v_0, v_1, \ldots, v_q\}$ um simplexo. Diremos que a dimensão de s é q e representaremos por $dim(s) = q$, além disso diremos que este simplexo é um q - simplexo.*

Definição 2.6. *Se n é a maior dimensão entre todos os simplexos de K, então diremos que a dimensão de K é n, em símbolos $dim(K) = n$. Convencionamos que $dim(K) = \infty$ se não existe um simplexo de maior dimensão.*

Observemos que em qualquer simplexo s podemos escolher pares de elementos $u, v \in s$ e assim formar um par ordenado (u, v). A cada par de vértices de um mesmo simplexo daremos o nome de aresta. Definiremos um caminho entre os vértices u e v como sendo uma n - upla α formada por n arestas de modo que $\alpha = (u, u_1)(u_1, u_2) \ldots (u_{n-1}, v)$. O caminho inverso de α é o caminho $\alpha^{-1} = (v, u_{n-1}) \ldots (u_2, u_1)(u_1, u)$. Os caminhos, ou arestas, da forma (v, v) serão ditas triviais. O comprimento de α será o número n. Para cada caminho α definimos ainda a sua origem e seu fim, respectivamente, como sendo u e v, os quais serão representados por $o(\alpha)$ e $e(\alpha)$.

Definição 2.7. *Um complexo K é dito conectado se existe um caminho entre qualquer par de vértices.*

Lema 2.1. *Se $K = \bigcup L_j$ é uma união disjunta de subcomplexos L_j, então cada componente de K é completo e além disso se todos os L_j forem conectados, então estes são os maiores subcomplexos conectados.*

Demonstração. Para ver se L_j é completo devemos mostrar que todo simplexo de K com vértices apenas em $Vert(L_j)$ está em L_j. Com efeito, seja $r \in K$ com vértices apenas em $Vert(L_j)$; assim existe um único L_i tal que $r \in L_i$, logo $r \subset Vert(L_i) \therefore r \subset Vert(L_i) \cap Vert(L_j) = \varnothing$ se $i \neq j$, ou seja $L_i = L_j$ portanto $r \in L_j$ e desta forma cada L_j é completo.
Sejam C um subcomplexo **conectado** e $a = \{a_0, a_1, \ldots, a_q\}$ um simplexo de C. Como $C \subset K = \bigcup L_j$, então existe um único L_j tal que $a \in L_j$, mas será que $C \subset L_j$? Para fazer esta afirmação devemos provar que todos os outros

simplexos $b = \{b_0, b_1 \dots b_n\}$ de C pertencem a "L_j". Indubitavelmente, sendo C subcomplexo conectado, existe um caminho $\alpha = (a_0, v_1)(v_1, v_2) \dots (v_r, b_s)$ para cada $b_s \in b$ e como consequência $\{a_0, v_1\}$ é um simplexo de C, logo existe um único L_i tal que $\{a_0, v_1\} \in L_i$ e como L_i é um subcomplexo, então $\{a_0\} \in L_i \Rightarrow \{a_0\} \in L_i \cap L_j$, logo $L_j = L_i$. Continuando com este procedimento concluiríamos que $\{v_1, v_2\}, \dots, \{v_{l-1}, b_s\} \in L_j \therefore \{b_s\} \in L_j \Rightarrow b_s \in Vert(L_j)$, portanto $b = \{b_0, b_1, \dots b_s\} \subset Vert(L_j)$ e sendo L_j completo $b \in L_j \therefore C \subset L_j$, em outras palavras os L_j´s são os maiores subcomplexos conectados de K. $\square$

Teorema 2.1. *Todo complexo K pode ser escrito de modo único como união disjunta $K = \bigcup K_i$ de subcomplexos conectados. Mais ainda, cada K_i é completo.*

Demonstração. Definamos uma relação $\sim$ em $V = Vert(K)$ da seguinte maneira: $u \sim v$ se existir um caminho em K de u para v; claramente esta é uma relação de equivalência. Desta forma $Vert(K) = \bigcup V_i$, onde cada V_i é uma classe de equivalência. Seja K_i o subcomplexo completo com vértices em V_i, ou seja $K_i = \{s \in K | \, s \subset V_i\}$. Agora $K = \bigcup K_i$, pois se $s \in K$, então $s \subset Vert(K) = \bigcup V_i$ e consequentemente $s \subset V_i$, pois dados $s_1, s_2 \in s$ $\alpha = (s_1, s_2)(s_2, s_2)$ é um caminho em K, ou seja $s_1 \sim s_2$ e portanto $s_1, s_2 \in V_i$, logo $s \in K_i$ e além disso, dado $a \in \bigcup K_i$, $a \in K_j \Leftrightarrow a \in K$ e $a \subset V_j \Rightarrow \bigcup K_i \subset K$. Uma vez que $\forall i \neq j$ $V_i \cap V_j = \varnothing$, temos $K_i \cap K_j = \varnothing$, e assim K é união disjunta de subcomplexos e pelo lema anterior cada componente é completo. Vejamos se os componentes são conectados. Dados $a, b \in V_i = Vert(K_i)$, estes se relacionam, logo existe um caminho $\alpha = (a, u_1)(u_1, u_2) \dots (u_{n-1}, b)$ em K e portanto $\{a, u_1\}$ é um simplexo de K e só pode estar contido em V_i pelo argumento anterior. De modo análogo concluímos que $\{u_1, u_2\}, \dots \{u_{n-1}, b\} \subset V_i$, portanto $\{u_1, u_2\}, \dots \{u_{n-1}, b\} \in K_i$, ou seja K_i é conectado. Suponhamos que $K = \bigcup L_i$ seja união disjunta, onde cada L_i é subcomplexo conectado, assim $\bigcup L_i = \bigcup K_j$ e pelo lema anterior os K_j e L_i são os maiores subcomplexos conectados, logo $K_j \subset L_i \subset K_l \therefore K_j \subset L_i \subset K_l \Rightarrow K_j \subset K_l \Rightarrow K_j = K_l$, portanto $K_j = L_i$.

$\square$

2.2 Homotopia

Definição 2.8. *Se $\alpha = \varepsilon_1 \dots \varepsilon_n$ e $\beta = \eta_1 \dots \eta_r$ são dois caminhos em um mesmo complexo K e $e(\alpha) = o(\beta)$, então o produto $\alpha\beta$ será definido por justaposição, ou seja*

$$\alpha\beta = \varepsilon_1 \dots \varepsilon_n \eta_1 \dots \eta_r$$

Seria interessante encontrar uma estrutura de grupo no conjunto de todos os caminhos em K, mas embora o produto assim definido seja, trivialmente, associativo os demais axiomas de grupo não são satisfeitos. De certa forma contornaremos esta dificuldade e para tanto faremos uso de uma relação de equivalência muito importante chamada **homotopia**.

Definição 2.9. *Chamaremos de **movimentos elementares** em um caminho α num complexo K ao processo de construção de um novo caminho α' através da substituição de um "subcaminho"$(u, v)(v, w)$ de α por (u, w), ou através da substituição de (u, w) por $(u, v)(v, w)$, se $\{u, v, w\}$ é um simplexo em K.*

Definição 2.10. *Diremos que dois caminhos α e β são **homotópicos** se um puder ser obtido do outro através de um número finito de movimentos elementares. Em símbolos, $\alpha \simeq \beta$.*

Reafirmamos que a homotopia é uma relação de equivalência e este fato é de fácil demonstração. Definimos para cada caminho α em um complexo K a sua **classe caminho** $[\alpha]$ formada por todos os caminhos homotópicos a α. Observemos que se α e β são dois caminhos homotópicos, então necessariamente $o(\alpha) = o(\beta)$ e $e(\alpha) = e(\beta)$, pois a homotopia move apenas as arestas interiores. Desta forma diremos que a classe $[\alpha]$ tem origem $o(\alpha)$ e fim $e(\alpha)$ para facilitar a comunicação. De modo semelhante à congruência na teoria de grupos, a homotopia é compatível com a multipicação, ou seja podemos multiplicar duas homotopias membro a membro, em símbolos

$$\text{se } \big(\alpha \simeq \beta\big) \wedge \big(\alpha' \simeq \beta'\big) \Rightarrow \big(\alpha\alpha' \simeq \beta\beta'\big)$$

sempre que os produtos estão definidos. Uma consquência imediata disso é que o produto de classes $[\alpha][\beta] = [\alpha\beta]$, desde que exista o produto $\alpha\beta$, está bem - definido. E portanto vale

Teorema 2.2. *Se v é um vértice em K, o qual chamamares de ponto base, então o conjunto $\pi(K, v) = \{[\alpha] : \alpha$ é fechado em $v\}$ com o produto de classes caminho é um grupo, chamado **Grupo Fundamental** do complexo K com ponto base v.*

Demonstração. Basta seguir o ritual de sempre. □

Teorema 2.3. *Se K é um complexo com ponto base v, então*

(i) se L é um componente de K que possui v, então

$$\pi(K, v) = \pi(L, v).$$

(ii) se K é conectado e v' é outro ponto base, então

$$\pi(K, v) \cong \pi(K, v').$$

Demonstração. (i)Seja $[\alpha] \in \pi(K, v)$, temos que α é um caminho em K fechado em v, ou seja $\alpha = (v, v_1) \dots (v_{n-2}, v_{n-1})(v_{n-1,v})$, onde cada aresta pertence a K; assim $\{v_{n-1}, v\} \in L_j$, sendo L_j um componente de K, logo $v = L \cap L_j \therefore L_j = L$. Se continuarmos com este procedimento concluiremos que todas as arestas de α são arestas em L, ou seja $[\alpha] \in \pi(L, v)$ como queríamos.
(ii) Uma vez que K é conectado, existe um caminho γ ligando v a v'. Assim definamos uma função $f : \pi(K, v) \to \pi(K, v')$, dada por $[\alpha] \mapsto [\gamma^{-1}\alpha\gamma]$. Facilmente verifica -se que f é um isomorfismo com inversa dada por $[\alpha] \mapsto [\gamma\alpha\gamma^{-1}]$. □

2.3 Funções Simpliciais

No começo deste trabalho falamos sobre a importância dos homomorfismos, agora daremos início ao estudo de uma ferramenta Matemática chamada de função simplicial, que nada mais é do que uma noção de homomorfismo no ambiente dos complexos.

Definição 2.11. *Se K e L são complexos, então definimos como uma* ***função simplicial*** *$\phi : K \to L$, uma função $\phi : Vert(K) \to Vert(L)$ que leva simplexos de K em simplexos de L.*

Definição 2.12. *Um isomorfismo de complexos é uma função simplicial bijetiva com inversa sendo ainda uma simplicial.*

Definição 2.13. *Se $\phi : K \to L$ é uma função simplicial e $\varepsilon_i = (v_i, v_{i+1})$ é uma aresta em K, então $\phi\varepsilon_i = (\phi v_i, \phi v_{i+1})$ é uma aresta em L, pois $\{\phi v_i, \phi v_{i+1}\}$ é um simplexo em L. Desta forma se $\alpha = \varepsilon_1 \dots \varepsilon_n$, definiremos $\phi\alpha = \phi\varepsilon_1 \dots \phi\varepsilon_n$.*

Vale observar que as funções simpliciais levam caminhos homotópicos em caminhos homotópicos, simbolicamente temos:

$$\alpha \simeq \beta \Rightarrow \phi\alpha \simeq \phi\beta$$

Teorema 2.4. *Se $\phi : K \to L$ é uma função simplicial, então a função associada $\phi_{\#} : \pi(K, v) \to \pi(L, \phi v)$ dada por $[\alpha] \mapsto [\phi\alpha]$ é um homomorfismo.*

Demonstração. Podemos afirmar sem desonestidade que a demonstração é imediata. □

Definição 2.14. *Diremos que um caminho $\alpha = \varepsilon_1 \dots \varepsilon_n$ é* ***reduzido*** *se α é trivial ou se os ítens abaixo forem satisfeitos:*

(i) α não possui arestas triviais;

(ii) não existem arestas inversas adjacentes.

Os caminhos reduzidos fechados são de extrema importância na teoria de complexos, por isso estes receberão uma nomeação à parte, tais caminhos serão ditos **circuitos**. Em muitas situações nos deparamos com certos problemas técnicos envolvendo caminhos os quais poderiam ser facilmente resolvidos se estivéssemos trabalhando com caminhos reduzidos. Vejamos agora que todo caminho é homotópico a um caminho reduzido, este podendo inclusive ser trivial. Seja α um caminho em um certo complexo K. Se α contém subcaminhos da forma $(v, u)(u, v)$, então este será homotópico a um caminho α' obtido de α com a substituição de $(v, u)(u, v)$ por (v, v). Por sua vez α' será homotópico a um caminho α'' obtido de α' com a retirada de (v, v), a menos que α' seja reduzido e neste caso a demonstração estaria feita. Por mais que continuemos com este procedimento, uma hora deverá acabar, pois α tem comprimento finito, assim α será homotópico a um caminho reduzido, ou mesmo trivial.

Definição 2.15. *Uma árvore T é um complexo conectado de dimenção ≤ 1 que não possui circuitos (não - triviais).*

Sejam u e v vértices em uma árvore T. Se $u = v$, então o único caminho reduzido entre eles é o trivial, pois caso contrário existiria um circuito não - trivial em T. Por outro lado se u e v são distintos, então existe um caminho de u para v em T, pois T é uma árvore. Mas pela observação acima este caminho é homotópico a um caminho redizido α. Suponhamos que exista um segundo caminho reduzido β de u para v. Bom, só existem duas possibilidades: existe ou não existe um subcaminho γ tal que $\alpha = \alpha'\gamma$

e $\beta = \beta'\gamma$, onde a última aresta de α' é distinta da última aresta de β' (ou seja, onde γ é o maior possível). Se for verdade, então o caminho $\alpha'\beta'^{-1}$ é reduzido e fechado, o que é um absurdo, logo resta - nos apenas aceitar que $\alpha = \beta$. Em resumo, existe um único caminho reduzido ligando dois vértices dados em uma árvore.

Definição 2.16. *Um complexo K é dito simplesmente conectado se for conectado e se seu grupo fundamental for o trivial.*

Naturalmente todas as árvores são simplesmente conectadas, uma vez que todos os caminhos fechados são homotópicos aos triviais.

Teorema 2.5. *Se L é um subcomplexo de K simplesmente conectado e α é um caminho fechado em v, com todas as arestas em L, então $[\alpha] = 1_{\pi(K,v)}$.*

Demonstração. A inclusão $\phi : Vert(L) \to Vert(K)$ é claramente uma função simplicial de L em K, logo induz um homomorfismo $\phi_\# : \pi(L, v) \to \pi(K, v)$ dado por $\phi_\#([\alpha]) = [\alpha]$, mas $[\alpha] \in \pi(L, v) = 1 \therefore [\alpha] = 1$. □

Vale ressaltar que $[\alpha] \in \pi(L, v)$ pode não ser a igual à classe de α em $\pi(K, v)$, pois a primeira é composta por caminhos em "L", enquanto na segunda os caminhos são em "K".

Definição 2.17. *Uma árvore T de um complexo K é dita maximal se não existir árvore em K que a contenha propriamente.*

Lema 2.2. *Se K é um complexo conectado e T é uma árvore maximal, então $Vert(T) = Vert(K)$.*

Demonstração. Suponhamos que $Vert(K) \nsubseteq Vert(T)$, em outras palavras admitamos que existe um vértice $v \notin Vert(T)$. Como K é conectado, para qualquer vértice $u \in Vert(T)$ existe um caminho $\alpha = (u, u_1) \dots (v_{n-2}, v_{n-1})(v_{n-1}, v)$ em K. Como $u \in Vert(T)$ e $v \notin Vert(T)$, então em α deve existir uma aresta (v_{i-1}, v_i) com $v_{i-1} \in Vert(T)$ e $v_i \notin Vert(T)$. Com estas informações podemos contruir um complexo T' apartir de T, bastando para isso acrescentar à árvore o vértice v_i e o simplexo $\{v_{i-1}, v_i\}$. É de fácil verificação que T' é uma árvore, assim concluímos que T está contida propriamente em uma árvore T', o que contradiz a hipótese, logo $Vert(T) = Vert(K)$. □

2.4 Teorema de Tietze

O objetivo desta seção é encontrar uma apresentação para o grupo fundamental de complexos, para tanto faremos uso do formidável Teorema de Tietze.

Definição 2.18. *Sejam T uma árvore maximal em um complexo conectado K e F um grupo livre no conjunto de todas as arestas em K. Representaremos o quociente F/R por $\mathfrak{F}(K,T)$, onde R é o subgrupo normal determinado pelas relações abaixo:*

(i) $(u,v)R = 1$ se $(u,v) \in T$;

(ii) $(u,v)R(v,x)R = (u,x)R$ se $\{u,v,x\}$ é um simplexo em K.

Teorema 2.6 (H.Tietze, 1908)**.** *Se T é uma árvore maximal em um complexo conectado K, então*

$$\pi(K,v) \cong \mathfrak{F}(K,T)$$

Demonstração. Uma vez que T é uma árvore maximal em K, existe um único caminho reduzido λ_v de w para cada vértice $v \in Vert(T) - \{w\} = Vert(K) - \{w\}$ (Lema anterior). No que segue λ_w estará representando o caminho (w,w). Agora a unicidade do caminho reduzido nos permite definir uma função $f : X \to \pi(K,w)$ dada por

$$(u,v) \mapsto [\lambda_u(u,v)\lambda_v^{-1}]$$

Ora, pela teoria de grupos livres, sabemos que esta função pode ser extendida a um único homomorfismo $\phi : F \to \pi(K,w)$ e além disso as relações (i) e (ii) garantem (pois T é simplesmente conectada) que $R \subset Ker\phi \therefore R \leq Ker\phi$. Desta forma ϕ indus um homomorfismo $\Phi : \mathfrak{F}(K,T) \to \pi(K,w)$ dado por $(u,v)R \mapsto [\lambda_u(u,v)\lambda_v^{-1}]$. Como dois caminhos homotópicos possuem classes laterais iguais, então podemos definir um homomorfismo $\Omega : \pi(K,w) \to \mathfrak{F}(K,T)$, por meio da correspondência

$$[\varepsilon_1 \dots \varepsilon_r] \mapsto \varepsilon_1 \dots \varepsilon_r R$$

Estes dois últimos homomorfismos são inversos um do outro. Com efeito, se $[\varepsilon_1 \dots \varepsilon_r] \in \pi(K,w)$, então $\Phi \circ \Omega([\varepsilon_1 \dots \varepsilon_r]) = \Phi(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_r R)$, mas

$$\begin{aligned} \Phi(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_r R) &= \Phi(\varepsilon_1 R) \dots \Phi(\varepsilon_r R) \\ &= [\lambda_w \varepsilon_1 \dots \varepsilon_r \lambda_w^{-1}] \\ &= [\varepsilon_1 \dots \varepsilon_r] \end{aligned}$$

Por outro lado se $(u,v)R \in \mathfrak{F}(K,T)$, então $\Omega \circ \Phi\big((u,v)R\big) = \Omega\big(\phi(u,v)\big) = \Omega([\lambda_u(u,v)\lambda_v^{-1}])$ logo

$$\begin{aligned} \Omega \circ \Phi\big((u,v)R\big) &= \lambda_u(u,v)\lambda_v^{-1}R \\ &= (u,v)R \end{aligned}$$

pois λ_u e λ_v^{-1} são caminhos em T. Consequentemente $\pi(K,v) \cong \mathfrak{F}(K,T)$. $\square$

Corolário 2.1. *Todo 1-complexo conectado K tem grupo fundamental livre. Mais ainda, se T é uma árvore maximal em K, então*

$$grau\, \pi(K, w) = \left|\{1 - simplexos \in \complement_K T\}\right|$$

Definição 2.19. *Se I é um conjunto não - vazio, então um buquê de $|I|$ círculos é um 1-complexo B_I com vértices distintos $\{u_i, v_i | i \in I\} \cup \{w\}$ e 1-simplexos $\{w, u_i\}$ e $\{u_i, v_i\}\, \forall i \in I$.*

Corolário 2.2. *Todo buquê I possui grupo fundamental livre de grau $|I|$.*

Demonstração. Basta aplicar o corolário anterior. □

3 Cobertura Complexa

A demonstração do Teorema de Nielsen - Schereier que faremos, consiste em transferir certas propriedades do grupo livre para os complexos, ou mais precisamente para o grupo fundamental. Assim, na primeira etapa associamos a cada complexo um grupo; agora associaremos a cada grupo um complexo. Comecemos pela

Definição 3.1. *Seja $p : K \to L$ uma função simplicial. Definimos a imagem inversa de um subcomplexo L' de L, como sendo o conjunto*

$$p^{-1}(L') = \{s \in K | p(s) \in L'\}$$

Na definição a seguir usaremos a notação $|s|$ para o subcomplexo $\{r \in K | \, r \subset s\}$ de K.

Definição 3.2. *Diremos que um complexo conectado $\widetilde{K}$ é uma cobertura complexa de K se existir uma função simplicial $p : \widetilde{K} \to K$, tal que para todo simplexo em K a imagem inversa $p^{-1}(|s|)$ é união disjunta*

$$p^{-1}(|s|) = \bigcup_{i \in I} |\widetilde{s}_i|$$

onde cada $p|\widetilde{s}_i : |\widetilde{s}_i| \to |\widetilde{s}|$ é um isomorfismo.

Frequentemente nos referiremos à própria função simplicial acima como uma cobertura complexa.

Teorema 3.1. *Seja $p : \widetilde{K} \to K$ uma cobertura complexa e seja $\widetilde{w}$ um ponto base em $\widetilde{K}$, onde $p(\widetilde{w}) = w$. Para qualquer caminho α em K com origem w existe um único caminho $\widetilde{\alpha}$ em $\widetilde{K}$ com origem $\widetilde{w}$ e tal que $p\widetilde{\alpha} = \alpha$.*

Demonstração. Faremos indução sobre o comprimento do caminho α. Se α tem comprimento 1, então $\alpha = (w, v)$. Logo o conjunto $\{w, v\}$ é um simplexo em K. Portanto $|\{w, v\}|$ é isomorfo a um subcomplexo $|\widetilde{s}_i| = |\{\widetilde{w}, \widetilde{v}\}|$ de $\widetilde{K}$. Assim, se $w = v$, então $\widetilde{w} = \widetilde{v}$ e neste caso, o único caminho $\widetilde{\alpha}$ em $\widetilde{K}$ com origem $\widetilde{w}$ que tem imagem α é $\widetilde{\alpha} = (\widetilde{w}, \widetilde{w})$. Por outro lado se $w \neq v$, então $\{\widetilde{w}, \widetilde{v}\}$ é 1-simplexo e $(\widetilde{w}, \widetilde{v})$ uma aresta em $\widetilde{K}$. Como consequência temos $p(\widetilde{w}, \widetilde{v}) = (w, v)$. Suponhamos que $\widetilde{\beta} = (\widetilde{w}, \widetilde{u})$ é outro caminho com imagem α. Desta forma temos que $\{\widetilde{w}, \widetilde{u}\}$ pertence a $\widetilde{K}$ e além disso $|\{\widetilde{w}, \widetilde{u}\}|$ é isomorfo a $|\{w, v\}|$, mas $|\{\widetilde{w}, \widetilde{u}\}|$ e $|\{\widetilde{w}, \widetilde{v}\}|$ são componentes da imagem inversa de $|\{\widetilde{w}, \widetilde{u}\}|$, logo $\widetilde{v} = \widetilde{u}$. Suponhamos que o comprimento de α seja n. Desta forma podemos escrever $\alpha = (w, v)\beta$. Pelo que vimos, existe um

único caminho $(\widetilde{w}, \widetilde{v})$ em $\widetilde{K}$ com imagem (w, v). Além disso uma vez que β tem comprimento $n-1$, então a hipótese de indução garante que existe um único caminho $\widetilde{\beta}$ com origem $\widetilde{v}$ e com imagem β. Consequentemente o caminho $(\widetilde{w}, \widetilde{v})\widetilde{\beta}$ é o único caminho com origem $\widetilde{w}$ que procurávamos. $\square$

Lema 3.1. *Se $p : \widetilde{K} \to K$ é uma cobertura complexa e α e β são dois caminho homotópicos em K, então $\widetilde{\alpha}$ e $\widetilde{\beta}$ são homotópicos.*

Teorema 3.2. *Se $p : \widetilde{K} \to K$ é uma cobertura complexa e $\widetilde{w}$ um ponto base em $\widetilde{K}$ com imagem w, então $p_{\#} : \pi(\widetilde{K}, \widetilde{w}) \to \pi(K, w)$ é um injeção.*

Demonstração. Suponhamos que $p_{\#}([\alpha]) = p_{\#}([\beta])$, portanto $[p\alpha] = [p\beta]$. Consequentemente $p\alpha \simeq p\beta$, desta forma $\alpha = \widetilde{p\alpha}$ e $\beta = \widetilde{p\beta}$, mas o lema anterior nos dá $\alpha \simeq \beta \therefore [\alpha] = [\beta]$. $\square$

Definição 3.3. *Seja K um complexo com ponto base w e seja $H \leq \pi(K, w)$. Defini - se a relação de equivalência $\equiv_H$ no conjunto de todos os caminhos em K por*

$$\alpha \equiv_H \beta \quad se \quad e(\alpha) = e(\beta) \quad e \quad [\alpha\beta^{-1}] \in H.$$

Denotaremos a classe de equivalência de um caminho α por $\mathcal{C}\alpha$ e ao conjunto de todas as classes por K_H. Seja α um caminho com origem w e fim estando em um simplexo $s \in K$. Defimos como uma continuação de α em s a todo caminho β da forma $\alpha\alpha^{'}$, onde $\alpha^{'}$ é um caminho com todas as arestas em s. Por fim, definiremos um simplexo em K_H como sendo

$$[s, \mathcal{C}\alpha] = \{\mathcal{C}\beta \ \ \beta \text{ é continuação de } \alpha \text{ em } s\}$$

Lema 3.2. *Seja K um complexo conectado com ponto base w, seja ainda $H \leq \pi(K, w)$. Nestas condições, K_H é um complexo e a função $p : K_H \to K$ dada por $\mathcal{C}\alpha \mapsto e(\alpha)$ é uma função simplicial.*

Lema 3.3. *Se K é um complexo conectado, então todo caminho α em K com origem w é imagem de um caminho A em K_H de $\widetilde{w} = \mathcal{C}(w, w)$ para $\mathcal{C}\alpha$.*

Corolário 3.1. *Se K é um complexo conectado, então K_H é conectado.*

Teorema 3.3. *Se K é um complexo conectado com ponto base w, então $p : K_H \to K$ é uma cobertura complexa com $p_{\#}(K_H, \widetilde{w}) = H$.*

3.1 O Teorema de Nielsen - Schreier

Finalmente estamos em posse das ferramentas necessárias para demonstrar o Teorema de Nielsen - Schreier, mas antes de demonstrá - lo façamos uma pequena observação. Qualquer que seja o conjunto I não - vazio existe um buquê de $|I|$ círculos. Construiremos a partir de I um buquê B_I; com efeito, seja $Vert(B_I) = \{u_i, v_i; i \in I\} \cup \{w\}$, onde $u_i = \{i\}$, $v_i = \{\{i\}\}$ e $w = \{\{\{i\}\}\}$. Desta forma w, u_i, v_i são distintos vértices para cada $i \in I$. Basta agora tomar cada subconjunto da forma $\{u_i, v_i\}$, $\{u_i, w\}$ e $\{v_i, w\}$ como simplexos.

Teorema 3.4 (Nielsen - Schreier)**.** *Todo subgrupo de grupo livre é também livre!*

Demonstração. Sejam F um grupo livre com base I e $H \leq F$. Pela observação anterior, existe um buquê de $|I|$ círculos, logo $\pi(K, w)$ é um grupo livre de grau $|I|$(corolário 2.1), portanto $F \cong \pi(K, w)$ (teoria de grupos livres). Agora pelo teorema 3.3, existe uma cobertura complexa $p : K_{H_0} \to K$ e tal que $p_{\#}\pi(K_{H_0}, \widetilde{w}) = H_0$, onde $H \cong H_0 \leq \pi(K, w)$. Mas todo homomorfismo associado $p_{\#}$ de p é injetivo, assim $p_{\#}\pi(K_{H_0}, \widetilde{w}) \cong \pi(K_{H_0}, \widetilde{w}) \therefore H \cong \pi(K_{H_0}, \widetilde{w})$. No entanto K tem dimensão 1, pois é um buquê, logo K_{H_0} possui dimensão 1, consequentemente $\pi(K_{H_0}, \widetilde{w})$ é livre. Ou seja, H é livre. $\square$

4 CONCLUSÃO

Finalmente, após expormos uma lista extensa de resultados e definições, que muitas vezes não pareceram ser tão naturais assim, conseguimos atingir nosso objetivo, demonstrar o teorema de Nielsen - Schereier. Mas é necessário lembrar que a teoria de complexos e de suas aplicações teóricas, bem como a teoria de grupos livres é muito vasta e bela. Assim tenho certeza que aqueles que tiverem algum contato com esta teoria, ou ao menos os mais interessados, não resistirão em dar continuidade a estes estudos, temos aqui pois, um prato cheio para quem adora a abstração e se isso for um crime, confesso, mereço a condenação.

5 CRONOGRAMA

O desenvolvimento do projeto obedece ao seguinte cronograma:

Atividades	Fev - 2011	Mar - Abr	Mai	Jun	Jul	Agos - 2011
Aulas de Complexos	X	X	X	-	-	-
Aulas de Funções Simpliciais	-	-	X	-	-	-
Estudo dos Grupos Fundamentais	-	X	X	X	-	-
Estudo dirigido pelo orientador	X	X	X	X	-	-
Apresentação Oral Final	-	-	-	-	-	X
Elaboração do Relatório Final	-	-	-	-	X	-

6 BIBLIOGRAFIA

Referências

[1] GARCIA, A. *Elementos de Álgebra*. IMPA – Projeto Euclides.

[2] GONÇALVES, A. *Introdução à Álgebra*. IMPA – Projeto Euclides.

[3] ROTMAN, J.J.. *An Introduction to the Theory of Groups*. Springer

[4] DAVID S.D., RICHARD M.F. *Abstract Algebra*. John Wiley e Sons, Inc.

[5] DEREK J.S.R. *A course in the Theory of Groups*. Springer

[6] JOHNSON, D.L. - *Presentations of Groups* 2°ed.