

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
DEPARTAMENTO DE APOIO A PESQUISA
PROGRAMA INSTITUCIONAL DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA

MODELAGEM DO MOVIMENTO DE PROJÉTEIS SOB EFEITO DA
RESISTÊNCIA DO AR

Bolsista: Antônia Rosa de Souza Picanço, FAPEAM

ITACOATIARA
2012

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
DEPARTAMENTO DE APOIO A PESQUISA
PROGRAMA INSTITUCIONAL DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA

RELATÓRIO PARCIAL
PIB – E – 0050-2011
MODELAGEM DO MOVIMENTO DE PROJÉTEIS SOB EFEITO DA
RESISTÊNCIA DO AR

Bolsista: Antônia Rosa de Souza Picanço, FAPEAM
Orientador: Profº Msc. Dilcelino de Souza Bruce

ITACOATIARA
2012

RESUMO

O presente estudo consiste na modelagem das equações de movimento de projétil quando este sofre influência da força de resistência do ar. Partindo da 2ª lei de Newton determinamos as equações de movimento ao considerar um corpo lançado com velocidade inicial V_0 e desprezando qualquer influência da atmosfera. Nessa perspectiva obtivemos nas equações de movimento o que podemos chamar de Ideal e, inicialmente, a modelagem foi feita com essas equações. A partir desses resultados incluímos a influência da força de resistência do ar no movimento para, numericamente, obtermos a solução dessas equações. Utilizamos neste trabalho a modelagem computacional através da linguagem de programação FORTRAN, sendo esta ferramenta fundamental para determinar a solução das equações de movimento, haja vista a complexidade encontrada nos cálculos analíticos. Ainda, com base no modelo parabólico de Galileu, fixamos determinada velocidade e a testamos para diferentes parâmetros de lançamento no lançamento de projéteis. A análise dos resultados inclui gráficos gerados a partir deste estudo.

Palavras chaves: Modelagem Computacional, Movimento de projéteis, Resistência do ar.

ABSTRACT

The present study is to model the equations of motion of the projectile when it is influenced by the force of air resistance. Starting from the 2nd law of Newton's equations of motion determined by considering a body thrown with initial velocity V_0 and neglecting any influence of the atmosphere. From this perspective we obtained the equations of motion we can call Ideal and, initially, the modeling was done with these equations. From these results include the influence of the force of air resistance in the movement to numerically obtain the solution of these equations. We use computer modeling in this work through the Fortran programming language, which is a fundamental tool to determine the solution of the equations of motion, given the complexity found in the analytic calculations. Still, based on Galileo's parabolic model, we set certain speed and tested for different launch parameters to launch projectiles. The results include graphs generated from this study.

Key words: Computational Modeling, Motion of projectiles, air resistance.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	6
2. O LANÇAMENTO DE PROJÉTEIS	7
2.1 O Método Científico Galileu	7
2.2. Forças de resistência do ar.....	8
2.3. Problema Físico	9
2.4. Método Numérico	11
3. METODOLOGIA.....	13
4. RESULTADOS.....	14
5. CONCLUSÃO.....	17
REFERÊNCIAS	18
APÊNDICE	19

1. INTRODUÇÃO

A capacidade humana de criar, através do conhecimento científico, mecanismos facilitadores a fim de compreender e modificar o espaço em que se vive ganha, ao longo dos anos, cada vez mais importância no contexto social. Transformações do meio físico por fenômenos ditos naturais – como o terremoto causado pela locomoção de placas tectônicas e que devastou parte da costa norte do Japão em março de 2011, não podem ser evitadas. Entretanto, a partir do momento em que o homem consegue identificar as causas de dado fenômeno passa a existir a possibilidade de antecipar-se a este com a estrutura física das construções (casas, prédios, por exemplo) mais resistente aos impactos. Dessa maneira, pretende-se amenizar os efeitos negativos no local marcado para a devastação. O tremor de 2011 no Japão ocasionou tsunamis com ondas de até 10 metros (Brasil escola). Por traz de todo esse processo, desde a identificação das causas da catástrofe até a elaboração de projetos para construções com estruturas mais resistentes, encontra-se a *pesquisa*.

No cotidiano, de modo geral, não é difícil encontrar situações em que a ciência fundamentada na física intervém de modo significativo nas relações do homem com o meio. E é justamente através da pesquisa que a física enquanto ciência proporciona a passagem de simples resultados para resultados mais significativos. Um ciclista, um corredor, um piloto de corrida automobilística, ou ainda diversas atividades que sofrem influência da atmosfera em seus movimentos podem ter seus resultados melhorados a partir dessas investigações. Analisando o movimento de projéteis, determinar suas equações permite identificar quais fatores influenciam em sua trajetória e a partir dessas análises e informações criar meios para se chegar a resultados mais expressivos nas inúmeras situações que permeiam a vida das pessoas. Estudos dessa natureza têm ganhado cada vez mais importância no meio científico. Podemos mencionar a aerodinâmica dos carros. Com o avanço da tecnologia e aprofundamento da física ocorre numa corrida automobilística, por exemplo, o desafio das grandes construtoras de desenvolver modelos cada vez mais aerodinâmicos.

2. O LANÇAMENTO DE PROJÉTEIS

Falar em lançamento de projéteis é falar da física relacionada aos movimentos, a dinâmica. Esta é a parte da física que se preocupa, basicamente, em determinar como se move uma partícula quando esta sofre a ação de uma força.

A resolução das equações de movimento é considerada a partir da análise das forças atuantes. Quando um projétil lançado sofrer influência de forças simples, caso limite em que a viscosidade do meio é muito pequena, pode-se recorrer ao método analítico de resolução; porém, se a força considerada for de maior complexidade – a resistência do ar, por exemplo, suas equações de movimento são solucionadas a partir de métodos numéricos.

Consideremos um corpo lançado verticalmente, desprezando as forças de resistência do ar. Ao determinar as equações de movimento, obtém-se o que podemos chamar de *Ideal*. Essa abordagem clássica do movimento de projéteis permite solucionar o problema e, assim, chegar ao tempo de vôo, alcance, altura máxima e equação da trajetória. A aceleração de um objeto é diretamente proporcional à força resultante atuando sobre ele, tem o mesmo sentido que essa força e é inversamente proporcional à massa do objeto [2]. Dessa maneira, as equações de movimento são obtidas através da 2ª lei de Newton, onde o somatório de todas as forças atuantes em um corpo é igual ao produto da massa pela aceleração a que está submetido o corpo, de acordo com (I),

$$\sum F = m \frac{d^2r}{dt^2}. \quad (I)$$

No entanto, ao se tratar do estudo dos movimentos aproximando-se da realidade é imprescindível não deixar de considerar a influência que a atmosfera exerce sobre estes.

2.1 O Método Científico Galileu

Nos seus primeiros experimentos Galileu mostrou que, desprezando as forças de resistência do ar, o intervalo de tempo na queda de um corpo abandonado de determinada altura independe de sua massa. Nesse sentido, se dois corpos de massas diferentes forem soltos do mesmo ponto ambos chegarão juntos ao chão.

O desenvolvimento do método científico Galileu, tomou grandes proporções no estudo do movimento balístico, principalmente na I guerra mundial com a parte experimental e a efetivação do modelo teórico. Verificou-se que, no lançamento de projéteis, há uma parábola de segurança para diferentes parâmetros de lançamento, o que facilita a identificação da zona de risco num disparo seqüencial de mísseis, por exemplo. Numa seqüência de disparo em que α é o ângulo de lançamento variando entre 0° e 180° formam-se várias trajetórias parabólicas cuja velocidade de disparo V_0 é comum entre si. Uma parábola maior denominada *Parábola de Segurança* (PS) envolve externamente essa seqüência de parábolas.

Essa PS – analisada sob aspectos característicos, delimita no plano xy todos os pontos externos que os disparos não alcançarão, delimitando a zona de segurança e a zona de risco.

2.2. Forças de resistência do ar

Outro aspecto preponderante ao movimento de projéteis é a força de *Resistência do Ar* (RA). Vários fatores influenciam na trajetória de um projétil na atmosfera [6]. Um corpo abandonado de determinada altura, devido à ação da força peso seu movimento é acelerado na direção vertical para baixo. Contudo, existe outra força atuando no movimento, de sentido contrário e provocada pela resistência do ar. Logo, o movimento será retardado e a variação dessa segunda força depende de alguns fatores. É preciso ressaltar que além de depender da velocidade do objeto, a força de resistência do ar depende também da sua forma e da sua maior secção transversal em relação à direção do movimento [3].

Entender o movimento de projeteis sob resistência do ar possibilitou a modelagem do desenho em carros e caminhões. Os modelos mais aerodinâmicos são os que se aproximam do formato de uma gota de chuva. As indústrias automobilísticas vêm desenvolvendo veículos dessa categoria. Se observarmos os modelos comercializados há algumas décadas, por exemplo, nota-se o formato quadrado dos automóveis daquela época. Na atualidade, os modelos são produzidos com formatos mais ovais. Isso se deve à busca por melhor desempenho de automóveis. Mas, o que é aerodinâmica? A Aerodinâmica relaciona-se ao estudo dos corpos que se movem dentro de um fluido (ar, gases e outros). Para nível de entendimento, a força de resistência do ar pode ser comparada a situação

de um muro no qual um carro movimenta-se em direção. Esse muro impede o veículo de atravessar. É dessa maneira que funciona com o vento, forma-se uma barreira contrária ao movimento pela qual o carro precisa passar. Para obter melhores resultados, a aerodinâmica busca modelos de veículos que são capazes de cortar essa barreira criada, obtendo menor atrito possível com ar.

2.3. Problema Físico

Inicialmente consideramos um modelo que leve em conta um projétil padrão, o qual consiste em uma esfera lisa de massa m e diâmetro d . Modernamente podemos escrever que a intensidade da força de resistência do ar, para fluídos de baixas intensidades, é da seguinte maneira

$$F_D = \frac{1}{2} C_D A \rho v_r^2. \quad (II)$$

onde, v_r é a velocidade do corpo em relação ao fluido, ρ é a densidade do fluido, A é a área do corpo projetada na direção do fluxo de ar e C_D é o coeficiente de arraste. Na figura III, vemos o diagrama de forças que atuam em um projétil movendo-se no ar, juntamente com a velocidade v do projétil em relação ao solo, a velocidade ω do vento, e a velocidade relativa v_r . As componentes cartesianas da velocidade relativa são: $v_{rx} = v_x - \omega_x$ e $v_{ry} = v_y - \omega_y$

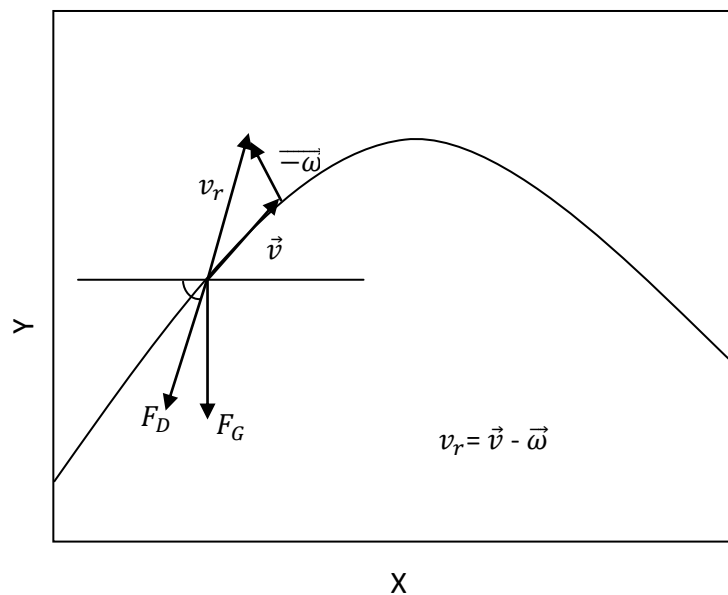


Figura 1-Diagrama das forças de arraste e gravitacional, velocidade do projétil, velocidade do vento e velocidade relativa.

Observando a figura I, as equações do movimento são estabelecidas como:

$$ma_x = -F_D \cos(\theta) = -F_D(v_x - \omega_x)/v_r \quad (\text{III})$$

$$ma_y = -F_D \sin(\theta) = -F_D(v_y - \omega_y)/v_r - F_G \quad (\text{IV})$$

onde F_G é a intensidade da força gravitacional dada por: $F_G = \frac{mg}{(1+y/R_T)^2}$

Sendo, R_T o raio da terra, g a aceleração da gravidade na superfície, m é a massa do projétil e y é a posição vertical do projétil acima da superfície da Terra. Utilizando as equações (III) e (IV), temos as seguintes equações:

$$a_x = -\left(\frac{\pi d^2}{8m}\right) C_D \rho v_r (v_x - \omega_x) \quad (\text{V})$$

$$a_y = -\left(\frac{\pi d^2}{8m}\right) C_D \rho v_r (v_y - \omega_y) - \frac{g}{(1+y/R_T)^2} \quad (\text{VI})$$

O Desenvolvimento de (V) e (VI) é verificado no apêndice B.

Na maioria das simulações do movimento de projéteis, as equações (V) e (VI), são resolvidas, considerando C_D e ρ constantes [4]. Contudo sabemos, que a densidade do ar decresce com a altitude e, certamente para lançamentos com grandes altitudes, devemos levar em conta tal variação. Neste momento adotamos uma atmosfera isotérmica com densidade variável dada pela seguinte equação:

$$\rho_{(y)} = \rho_0 \exp(-ay) \quad (\text{VII})$$

onde consideraremos neste momento $\rho_0 = 1,225 \text{ kg/m}^3$ e $a = 0,00013 \text{ m}^{-1}$. O coeficiente de arraste C_D depende da geometria do projétil da rugosidade de sua superfície e da velocidade relativa do mesmo. Para uma esfera lisa, os dados experimentais mostram uma grande variação do coeficiente de arraste com o número de Mach, $M = v_r/v_s$, onde v_s é a velocidade do som no ar, na figura (2) mostramos os dados experimentais C_D para uma esfera lisa, da qual ajustou-se um polinômio que possibilitasse medir o C_D .

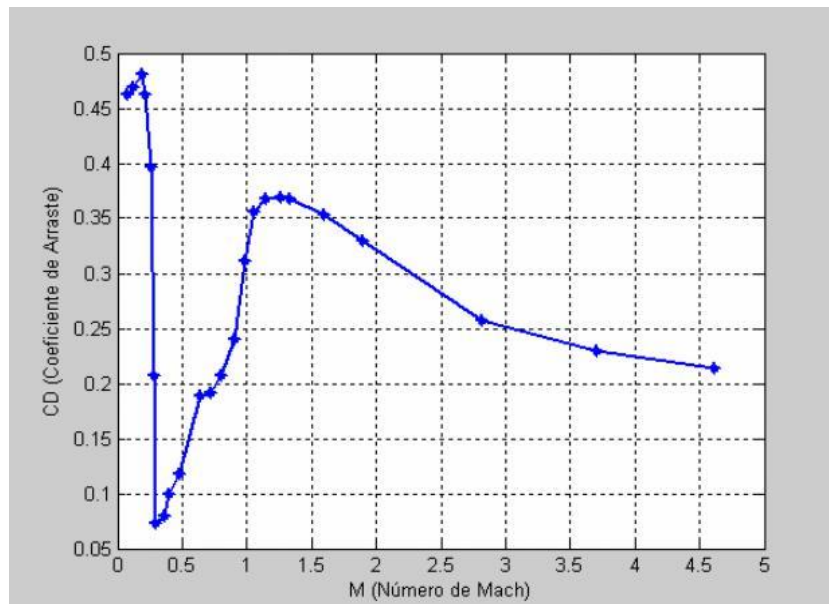


Figura 2- Gráfico do ajuste do coeficiente de arraste C_D em função do número de Mach (M)

Partindo de (I) e desconsiderando a força de resistência do ar, as equações de movimento são dadas como:

$$x(t) = v_0 \cos \theta \cdot t \quad (\text{VIII})$$

$$y(t) = v_0 \sin \theta \cdot t - g \cdot \frac{t^2}{2} \quad (\text{IX})$$

O tempo necessário para alcance máximo ocorre no momento em que $y = 0$

Da eq. (IX):

$$t = 0 \quad \text{ou} \quad t = 2 \frac{v_0 \sin \theta}{g}$$

Substituindo $t = 2 \frac{v_0 \sin \theta}{g}$ em (VIII) temos o x_{\max} :

$$x_{\max} = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g} \quad (\text{X})$$

Podemos escrever a eq. da trajetória em função de x fazendo de (VIII) $t = \frac{x}{v_0 \cos \theta}$ e substituindo em (IX). Assim:

$$y = x \tan \theta - g \frac{x^2}{2(v_0 \cos \theta)^2} \quad (\text{XI})$$

2.4. Método Numérico

Existe uma variedade de linguagens de programação (LP) que podem ser utilizadas para construção de uma modelagem. Neste projeto vamos usar a análise de base como programação estruturada, da qual decompomos uma tarefa em tarefas menores. Um programa é uma coleção de funções que são chamadas sucessivamente por uma função principal de um programa. A mais antiga e popular LP é o FORTRAN e será utilizada neste projeto.

Em muitos problemas de Ciências e Engenharia há necessidade de se determinar um número α tal que $f(x)$ seja zero, ou seja, $f(\alpha) = 0$. Este número é chamado de raiz da equação $f(x) = 0$ ou zero da função $f(x)$. As equações algébricas de 1º e 2º graus e certas classes de equações transcendentais podem ter suas raízes computadas exatamente através de métodos analíticos, mas para polinômios de grau superior e para a grande maioria das equações transcendentais o problema só pode ser resolvido por métodos que aproximam as soluções [5].

Embora estes métodos não forneçam raízes exatas, elas podem ser calculadas com a exatidão que o problema requeira, desde que certas condições sobre f sejam satisfeitas. Para se calcular uma raiz duas etapas devem ser seguidas:

a) Isolar a raiz, ou seja, achar um intervalo $[a,b]$, o menor possível, que contenha uma e somente uma raiz da equação $f(x) = 0$.

b) Melhorar o valor da raiz aproximada, isto é, refiná-la até o grau de exatidão requerido.

Há inúmeros métodos para achar uma raiz de uma função pelo método numérico como o método de Newton-Raphson, Bisseção e Range-Kutta. No caso do método de Newton-Raphson, que é um caso particular do método do ponto fixo, a idéia do método do ponto fixo consiste em estabelecer uma equivalência:

$$f(x) = 0 \leftrightarrow x = g(x) \quad (\text{XII})$$

Assim, dada uma aproximação inicial x_0 , a fórmula iterativa é dada por:

$$x_{k+1} = g(x_k), k = 0, 1, \dots \quad (\text{XIII})$$

Designando $g(x)$ como função iteradora.

Por outro lado, se a função $f(x)$ é contínua no intervalo $[a,b]$ e tal que $f(a).f(b) < 0$, mostrando que neste intervalo tem-se pelo menos uma raiz. O método da bissecção consiste em reduzir a amplitude do intervalo que contém a raiz até se atingir a precisão requerida, usando para isto a sucessiva divisão de $[a,b]$ ao meio.

O método Range-Kutta consiste na estimativa do valor da função $dy/dt = f(t, y)$ em vários pontos intermediários. O ponto final (escolhido) será a média ponderada entre esses pontos intermediários. Este método é baseado na série de Taylor e sua ordem será definida pela ordem desta série. O Range-Kutta4 implementado é de quarta ordem global, o qual produz valores bastante precisos, dada a condição inicial $y(t_0) = y_0$, para isto, as aproximações são dadas pelas equações abaixo.

(XIV)

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, y_n) \\ k_2 &= hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right) \\ k_3 &= hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right) \\ k_4 &= hf(x_n + h, y_n + k_3) \end{aligned}$$

$$K_n = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$y_{n+1} = y_n + K_n$$

onde h é o tamanho do passo na direção do eixo x .

Pelo método de Range-Kutta a velocidade e a posição são dadas por:

(XV)

$$v_{n+1} = v_n + \frac{1}{6}K_n$$

$$X_{n+1} = X_n + (v_n + \frac{1}{6}(k_1 + k_2 + k_3))\Delta t$$

onde,

(XVI)

$$k_1 = a(t_n, v_n, x_n)\Delta t$$

$$k_2 = a\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, x_n + \frac{\Delta t}{2}v_n, v_n + \frac{k_1}{2}\right)\Delta t$$

$$k_3 = a\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, x_n + \frac{\Delta t}{2}v_n + v_n\frac{k_1}{4}, v_n + \frac{k_2}{2}\right)\Delta t$$

$$k_4 = a\left(t_n + \Delta t, x_n + \Delta tv_n + \Delta t\frac{k_2}{2}, v_n + k_3\right)\Delta t$$

Para a simulação das equações (VII), como já mencionado será adotado que a densidade do ar ρ variável.

O método de Range-Kutta foi utilizado neste trabalho devido sua precisão e rápida convergência para uma dada função.

3. METODOLOGIA

Mediante um dado problema físico, é possível reproduzir dados experimentais e obter informações adicionais, resolvendo numericamente as equações de movimento, por exemplo. Na modelagem computacional permite-se variar livremente os parâmetros usados, e de imediato comprovar ou não modelos teóricos. A linguagem de programação Fortran foi utilizada neste trabalho. Inicialmente criamos um programa para determinar a trajetória de um projétil lançado com determinada velocidade, desconsiderando a resistência do ar. Em seguida, obedecendo ao modelo parabólico de Galileu fixamos uma velocidade e testamos para diferentes ângulos de lançamento. Num segundo momento, modelamos a equação da

trajetória de um projétil lançado, considerando a força de resistência do ar e vários outros fatores que influenciam na sua trajetória.

4. RESULTADOS

Simulamos numericamente em programa computacional a equação da trajetória (XI) através do programa descrito no Apêndice C-1, levando em consideração uma bola de futebol. Através desse programa é possível verificar o alcance máximo do projétil (X_{max}) e o tempo de voo (t_v), bem como a trajetória parabólica formada para o lançamento com qualquer ângulo e velocidade estipulados. Na figura 3 o gráfico de um projétil lançado com velocidade inicial 376 m/s e ângulo de lançamento com a horizontal 45° . Verificamos que $t_v = 2.8861501s$ e $x_{max} = 40.816326m$.

O uso da velocidade de disparo nas duas situações estudadas – com e sem resistência do ar, é em virtude de dados experimentais do canhão 105 mm utilizado na II guerra mundial e por ser um dos obuses cujo alcance e precisão superam todos os anteriores.

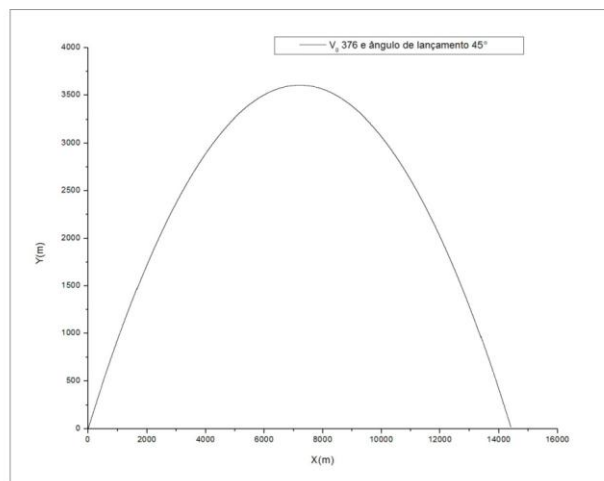


Figura 3- gráfico do lançamento de projétil com $V_0 376m/s$ e $\theta = 45^\circ$

Variamos o ângulo de lançamento de 0° a 90° no programa. Conforme figura 4 verificamos para cada ângulo o gráfico de trajetórias parabólicas delimitando a *área de risco*, conforme o modelo teórico da parábola de segurança.

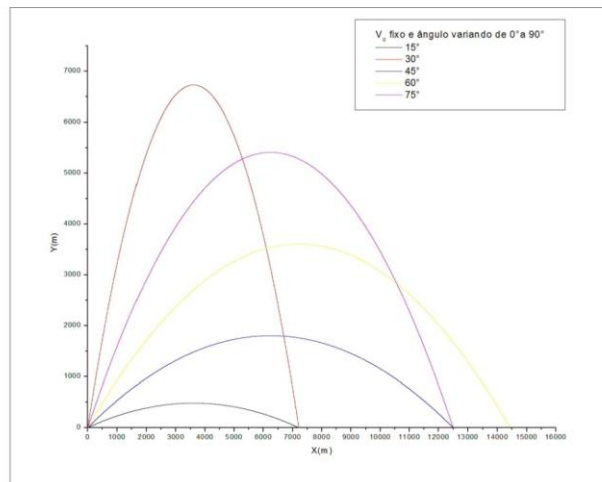


Figura 4- gráfico da família de Parábolas sem resistência do ar com V_0 comum entre si e θ variando $0^\circ < \theta < 90^\circ$

Na modelagem das equações de movimento levando em consideração o coeficiente de arraste C_D utilizamos a simulação computacional para o disparo da bala de canhão, cuja massa considerada é 14, 980 kg e diâmetro 0,105 m. A densidade utilizada é em função da altitude em relação ao do nível do mar. Na medida em que aumenta a altitude diminui a densidade do ar, [10] a partir de 36.220m de altitude a densidade da atmosfera é nula, significando que o projétil não fica mais sujeito à força de arraste, por outro lado esta densidade adquire o valor máximo em $y = 0$, correspondendo a densidade do ar (ρ) ao nível do mar e a temperatura de 15° ($\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$). O programa para resolver as equações de movimento – equações (V) e (VI), que leva em consideração da força de resistência do ar, encontra-se no apêndice C-2. Variando o coeficiente de arrasto C_D o alcance máximo na horizontal foi 8969.1m, figura 5.

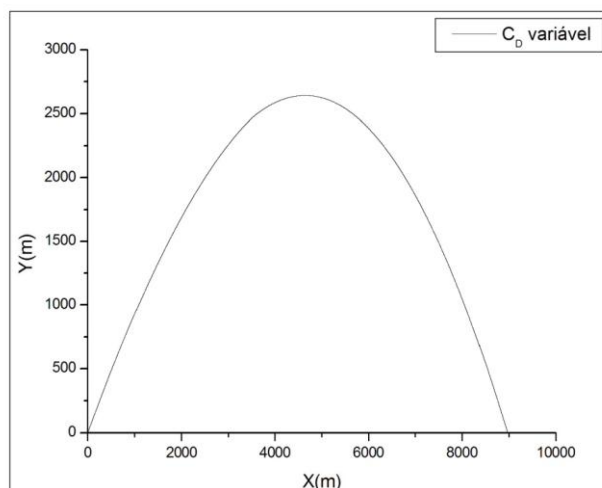


Figura 5- Disparo de canhão com C_D variável, $V_0 = 376$ e $\theta = 45^\circ$

Para romper a frente de onda emitida pelo movimento do objeto a velocidade do projétil precisa ser maior que a velocidade do som. A razão da velocidade do objeto pela velocidade do som é o número de *Mach* e podemos analisar em velocidades subsônicas para as condições em que $M < 1$; supersônica para $M > 1$ e hipersônica as que ultrapassam $M > 5$. Considerando a velocidade do vento muito pequena, desprezível e usando uma velocidade próxima à do som, o número de *Mach* (M) ficou muito próximo de 1. Na figura 6 o gráfico apresenta comparativo entre o disparo de canhão com C_D variável ($x_{max} = 8969.1m$) e, para as mesmas condições - $V_0=376$ m/s e ângulo 45° , C_D fixo ($x_{max}=2153,8m$). Notamos que, variando C_D , há maior alcance horizontal. Isso decorre pelo fato de a força de arraste acoplar na bala de canhão e impulsionar seu movimento, diferentemente do que ocorre quando C_D é fixo.

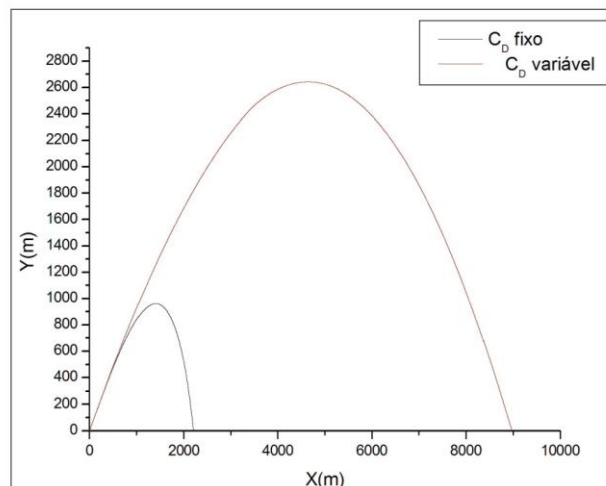


Figura 6- Disparo de canhão com CD fixo e variável

Na tabela 1 comparamos os resultados da figura 7 com os pontos experimentais da referência [12] para o disparo do canhão 105 mm, cuja as velocidades são 198, 238, 311, 472 m/s.

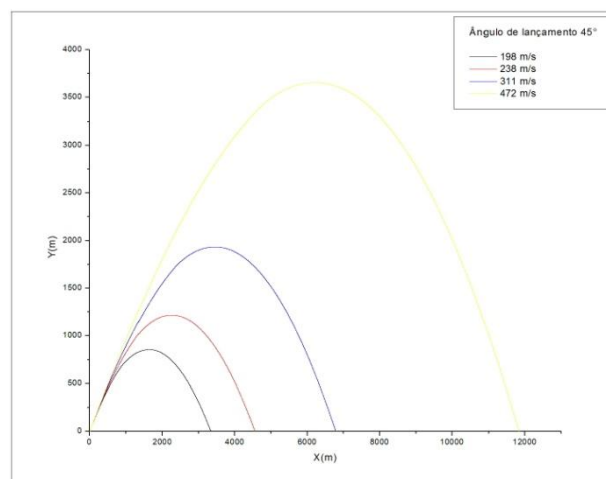


Figura 7- gráfico das trajetórias com teta 45° e velocidades de disparo diferentes.

Tabela 1 – comparativa entre os resultados calculados no programa e os resultados de um projétil disparado de um canhão 105 mm.		
$V_0 = 198 \text{ m/s}$	RK4	Ref. [12]
θ_{max}	45°	45°
$x_{max}(\text{m})$	3338,3	3603,9
$V_0 = 238 \text{ m/s}$	RK4	Ref. [12]
θ_{max}	45°	45°
$x_{max}(\text{m})$	4555,7	5006,61
$V_0 = 311 \text{ m/s}$	RK4	Ref. [12]
θ_{max}	45°	43,1°
$x_{max}(\text{m})$	6787,1	7915,0
$V_0 = 472 \text{ m/s}$	RK4	Ref. [12]
θ_{max}	45°	44,2°
$x_{max}(\text{m})$	11835,5	11303,7

5. CONCLUSÃO

A resolução numérica das equações de movimento realizada neste trabalho nos possibilitou verificar, graficamente, a Parábola de Segurança para o lançamento seqüencial no ideal do lançamento de projéteis (sem a influência da atmosfera). Foi possível analisar como o disparo de um projétil – a bala de canhão, é sujeito à condição atmosférica e comparar seus resultados com dados experimentais do obus 105 mm. O coeficiente de arrasto C_D variável usado no disparo forneceu maior alcance na horizontal do que C_D fixo. Comparamos os resultados obtidos com dados experimentais e constatamos que os resultados foram próximos. As simulações sensíveis as condições de resistência do ar só poderiam ser feitas em laboratórios muito bem equipados, o que tornaria o desenvolvimento do projeto inviável, no entanto, simulações e modelagens via computação cada vez mais estão sendo incorporados e consolidados. As simulações exercem um importante papel como ferramenta pedagógica, pois elas fornecem uma alternativa educacional para elucidação de conceitos.

REFERÊNCIAS

- [1] FREITAS, S. R. Métodos Numéricos. Mato Grosso do Sul: Departamento de Computação e estatística, 2000. 224 pag.
- [2] Gonzatti, Sônia Elisa Marchi. Um curso introdutório à astronomia para a formação inicial de professores de ensino fundamental, em nível médio / Sônia Elisa Marchi Gonzatti, Maria de Fátima O. Saraiva, Trieste Freire Ricci. – Porto Alegre: UFRGS, Instituto de Física, 2008.
- [3] Grupo de Reelaboração do Ensino de Física. Física 1: Mecânica / GREF. 7ª ed. – São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2001.
- [4] Justino Fazuri e J Mauricio O Matos,(1998), Estudo Numérico do Movimento de Projéteis, Revista Brasileira de Ensino de Física vol. 4.
- [5] Richard L., Numerical Analysis, Editora PWS PUBLISHING COMPANY, Quinta edição, Boston-1985.
- [6] Fundamentos de Mecânica. Cinemática leis de Newton. Vol.1.
- [7] Ruggiero, Marcia A. Gomes. Calculo numérico: aspectos teóricos e computacionais / Márcia A. Gomes Ruggiero, Vera Lúcia da Rocha Lopes. – 2.ed. – São Paulo: MAKRON Books, 1996.
- [8] TIPLER, P. A. Física, vol. 1, Ed. Guanabara Dois, 1980.
- [9] Francisco, Wagner Cerqueira e. O TERREMOTO NO JAPÃO. Disponível em: <www.brasilecola.com/japao/o-terremoto-no-japao.htm> Acesso em: 10 de junho de 2012.
- [10] Gelano, Emerson L. & Gelamo, Rogério V. ESTUDO DE LANÇAMENTO REAIS DE PROJÉTEIS UTILIZANDO PLANILHAS DE CÁLCULO. Disponível em: <inseer.ibict.br/betrl/index.php/betrl/article/viewPDFInterstitial/3/2> Acesso em 9 de julho de 2012.
- [11] Portal São Francisco. RESISTÊNCIA DO AR. Disponível em: <www.portalsaofrancisco.com.br/alfa/resistencia-do-ar/resistencia-do-ar.php> Acesso em 09 de dezembro de 2011.
- [12] Tabela de Tiro do Obus de 105 mm, Aberdeen, Maryland, abril-maio, (1941)

APÊNDICE

A – Equações da trajetória no lançamento de projéteis sem a resistência do ar.

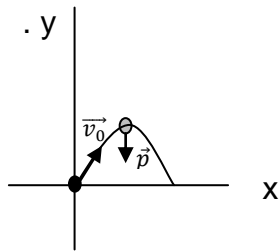


Figura I – Coordenadas cartesianas de um corpo lançado com velocidade inicial V_0 .

De acordo com Newton, o somatório das forças atuantes sobre um corpo é igual ao produto da massa pela aceleração.

$$\sum F = m \frac{d^2 r}{dt^2}$$

Quando a partícula atinge altura máxima:

- Na direção x:

$$F_x = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$0 = m \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right)$$

$$m \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = cte \quad (I)$$

Integrando (I)

$$\int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dx}{dt} dt = cte \int_0^t dt$$

$$x(t) = x(0) + cte \cdot t$$

- Na direção y:

$$F_y = m \frac{d^2 y}{dt^2}$$

$$-mg = m \frac{d^2 y}{dt^2}$$

$$-g = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} \right) = -g \quad (II)$$

Integrando (II)

$$\int \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} \right) dt = -g \int dt$$
$$\frac{dy}{dt} = -gt + c_1 \quad (\text{III})$$

No instante $t = 0$ encontra-se $\frac{dy}{dt} = v_{0y}$, logo:

$$v_{0y} = c_1$$

Integrando (III)

$$\int_{y(0)}^{y(t)} \frac{dy}{dt} dt = \int_0^t (-gt + v_{0y}) dt$$
$$y(t) = y(0) + v_{0y} \cdot t - g \cdot \frac{t^2}{2}$$

B - Equações da trajetória no lançamento de projéteis com a resistência do ar.

De modo geral, para fluidos de baixa intensidade a força de resistência do ar pode ser descrita como:

$$F_D = \frac{1}{2} C_D A \rho v^2. \quad (\text{I})$$

Para calcular o caminho do projétil com resistência do ar, é preciso conhecer as forças que atuam sobre o projétil. Sabemos que a gravidade sempre age verticalmente para baixo sobre o projétil. A resistência do ar cria uma força, que está sempre na direção oposta à velocidade, chamamos aqui de F.

De acordo com a equação de Newton:

$$\sum F = ma$$

As componentes nas direções x e y:

$$\sum F_{Dx} = ma_x$$

$$\sum F_{Dy} = ma_y + F_G$$

Na direção x a força atuante consiste na força peso, massa vezes a aceleração.

$$\sum F_{Dx} = -ma_x$$

$$F_{Dx} = F_D \cos \theta$$

$$F_{Dx} \cos \theta = -ma_x$$

$$\cos \theta = \frac{v_{rx}}{v_r}$$

$$F_D \frac{v_{rx}}{v_r} = -ma_x$$

$$F_D \frac{(v_x - \omega_x)}{V_r} = -ma_x$$

$$F_D = -\frac{ma_x v_r}{(v_x - \omega_x)} \quad (\text{II})$$

Na direção y a força da gravidade F_G também compõe o diagrama de forças

$$\sum F_{Dy} = -ma_y - F_G$$

$$F_{Dy} = F_D \sin \theta$$

$$F_D \sin \theta = -ma_y - F_G$$

$$\sin \theta = \frac{v_{ry}}{v_r}$$

$$F_D \frac{v_{ry}}{v_r} = -ma_y - F_G$$

$$F_D \frac{(v_y - \omega_y)}{V_r} = -ma_y - F_G$$

$$F_D = -\frac{(-ma_y - F_G)v_r}{(v_y - \omega_y)} \quad (\text{III})$$

Igualando as equações (II) na direção x e (III) na direção y com a equação (I), temos, respectivamente:

$$a_x = -\left(\frac{\pi d^2}{8m}\right) C_D \rho v_r (v_x - \omega_x) \quad (\text{IV})$$

$$a_y = -\left(\frac{\pi d^2}{8m}\right) C_D \rho v_r (v_y - \omega_y) - \frac{g}{(1+y/R_T)^2} \quad (\text{V})$$

C – Programas em linguagem Fortran para resolver as equações da trajetória.

1. Sem Resistência do Ar

```

program obliquo
real*4 vo, y, x, R, t, conv, pi, theta, teta
parameter (g=9.8)
open (1, file='out.dat', status='unknown')
write(*, *) 'escreva o valor vo e teta', vo, teta
read(*, *) vo, teta
theta=teta*acos(-1.0)/180 !regra de tres pra converter em
radianos
t=2*vo*sin(theta)/g
R=vo**2*sin(2*theta)/g
print*, R, t
do x=0, R, 0.1

```

```

y=tan(theta)*x-(g/(2*vo**2*cos(theta)**2))*x**2
write(1,*)y,x
end do
end program

```

2. Com resistência do ar

```

program RK4_CD_VARIAVEL
real*8 x,y,m,x0,y0,d,v0,theta,wx,wy,PM,Cd,Rt,a,t,b,Vs,Vx,&
Vy,ax,ay,V1r,V1x,V1y,a1x,a1y,V2r,V2x,V2y,a2x,a2y,V3r,V3x,V3y,&
a3x,a3y,V4r,V4x,V4y,a4x,a4y
parameter (g=9.81,pi=acos(-1.0))
integer n, i
Rt=40000000 !raio aproximado da Terra [m]
Rz=1.225 !densidade do ar [kg/m.m.m]
d=0.105 !diâmetro da projétil [m]
m=14.980 !massa do projétil [Kg]
wx=0 !componente da velocidade do vento [m/s]
wy=0 !componente da velocidade do vento [m/s]
x=0 !Posição inicial na horizontal [m]
y=0 !Posição inicial na vertical [m]
Vs=340 !velocidade do som (X) [m]
vo=376 !Veloc. de disparo [m/s]
theta=45.1*pi/180 !ângulo de lançamento [radianos]
t=0
h=0.001
n=10000000
vx=vo*cos(theta)
vy=vo*sin(theta)
p=0
open(unit=10,file="canhao_45.dat")
do i=1,n
do while (p.ne.1)
x1=x
y1=y
v1x=vx
v1y=vy
v1=sqrt(v1x**2+v1y**2)

PM=v1x/Vs
if (PM.lt.0.03) then
cd=0.5
else if (PM.ge.0.03.and.PM.lt.0.23) then
cd=-778.58*(PM**5)+2536.15*(PM**4)-186.62*(PM**3)-11.78*&
(PM**2)+1.79*(PM)+0.46
else if (PM.ge.0.23.and.PM.lt.0.60) then
cd=0.52*(PM**2)-0.009*(PM)+0.07
else if (PM.ge.0.60.and.PM.lt.1) then
cd=2.42*(PM**3)-4.58*(PM**2)+2.93*(PM)-0.43
else if (PM.ge.1.and.PM.lt.2) then
cd=0.45*(PM**5)-4.21*(PM**4)+15.23*(PM**3)-26.98*(PM**2)+23.42*(PM)-
7.58
else if (PM.ge.2.and.PM.lt.6) then
cd=0.45/(PM+0.13)

```

```

end if
a1x=-(pi*(d**2)/(8*m))*Cd*Rz*exp(-0.00013*y1)*v1*(v1x-wx)

PM=V1y/Vs
if (PM.lt.0.03) then
cd=0.5
else if (PM.ge.0.03.and.PM.lt.0.23) then
cd=-778.58*(PM**5)+2536.15*(PM**4)-186.62*(PM**3)-11.78*&
(PM**2)+1.79*(PM)+0.46
else if (PM.ge.0.23.and.PM.lt.0.60) then
cd=0.52*(PM**2)-0.009*(PM)+0.07
else if (PM.ge.0.60.and.PM.lt.1) then
cd=2.42*(PM**3)-4.58*(PM**2)+2.93*(PM)-0.43
else if (PM.ge.1.and.PM.lt.2) then
cd=0.45*(PM**5)-4.21*(PM**4)+15.23*(PM**3)-26.98*(PM**2)+23.42*(PM) -
7.58
else if (PM.ge.2.and.PM.lt.6) then
cd=0.45/(PM+0.13)
end if
a1y=-(pi*(d**2)/(8*m))*Cd*Rz*exp(-0.00013*y1)*v1*(v1y-wy)-&
(g/(1+y1/Rt)**2)
x2=x+v1x*h/2
y2=y+v1y*h/2
v2x=vx+a1x*h/2
v2y=vy+a1y*h/2
v2=sqrt(v2x**2+v2y**2)
!
PM=V2x/Vs
if (PM.lt.0.03) then
cd=0.5
else if (PM.ge.0.03.and.PM.lt.0.23) then
cd=-778.58*(PM**5)+2536.15*(PM**4)-186.62*(PM**3)-11.78*&
(PM**2)+1.79*(PM)+0.46
else if (PM.ge.0.23.and.PM.lt.0.60) then
cd=0.52*(PM**2)-0.009*(PM)+0.07
else if (PM.ge.0.60.and.PM.lt.1) then
cd=2.42*(PM**3)-4.58*(PM**2)+2.93*(PM)-0.43
else if (PM.ge.1.and.PM.lt.2) then
cd=0.45*(PM**5)-4.21*(PM**4)+15.23*(PM**3)-26.98*(PM**2)+23.42*(PM) -
7.58
else if (PM.ge.2.and.PM.lt.6) then
cd=0.45/(PM+0.13)
end if
a2x=-(pi*(d**2)/(8*m))*Cd*Rz*exp(-0.00013*y2)*v2*(v2x-wx)
!
PM=V2y/Vs
if (PM.lt.0.03) then
cd=0.5
else if (PM.ge.0.03.and.PM.lt.0.23) then
cd=-778.58*(PM**5)+2536.15*(PM**4)-186.62*(PM**3)-11.78*&
(PM**2)+1.79*(PM)+0.46
else if (PM.ge.0.23.and.PM.lt.0.60) then
cd=0.52*(PM**2)-0.009*(PM)+0.07
else if (PM.ge.0.60.and.PM.lt.1) then
cd=2.42*(PM**3)-4.58*(PM**2)+2.93*(PM)-0.43
else if (PM.ge.1.and.PM.lt.2) then

```

```

cd=0.45*(PM**5)-4.21*(PM**4)+15.23*(PM**3)-26.98*(PM**2)+23.42*(PM)-
7.58
else if (PM.ge.2.and.PM.lt.6) then
cd=0.45/(PM+0.13)
end if
a2y=-(pi*(d**2)/(8*m))*Cd*Rz*exp(-0.00013*y2)*v2*(v2y-wy)-&
(g/(1+y2/Rt)**2)
x3=x+v2x*h/2
y3=y+v2y*h/2
v3x=vx+a2x*h
v3y=vy+a2y*h
v3=sqrt(v3x**2+v3y**2)
!
PM = V3x/Vs
if (PM.lt.0.03) then
cd=0.5
else if (PM.ge.0.03.and.PM.lt.0.23) then
cd=-778.58*(PM**5)+2536.15*(PM**4)-186.62*(PM**3)-11.78*&
PM**2)+1.79*(PM)+0.46
else if (PM.ge.0.23.and.PM.lt.0.60) then
cd=0.52*(PM**2)-0.009*(PM)+0.07
else if (PM.ge.0.60.and.PM.lt.1) then
cd=2.42*(PM**3)-4.58*(PM**2)+2.93*(PM)-0.43
else if (PM.ge.1.and.PM.lt.2) then
cd=0.45*(PM**5)-4.21*(PM**4)+15.23*(PM**3)-26.98*(PM**2)+23.42*(PM)-
7.58
else if (PM.ge.2.and.PM.lt.6) then
cd=0.45/(PM+0.13)
end if
a3x=-(pi*(d**2)/(8*m))*Cd*Rz*exp(-0.00013*y3)*v3*(v3x-wx)
!
PM = V3y/Vs
if (PM.lt.0.03) then
cd=0.5
else if (PM.ge.0.03.and.PM.lt.0.23) then
cd=-778.58*(PM**5)+2536.15*(PM**4)-186.62*(PM**3)-11.78*&
PM**2)+1.79*(PM)+0.46
else if (PM.ge.0.23.and.PM.lt.0.60) then
cd=0.52*(PM**2)-0.009*(PM)+0.07
else if (PM.ge.0.60.and.PM.lt.1) then
cd=2.42*(PM**3)-4.58*(PM**2)+2.93*(PM)-0.43
else if (PM.ge.1.and.PM.lt.2) then
cd=0.45*(PM**5)-4.21*(PM**4)+15.23*(PM**3)-26.98*(PM**2)+23.42*(PM)-
7.58
else if (PM.ge.2.and.PM.lt.6) then
cd=0.45/(PM+0.13)
end if
a3y=-(pi*(d**2)/(8*m))*Cd*Rz*exp(-0.00013*y3)*v3*(v3y-wy)-&
(g/(1+y3/Rt)**2)
x4=x+v3x*h
y4=y+v3y*h
v4x=vx+a3x*h
v4y=vy+a3y*h
v4=sqrt(v4x**2+v4y**2)
!
PM = V4x/Vs

```



```

if (PM.lt.0.03) then
cd=0.5
else if (PM.ge.0.03.and.PM.lt.0.23) then
cd=-778.58*(PM**5)+2536.15*(PM**4)-186.62*(PM**3)-11.78*&
(PM**2)+1.79*(PM)+0.46
else if (PM.ge.0.23.and.PM.lt.0.60) then
cd=0.52*(PM**2)-0.009*(PM)+0.07
else if (PM.ge.0.60.and.PM.lt.1) then
cd=2.42*(PM**3)-4.58*(PM**2)+2.93*(PM)-0.43
else if (PM.ge.1.and.PM.lt.2) then
cd=0.45*(PM**5)-4.21*(PM**4)+15.23*(PM**3)-26.98*(PM**2)+23.42*(PM) -
7.58
else if (PM.ge.2.and.PM.lt.6) then
cd=0.45/(PM+0.13)
end if
a4x=-(pi*(d**2)/(8*m))*Cd*Rz*exp(-0.00013*y4)*v4*(v4x-wx)
!
PM = V4y/Vs
if (PM.lt.0.03) then
cd=0.5
else if (PM.ge.0.03.and.PM.lt.0.23) then
cd=-778.58*(PM**5)+2536.15*(PM**4)-186.62*(PM**3)-11.78*&
(PM**2)+1.79*(PM)+0.46
else if (PM.ge.0.23.and.PM.lt.0.60) then
cd=0.52*(PM**2)-0.009*(PM)+0.07
else if (PM.ge.0.60.and.PM.lt.1) then
cd=2.42*(PM**3)-4.58*(PM**2)+2.93*(PM)-0.43
else if (PM.ge.1.and.PM.lt.2) then
cd=0.45*(PM**5)-4.21*(PM**4)+15.23*(PM**3)-26.98*(PM**2)+23.42*(PM) -
7.58
else if (PM.ge.2.and.PM.lt.6) then
cd=0.45/(PM+0.13)
end if
a4y=-(pi*(d**2)/(8*m))*Cd*Rz*exp(-0.00013*y4)*v4*(v4y-wy)-&
(g/(1+y4/Rt)**2)
y=y+h*(v1y+2*v2y+2*v3y+v4y)/6
x=x+h*(v1x+2*v2x+2*v3x+v4x)/6
vx=vx+h*(a1x+2*a2x+2*a3x+a4x)/6
vy=vy+h*(a1y+2*a2y+2*a3y+a4y)/6
if (y.lt.0.01) then
p=1
end if
write(10,*)x,y
t=t+h
end do
end do
R=x
print*,t,R
end program

```