UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
PRO REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
DEPARTAMENTO DE APOIO A PESQUISA
PROGRAMA INSTITUCIONAL DE INCIAÇÃO CIENTÍFICA

MODELAGEM DE POPULAÇÕES POR EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Bolsista: Ingrid Nascimento da Costa, CNPq.

MANAUS
2012.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
PRO REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
DEPARTAMENTO DE APOIO A PESQUISA
PROGRAMA INSTITUCIONAL DE INCIAÇÃO CIENTÍFICA

RELATÓRIO FINAL
PIB-E-0012/2011
MODELAGEM DE POPULAÇÕES POR EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Bolsista: Ingrid Nascimento da Costa, CNPq.
Orientador: Profº Drº Minos Martins Adão Neto.

MANAUS
2012.

RESUMO

É comum o uso de equações diferenciais (ED’s) na resolução de problemas que evolvem uma função incógnita e suas derivadas ou suas diferenciais.

No campo da física, algumas equações têm uso essencial, Por exemplo, a equação de Lotka-Volterra, também conhecida como Presa-Predador. Essa descreve a interação entre duas populações (presa e predador). É formado por um par de equações diferenciais, não lineares e de primeira ordem.

O Projeto tem por objetivo desenvolver algoritmos computacionais que modelem populações através de EDO’s (equações diferenciais ordinárias) e resolvam-nas. Tornando possível a analise gráfica das populações em estudo.

A partir do modelo simples de Presa-Predador, desenvolve-se as equações analiticamente e depois usando cálculo numérico para se obter uma modelagem gráfica da variação das populações.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A Dinâmica de populações tenta descrever duas ou mais espécies biológicas que interagem entre si e os problemas correlatos. É comum o uso de modelos para representar, através de uma descrição matemática, a interação entre populações. Esses modelos matemáticos podem ser na forma de equações diferenciais ordinárias (EDO's) ou equações diferenciais parciais (EDP's) [1].

O Modelo que está em estudo é o modelo de Lotka-Volterra ou Presa-Predador, é o primeiro e mais famoso modelo sobre a interação entre duas espécies. Foi proposto independentemente pelo matemático americano Alfred J. Lotka (1880-1949) em 1925 e pelo matemático e físico italiano Vito Volterra (1860-1940) em 1926. Para Volterra, o objetivo na época era analisar as variações observadas nas populações de tubarões e pequenos peixes no mar Adriático [2].

O modelo de Lotka-Volterra lida com duas espécies, presa e predador. O predador tem uma capacidade não limitada de capturar a presa e sua população aumenta com o crescimento dela. Mas o predador é limitado pelo tempo gasto até que encontre a presa. A Presa, por sua vez, cresce exponencialmente limitada somente pelos encontros com predadores.

A partir do modelo simples de Lotka-Volterra, desenvolve-se as equações analiticamente [3], até se obter uma equação que torne possível sua modelagem gráfica, através do uso de uma tabela com valores iniciais definidos. O gráfico de fases mostra o comportamento e os limites de crescimento das populações.

São definidos parâmetros para o modelo, de forma a representar as variáveis que influenciam o sistema. Assim, representamos um sistema mais parecido com o real. As equações, desse modelo, são resolvidas usando o método baseado no de Runge-Kutta de quarta ordem. Para auxilio da modelagem gráfica das populações é usada a linguagem de programação Octave (semelhante ao Matlab).

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Dinâmica populacional é o estudo de populações usando modelos matemáticos dinâmicos. Por isso, a abordagem de sistemas dinâmicos é essencial para a compreensão das cadeias alimentares ecológicas. No uso de modelos de sistemas dinâmicos para analisar sistemas biológicos tornou viável o entendimento de sua evolução [4]. Por exemplo, o estudo dos ciclos limite nos sistemas de Lotka-Volterra e a aplicações de dinâmica caótica (como atratores estranhos) na modelagem de evolução de populações de animais.

Conceito de sistemas dinâmicos nasce da exigência de construir um modelo geral de todos os sistemas que evoluem segundo uma regra que liga o estado presente aos estados passados. Podem ser descritos duas formas de modelar um sistema em relação ao tempo: por equações diferenciais ou por mapas discretos.

As equações diferenciais podem ser ordinárias ou parciais, para descrever a evolução temporal ou temporal-espacial, respectivamente. O trabalho aborda equações diferenciais ordinárias, essas têm a forma:

$$\frac{dx(t)}{dt} = F\big(x(t)\big),\ x(0) = x_0 \qquad (1)$$

Mapas discretos são equações do tipo $x_n = f(x_{n-1})$ (2). Uma das informações básicas que podemos obter de um mapa diz respeito aos pontos de equilíbrio da dinâmica, ou seja, os valores de x que são estacionários [5].

Um exemplo de mapas discretos é o mapa logístico, diagrama de bifurcação na Figura 1, que é representado através da equação: $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$ (3) quando analisamos a quantidade de indivíduos x pelo número de descendentes médios por indivíduos r. O Mapa Logístico é comumente utilizado na introdução à teoria do Caos que em física, é a teoria que explica o funcionamento de sistemas complexos e dinâmicos.

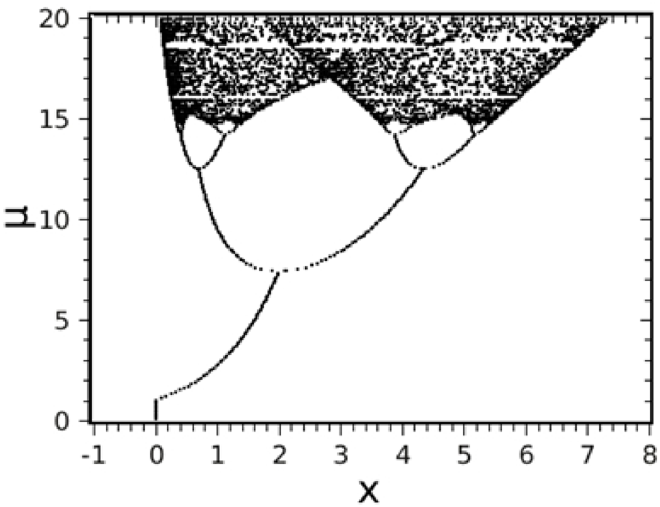

Figura 1 - Mapa Logístico

Os sistemas dinâmicos podem ser conservativos e dissipativos. Sistema dissipativo é todo e qualquer sistema que há transformação de energia em outras modalidades. Enquanto sistema conservativo é quando um sistema não transforma energia nenhuma, a quantidade de energia inicial é igual à quantidade de energia final. Sendo os sistemas dissipativos aparecem as diferenças mais importantes [6]. O Comportamento de um sistema dissipativo ao longo do tempo pode ser caracterizado pela sua tendência a um atrator. Para definir atrator é necessário antes entender espaço de fase.

Espaço de fase é o espaço formado pelas variáveis dependentes do sistema dinâmico. O Espaço de fase forma um conjunto aberto em R^n. No entanto a topologia do espaço pode estar restrita a alguma forma geométrica particular (um atrator, por exemplo). Atrator é uma região do espaço de fase de sistemas dissipativos para qual tendem as trajetórias que partem de determinada região.

Esses atratores podem ser pontos fixos e curvas abertas ou fechadas. Em destaque entre os atratores temos o ciclo-limite e os atratores estranhos.

O ciclo-limite é uma trajetória fechada e isolada que pode aparecer no retrato de fases de sistemas não-lineares. Ou ainda, um atrator que é periódico com o tempo, isto é, que cicla periodicamente em uma seqüência ordenada de estados [7]. Há ausência de outras trajetórias infinitamente próximas para um ciclo-limite assintoticamente estável quando as trajetórias vizinhas internas e externas se aproximam. É usado para descrever sistemas que apresentam um comportamento oscilatório mesmo na ausência de um forçamento periódico externo.

Atratores que evoluem por um processo de alongamentos e dobras são chamados atratores estranhos (Ruelle e Takens). Esses atratores têm suas linhas de fluxo dependentes das condições iniciais [8].

Essa dependência a condições iniciais torna a posição de uma trajetória dentro de um atrator estranho não trivialmente previsível, uma vez que pequenos desvios estão sempre presentes. Como conseqüência, sistemas com esses atratores podem apresentar oscilações irregulares ou caóticas. Portanto esses sistemas podem ter um comportamento aleatório, mesmo sendo definidos por leis totalmente determinísticas, e são chamados de sistemas caóticos. Vale lembrar, que como são definidos por equações ou mapas possui uma ordem em seu interior [7].

A sensibilidade às condições iniciais foi denominada por Lorentz como “efeito borboleta”. Com a metáfora “o vôo de uma borboleta no Brasil poderia desencadear um tornado no Texas” que se tornou sinônimo da teoria do caos.

MÉTODOS UTILIZADOS

Comparada as relações complexas da natureza essas equações são muito simples, ainda assim é possível compreender algo sobre princípios ecológicos.

O modelo Presa-Predador trata de duas populações, onde a presa é sempre alimento abundante para o predador. E esse se alimenta exclusivamente da população de presas. E que num intervalo de tempo Δt, o meio não muda favorecendo alguma espécie [9].

O conjunto de equações diferenciais convencionalmente usados para descrever as relações no modelo de Presa-Predador, através da evolução temporal, foi:

$$\dot{x} = bx - k_1 xy$$
$$\dot{y} = k_2 xy - dy \qquad (4)$$

Os valores de b, k_1, k_2 e d são constantes positivas. Onde, x é a concentração da população de presa e y é a concentração da população de predador. Além disso, assumi-se que:

- Na ausência de predador, a população cresce exponencialmente (termo bx).
- A predação reduz a taxa de crescimento da presa (termo $-k_1 xy$), através do encontro entre as duas populações.
- Na ausência de presa, a população predadora decresce exponencialmente (termo $-dy$).
- A contribuição da presa para a taxa de crescimento do predador (termo $k_2 xy$).

Além desses, aspectos interessantes abordados são:

- Lapsos de tempo de reação.
- Limitação para o crescimento das presas, além do coeficiente de predação (termo densidade).
- Condições de equilíbrio.
- Coeficientes positivos são biologicamente significativos.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Partindo do artigo Time Lag in Prey-Predator population models [3]. O conjunto de equações iniciais representado pela equação (4).

As variáveis dessa equação são equivalentes a:

- x: população de presa;
- y: população de predador;
- b: taxa de aumento da presa;
- k1: coeficiente de efeito da predação sobre x;
- k2: coeficiente de efeito da predação sobre y;
- d: taxa de mortalidade de y.

Com as condições iniciais:

$$x(0) = x_0; \quad y(0) = y_0. \tag{5}$$

Desenvolvendo essas equações analiticamente, obtemos o conjunto de equações abaixo:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= bx_{(t)} - cx_{(t)}^2 - k_1 x_{(t)} y_{(t)} \\ \dot{y} &= k_2 x_{(t-\tau)} y_{(t-\tau)} - dy_{(t)} \end{aligned} \tag{6}$$

Na equação τ é o tempo de atraso, esses valores são fixos. Além disso, o sistema apresenta dois pontos críticos:

$$(0{,}0) \text{ e } \left(\frac{d}{k_2}, \frac{b}{k_1}\right) \tag{7}$$

Verificamos que no ponto crítico (0,0) não é relevante ser analisado, pois biologicamente representa um sistema sem presa e sem predadores. Já o Segundo ponto representa um sistema ocorrendo competição entre as espécies.

Ainda é possível analisar dois outros pontos críticos:

$$\left(0, \frac{b}{k_1}\right) \text{ e } \left(\frac{d}{k_2}, 0\right) \tag{8}$$

Verificamos no primeiro ponto que o número de presas é zero, portanto, o número de predadores diminui. Enquanto no segundo ponto, na ausência de predadores o número de presas aumenta.

A seguir é usado o Clássico método numérico de Runge-Kutta de quarta ordem para resolver o par de EDO's do modelo presa-predador. Esse é um método simples que requer apenas as derivadas de primeira ordem e para encontrar soluções aproximadas [10].

Considerando que o problema segue a seguinte modelagem:

$$y' = f(t,y)\,, \qquad y(t_0) = y_0 \tag{9}$$

Segundo Runge-kutta, o próximo valor y_{n+1} é determinado pelo valor atual y_n, do tamanho do intervalo h e da inclinação l_n (média ponderada entre as inclinações):

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)$$

Onde:

$$l_1 = h\, f(t_n,\, y_n)$$

$$l_2 = h\, f\left(t_n + \frac{h}{2},\, y_n + \frac{l_1}{2}\right) \tag{10}$$

$$l_3 = h\, f\left(t_n + \frac{h}{2},\, y_n + \frac{l_2}{2}\right)$$

$$l_4 = h\, f(t_n + h,\, y_n + l_3)$$

A partir do método de Runge-Kutta são gerados os gráficos a seguir:

Nos gráficos 1 e 2 (populações em função do tempo), é possível perceber que os princípios do modelo Presa-Presador. Observamos que a população de predadores oscila conforme a de presas durante um determinado tempo. Essas oscilações ocorrem mantendo o sistema em equilíbrio.

Também é possível verificar, no gráfico 1, a densidade populacional inicial de presas é maior que a de predadores, e a população de predadores baixa quase pela metade (Tempo = 10) e a de presas cresce em torno de 375 indivíduos (Tempo = 15). Enquanto no gráfico 2, a densidade populacional inicial de presas é menor que a de predadores, e a população de predadores baixa mais que a anterior (Tempo = 10) e a densidade de presas cresce em torno de 700 indivíduos (Tempo = 15).

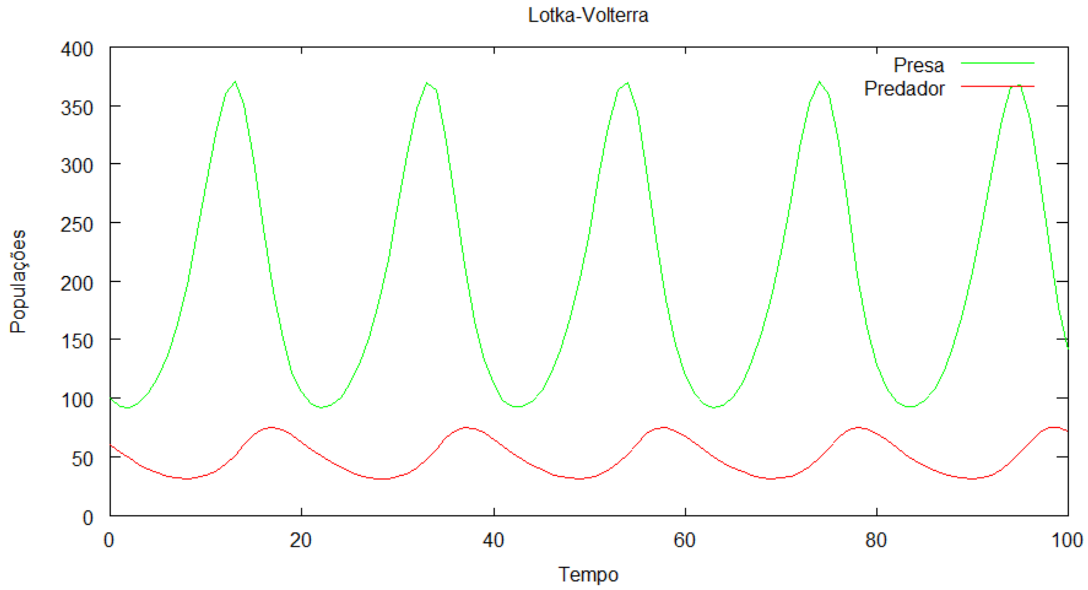

Gráfico 1 – obtido através do Octave. Ciclo de presa-predador. No sistema b=0.5, k1=0.01, k2=0.001, d=0.2 e h=1 e população inicial de (100,60).

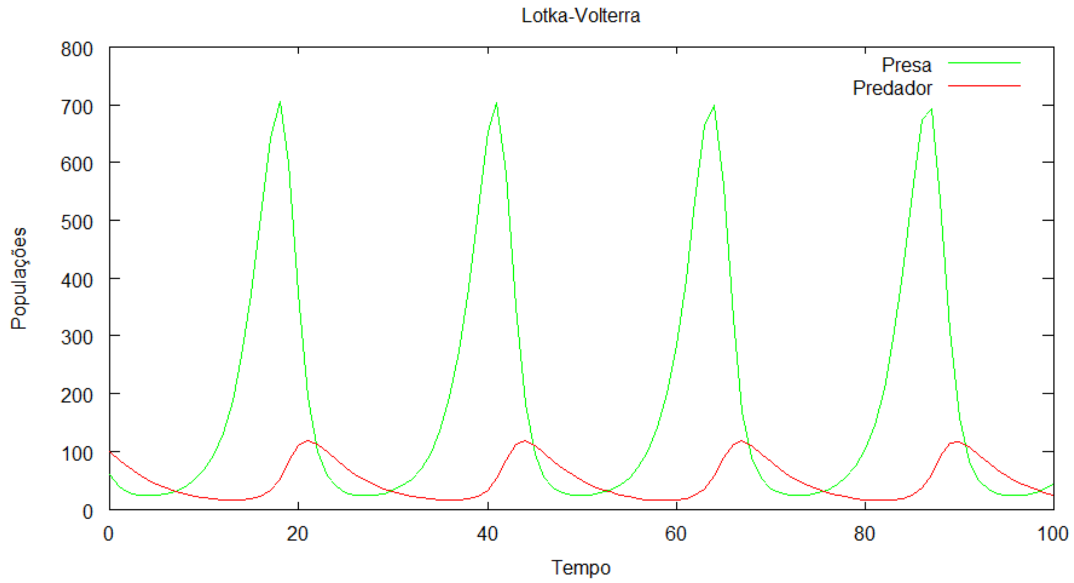

Gráfico 2 - obtido através do Octave. Ciclo de presa-predador. No sistema b=0.5, k1=0.01, k2=0.001, d=0.2 e h=1 e população inicial de (60,100).

Nos gráficos 3 e 4 (crescimento da presa x e do predador y), são representados por ciclos, que mantém o equilíbrio do sistema. Esses são planos de uma fase das populações.

No gráfico 3, as populações a partir do ponto inicial aumentam rapidamente, porque a população de presas é maior que a de predadores. Enquanto no gráfico 4 a população de predador diminui rapidamente por falta de presas e a de presas aumenta.

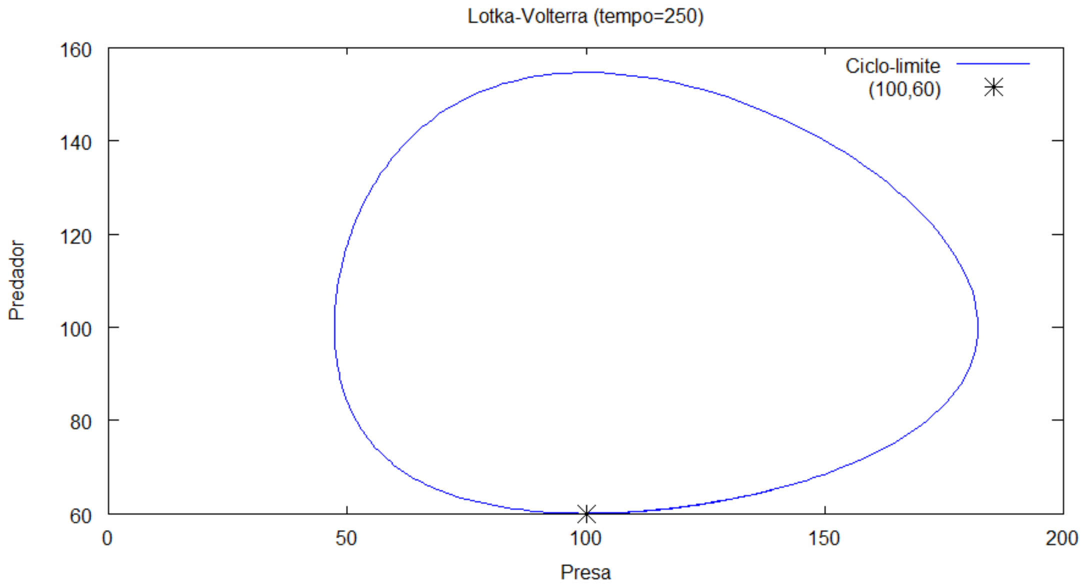

Gráfico 3 – obtido através do Octave. Plano de fase do modelo de Lotka-Volterra. É a variação da densidade predador em relação a presa. No sistema b=0.5, k1=0.01, k2=0.001, d=0.2, h=0.02 e a população inicial de (100,60).

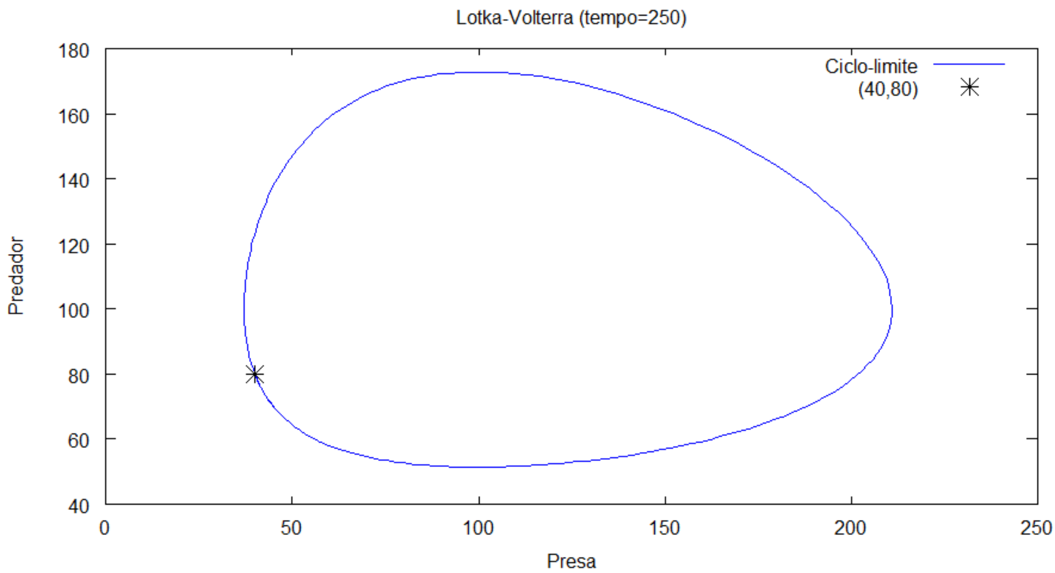

Gráfico 4 – obtido através do Octave. Plano de fase do modelo de Lotka-Volterra. É a variação da densidade predador em relação a presa. No sistema b=0.5, k1=0.01, k2=0.001, d=0.2, h=0.02 e a população inicial de (40,80).

O gráfico 5, mostra um plano de fases com diferentes condições iniciais.

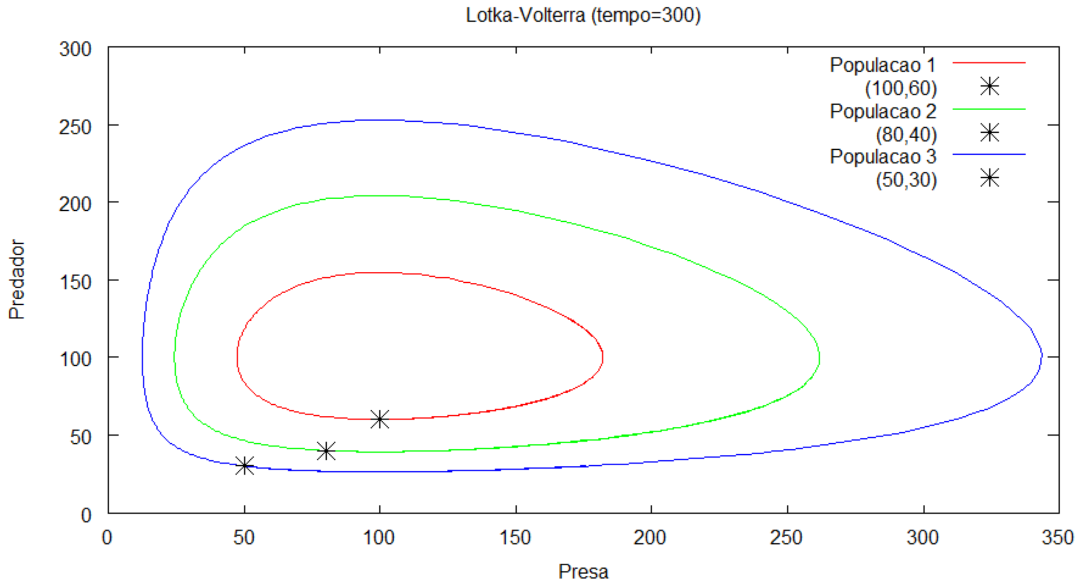

Gráfico 5 – obtido através do Octave. Plano de fases do modelo de Lotka-Volterra. Variação da densidade predador em relação a presa para 3 sistemas. No sistema b=2, k1=0.02, k2=0.01, d=1 e h=0.02 e populações iniciais de (100,60), (80,40) e (50,30) respectivamente.

A Densidade populacional de predadores e presas são pequenas e crescem, conforme o tempo, até um limite. Esse limite depende dos parâmetros estabelecidos. No limite de população de presa, a população de predadores está grande e esses exercem uma ação predatória maior, provocando uma diminuição nas presas. Quando essa população de presas baixa muito, a população de predadores também começa a cair, por falta de alimento, podendo até desaparecer (considerando que os predadores se alimentam exclusivamente dessas presas). E as equações ficam da seguinte forma:

$\dot{x} = bx$ (Ausência de Predador)

(11) $\dot{y} = -dy$ (Ausência de Presa)

Os gráficos foram obtidos na linguagem de alto nível Octave, muito usada na Computação Numérica [11]. Essa linguagem utiliza uma interface em forma de linha de comando e resolve tanto problemas lineares quanto não-lineares.

CONCLUSÃO

A Dinâmica de populações é uma área extensa e complexa. Na interação de espécies, dependendo do número de parâmetros e conforme o número de espécies em tratamento o sistema se torna mais complexo de calcular as taxa de aumento e diminuição das espécies.

Num primeiro momento, as taxas foram calculadas analiticamente, para o modelo simples do artigo [3] nesse é possível encontra várias soluções para o modelo. Essas soluções formam graficamente oscilações, onde o sistema pode ou não permanecer em equilíbrio. Podem também serem analisadas as diferenças entre os casos que ocorrem ou não amortecimento. Porém, essas equações tornam-se difíceis de serem obtidas por esse método.

Devido a essas dificuldades é mais vantajoso usar métodos numéricos para resolver as EDO’s. É usado uma função onde é implementado o método de Runge-Kutta. A partir da solução podemos analisar o comportamento das populações usando as soluções gráficas, feito nos Resultados.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Rizzi, Rogério Luís. Dinâmica de populações, Teoria. Disponível em: http://www.inf.unioeste.br/~rogerio/EDO-dinamica.populacional7.PDF.

[2] Monteiro, Luiz Henrique Alves. Sistemas Dinâmicos. Editora Livraria da Física, 2.ed. (2006).

[3] Wangersky, Peter J. e Cunningham, W. J. Time Lag in Prey-Predator Population Models. Ecology, vol. 38, nº 1 (1957).

[4] Modelagem Matemática de Sistemas Biológicos e de Lingüística, Sistemas Biológicos. Disponível em: http://milenio.impa.br/novo/portugues/areas_biomat.htm.

[5] Modelagem de Populações por Equações Diferenciais e por Mapas Discretos. LIBROSINTINTA.COM – Portal de Livros.

[6] Neto, Benedito Silva. Desenvolvimento sustentável: uma abordagem baseada em sistemas dissipativos. Ambiente & Sociedade, vol. XI, nº 1, p. 15-31 (jan.-jun. 2008).

[7] Fiedler-Ferrara, Nelson. e Prado, Carmen P. Cintra. Caos - uma Introdução, 1.ed. (1995).

[8] Savi, Marcelo Amorim. Dinâmica não-linear e Caos. Editora E-papers, 1.ed. (2006).

[9] Bassanezi, Rodney C. Uma introdução à Biomatemática. Minicurso da UFABC.

[10] Scalon, Vicente Luiz. Apostila Completa: Métodos Numéricos em Fluido-Térmica. Tópicos Especiais em Fluido-Térmica, UNESP (August. 2007).

[11] Eaton, John W. GNU Octave (Documentação octave). Copyright, 3.ed. (1997).

CRONOGRAMA EXECUTADO

Nº	Descrição	Ago 2011	Set	Out	Nov	Dez	Jan 2012	Fev	Mar	Abr	Ma i	Jun	Jul
1	Levantamento bibliográfico	x	x										
2	Estudo de Equações Diferenciais			x	x	x							
3	Estudo da Dinâmica Populacional						x	x	x				
4	Estudo do Programa (código fonte) Modelo Lotka-Volterra									x	x	x	
5	Elaboração do Resumo e Relatório Final (atividade obrigatória)											X	
6	Preparação da Apresentação Final para o Congresso (atividade obrigatória)												X