

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
DEPARTAMENTO DE APOIO A PESQUISA
PROGRAMA INSTITUCIONAL DE BOLSAS DE INICIAÇÃO
CIENTÍFICA

REGIÕES DE SEGURANÇA EM LANÇAMENTOS DE PROJÉTEIS

Bolsita: Lívia Fernanda de Carvalho Limeira, CNPq

MANAUS

2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
DEPARTAMENTO DE APOIO A PESQUISA
PROGRAMA INSTITUCIONAL DE BOLSAS DE INICIAÇÃO
CIENTÍFICA

RELATÓRIO FINAL

PIB-E/0049/2012

REGIÕES DE SEGURANÇA EM LANÇAMENTOS DE PROJÉTEIS
PROGRAMA DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA NA UFAM

Bolsista: Lívia Fernanda de Carvalho Limeira, CNPq

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Rita de Cássia Mota Teixeira Oliveira

MANAUS

2013

Resumo

Assumindo qualquer lançamento de projéteis, seja em qualquer condição de resistência do ambiente externo, como por exemplo, ventos e água, há a capacidade de calcular por métodos simples da Física, vários pontos de sua trajetória. Porém, entendemos que existe uma região de segurança livre de qualquer ação de projéteis, o qual é nosso objetivo nesse projeto.

Determinada as projeções das parábolas de lançamento, a região de segurança será calculada pela envoltória de todas as parábolas, chamadas de famílias de curvas, parametrizada pelo ângulo de tiro e demonstrada com alguns exemplos de resistência.

Palavras-chave: lançamento de projétil, área de segurança, envoltória, balística.

Abstract

Considering any projectile launching, under any resistance condition of the external environment, such as the wind and the water, it is possible to calculate, by simple methods of physics, various points in its trajectory. However, we understand that there is a security region free of any projectile activity, which is the object of our study in this project.

Given the projections of the parabolas of the launching, the security region will be calculated by the envelopment of all the parabolas, known as family of curves, parameterized by the angle of shot, demonstrate by some examples of resistance.

Keywords: projectile launching, safety region, envelopment, ballistics.

SUMÁRIO

| | |
|------------------------------------|----|
| LISTA DE FIGURAS..... | 06 |
| LISTA DE GRÁFICOS..... | 07 |
| 1 INTRODUÇÃO..... | 08 |
| 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA..... | 09 |
| 3 METODOLOGIA..... | 11 |
| 4 RESULTADOS E DISCUSSÕES..... | 12 |
| 5 CONCLUSÃO..... | 17 |
| 6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS | 18 |
| 7 CRONOGRAMA EXECUTADO..... | 19 |

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Sistema de coordenadas para lançamento oblíquo.....11

Figura 2 – Trajetórias correspondentes a diferentes valores de b , em kg.....13

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1: Família de trajetórias obtidas desconsiderando-se a resistência do ar.....15

Gráfico 2: Família de Trajetórias considerando a resistência do ar e do vento na direção oeste.....16

Gráfico 3: Família de trajetórias obtidas considerando a resistência do ar e vento para o leste.....16

Gráfico 4: Família de trajetórias na direção nordeste, com alta intensidade na direção vertical.....16

1. Introdução

O lançamento de projéteis é estudado desde o século XVII, destacando-se os estudos Galileu Galilei e Isaac Newton. Antes de Galileu, acreditava-se que a trajetória descrita por um projétil era retilínea, porém Galileu e Newton demonstraram que a trajetória de qualquer corpo sob a ação da gravidade era parabólica. O movimento de um projétil sob a ação da gravidade de duas dimensões pode ser considerado como resultante da composição (soma vetorial) de dois movimentos unidimensionais independentes.

Em alguns testes de instrumentos bélicos, treinamentos militares ou obras de engenharia é necessário o uso de explosivos, o que pode resultar em diversos lançamentos de detritos. A imagem deste fenômeno é composta de várias trajetórias parabólicas, necessitando o estudo de uma família de curvas para se calcular a região de segurança de todos os "trajetos perigosos". Tendo em vista os problemas de tangência das curvas, as envoltórias começaram a ser estudadas por Leibniz e Bernoulli. As envoltórias prometem uma região de segurança que é a região do corpo tridimensional que fica livre da ação de projéteis que são lançados e é obtida via o cálculo da envoltória de uma família de trajetórias, e como o cálculo desta envoltória utiliza argumentos de geometria e equações diferenciais, cria-se um âmbito entre física e matemática.

Em 1644 nos estudos de Torricelli a respeito de balística, havia uma demonstração que todas as parábolas balísticas que são trajetórias de balas de canhão atiradas segundo diferentes ângulos de elevação com a mesma velocidade inicial e segundo um mesmo plano vertical tangenciavam uma parábola fixa. Essa parábola é a "parábola de segurança", pois ela define o alcance do canhão.

Neste projeto o objetivo é calcular as regiões de segurança em várias situações de lançamentos de projéteis, considerando o atrito do ar e do vento em diversas direções, bem como implementá-las computacionalmente. Partimos dos cálculos de três situações de lançamento: no vácuo, na presença de ar e na presença de vento para poder concluir o objetivo de calcular a região de segurança para cada situação, bem como a implementação computacional.

2. Revisão Bibliográfica

Um projétil que se desprenda sob a ação da gravidade, próximo a superfície da Terra, desprezada a resistência do ar, mover-se-á de acordo com a equação da Segunda Lei de Newton. [1] Suponha que este projétil seja lançado de um ângulo de tiro θ e o sistema de coordenadas $r(t) = (x(t), y(t))$, onde a origem coincide com ponto de lançamento. A resolução nos dá:

$$\begin{cases} x''(t) = 0, & x(0) = 0, & x'(t) = v_o \cos \theta \\ y''(t) = -g, & y(0) = 0, & y'(t) = v_o \sin \theta \end{cases} \quad (1)$$

Se a componente y da velocidade inicial é conhecida, o tempo t para o qual a partícula está a uma altura y pode ser obtido pela equação (2) abaixo, obtida pela *integral* de y' em relação ao tempo. A posição horizontal para aquele tempo pode, então, ser obtida utilizando a equação (3), também obtida pela *integral* de x' : [2]

$$y(t) = y_o + v_{oy}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (2)$$

$$x(t) = x_o + v_{ox}t \quad (3)$$

Das equações (2) e (3) concluímos que se substituirmos o t de x em y , teremos a equação da trajetória do corpo que é um arco de parábola. O tempo de subida, isto é, o tempo que o projétil leva para atingir o seu ponto mais alto, a altura máxima atingida pelo corpo e a distância horizontal máxima alcançada pelo mesmo. [3]

Para a resolução do caso do lançamento de projétil com resistência do ar será modelada fisicamente por $-b \frac{dr}{dt}$, onde b é uma constante positiva:

$$m \frac{d^2r}{dt^2} = mg - b \frac{dr}{dt}, \quad r(0) = 0, \quad \frac{dr}{dt}(0) = v_o, \quad (4)$$

A solução sai pelo sistema de equações diferenciais ordinárias, após o desenvolvimento da equação (4) em coordenadas.

Suporemos que os lançamentos ocorram num local onde há presença de vento, o qual imprime aos corpos uma velocidade constante $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$. Neste caso a equação do movimento pode ser modelada na forma: [3]

$$m \frac{d^2r}{dt^2} = mg - b \left(\frac{dr}{dt} - \mathbf{u} \right), \quad r(0) = 0, \quad \frac{dr}{dt}(0) = v_o \quad (5)$$

Chama-se $k = \frac{b}{m}$ e escrevendo a equação anterior em coordenadas poderemos solucionar as equações diferenciais pelas *Transformadas de Laplace*.

Para todos os casos, observamos que para cada valor do parâmetro θ temos uma curva C_θ constituída por pontos (x, y) que satisfazem a equação para uma família de curvas planas:

$$C_\theta = \{ (x, y) \in R^2 : f(x, y, \theta) = 0 \} \quad (6)$$

A equação $f(x, y, \theta) = 0$ define uma família de curvas planas; isto é, para cada θ_0 fixado, a equação $f(x, y, \theta_0) = 0$ define implicitamente uma curva no plano. [Se a função f é polinomial, as curvas são algébricas. A envoltória de uma família de curvas planas que dependem de um parâmetro é uma curva, que não pertence à família e que é tangente a todas as curvas da família. Essencialmente, a envoltória se obtém eliminando o parâmetro que caracteriza a família entre a equação desta e sua derivada em relação a θ . [4]

Uma condição essencial para isso é que, para cada θ fixado, o vetor gradiente (com relação às variáveis espaciais) seja diferente de zero em todos os pontos da curva C_θ , isto é:

$$\nabla f(x, y, \theta) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, \theta), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, \theta) \right) \neq (0, 0) \quad (7)$$

A envoltória da família C_θ é uma curva parametrizada $\gamma(\theta) = (x(\theta), y(\theta))$ satisfazendo as seguintes condições:

- i) $\gamma(\theta) \in C_\theta, \quad \forall \theta;$
- ii) γ e C_θ possuem a mesma reta tangente no ponto $\gamma(\theta)$

Para o cálculo da envoltória basta fixarmos o parâmetro θ e resolvermos o sistema de equações:

$$\begin{cases} f(x, y, \theta) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \theta}(x, y, \theta) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Por fim, a região de segurança de um projétil deve ser analisada como a região que está fora dos limites de alcance deste projétil. É importante, então, que calculemos a envoltória da família de todas as curvas “prováveis” do lançamento $(C_\theta) - \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

A envoltória da família de trajetórias parabólicas ainda é uma parábola, denominada *parábola de segurança*. [3] Nos gráficos resultantes, esse parábola se apresentará como o principal foco.

3. Metodologia

Para os estudos de lançamentos de projéteis, podemos começar com o lançamento sem resistência do ar pois neste projeto usaremos este modelo como parâmetro e fixação da notação.

Considera-se uma massa m com velocidade lançada v_0 , segundo um ângulo θ em relação ao eixo horizontal, estando sob a ação da gravidade, agindo verticalmente para baixo, impondo uma trajetória parabólica, resultante da composição de dois movimentos. Sendo a velocidade uma grandeza vetorial, podemos decompô-la segundo eixos x e y . Assim, pode-se achar a velocidade inicial em x e y , altura máxima alcançada pelo projétil, o seu tempo de subida, o alcance máximo e a equação do movimento completo (y em função de x), partindo do sistema de coordenadas usando derivadas e integrais no processo.

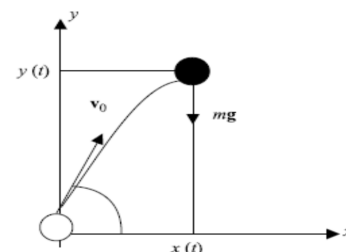


Figura 1: Sistema de Coordenadas

Para o lançamento de projéteis com resistência do ar consideraremos também a força resistiva do ar sobre a massa m . Esta resistência será moldada por uma constante positiva, escolhendo o sistema de coordenadas , cuja origem coincide com o ponto de lançamento. A fim de resolver as equações diferenciais resultantes desse sistema, usa-se as *Transformadas de Laplace*. Repete-se o mesmo procedimento dos lançamentos de projéteis com presença do ar nos com efeito de presença do vento. Agora, deve-se atentar que existe uma nova velocidade constante a ser calculada além da força resistiva do ar. Simplificando as coordenadas para melhoria da resolução, a solução sai também pelas *Transformadas de Laplace*.

Terminados os estudos sobre lançamentos de projéteis, se deu o início dos cálculos das envoltórias das famílias de curvas, que carecem de outros métodos e até de programas computacionais. Nos lançamentos em todos os casos, temos várias alturas e distâncias horizontais relativas ao θ de partida. Ou seja, para cada valor do parâmetro θ temos uma curva C_θ . Cada curva assume uma tangente por cada um de seus pontos, para isso precisamos da definição do vetor gradiente, e este seja diferente de zero em todos os pontos da curva.

Considerando uma vizinhança do ponto de tangência da envoltória com a família de curvas planas, nessa vizinhança existe parametrização regular da envoltória. Com o parâmetro fixado, resultou um sistema de equações em função de x e y . Uma aplicação do *Teorema da Função Implícita* garante que o sistema tem solução regular quanto a função parametrizada.

A região de segurança é a aplicabilidade rotação, em torno do eixo de simetria, de um plano perpendicular ao solo (de onde parte o lançamento) e da envoltória de todas as trajetórias cujas velocidades iniciais sejam paralelas a este plano.

4. Resultados e Discussões

Para lançar um projétil é necessário um ângulo de tiro, neste projeto iniciaram-se os cálculos usando um projétil de massa m , em um ângulo de tiro θ , lançado por uma velocidade v_0 , e sua origem coincide com o ponto de lançamento no plano cartesiano.

1º tipo de movimento: no vácuo

A massa m está na atuação de uma única força gravitacional g , por está contra o movimento, obtém o sinal negativo. Pela segunda lei de Newton:

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = mg, \quad r(0), \quad \frac{dr}{dt}(0) = v_0 \quad (1)$$

$$\text{Em coordenadas: } \begin{cases} x''(t) = 0, & x(0) = 0, & x'(t) = v_0 \cos \theta \\ y''(t) = -g, & y(0) = 0, & y'(t) = v_0 \sin \theta \end{cases} \quad (2)$$

Integrando $\iint \frac{d^2 x}{dt^2} = ct + c_1$, pois a primeira integral resulta em uma constante c , sendo uma constante matematicamente, equivale a velocidade inicial de x , v_{0x} , e na segunda integral aparece uma segunda constante, equivalente ao posicionamento inicial.

$$\iint \frac{d^2 x}{dt^2} = x_0 + v_{0x} t \quad (3)$$

O equivalente para o eixo y :

$\iint \frac{d^2 y}{dt^2} = c_1 + ct - \frac{1}{2}gt^2$, fazendo os devidos ajustes, considerando c a velocidade inicial em y e c_1 equivalente ao posicionamento inicial.

$$\iint \frac{d^2 y}{dt^2} = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (4)$$

Evidentemente, em determinado instante ($t = v_0/g$), tem-se $y' = 0$, de maneira que nesse instante a velocidade é horizontal.

$$t_s = \frac{v_0 \sin \theta}{g} \quad (5)$$

Substituindo o t de x da equação no t de y da equação, temos a equação geral do movimento:

$$y = -\frac{g \sec^2 \theta}{2v_0^2} x^2 + (tg\theta)x \quad (6)$$

A altura máxima atingida pelo corpo é o tempo de subida aplicado na equação em função de x no movimento em y :

$$h = y(t_s) = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g} \quad (7)$$

E a distância horizontal máxima alcançada pela mesma equação (7) é dada pela raiz positiva da equação quadrática:

$$d_{m\acute{a}x} = \frac{v_0^2}{g} \text{sen}(2\theta) \quad (8)$$

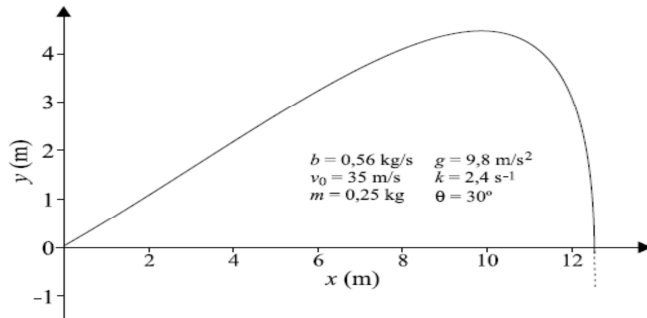


Figura 2: Trajetória de um projétil considerando-se a resistência do ar

2º tipo de movimento: com resistência do ar

Além da força gravitacional g exercida na massa m consideraremos a resistência do ar sobre a mesma. Tal resistência será modelada fisicamente por $-b \frac{dr}{dt}$, onde b é uma constante positiva, mas será escrita com sinal negativo por ser contra o movimento.

Usando o mesmo sistema de coordenadas do movimento no vácuo, onde a origem coincide com o ângulo de tiro θ , então obedece a segunda lei de Newton:

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = mg - b \frac{dr}{dt}, \quad r(0) = 0, \quad \frac{dr}{dt}(0) = 0, \quad \frac{dr}{dt}(0) = v_0 \quad \text{ou ainda}$$

$$\begin{cases} x''(t) + \frac{b}{m} x'(t) = 0, & x(0) = 0, & x'(0) = v_0 \cos \theta \\ y''(t) + \frac{b}{m} y'(t) = -g, & y(0) = 0, & y'(0) = v_0 \text{sen} \theta \end{cases} \quad (9)$$

Resolvendo este sistema de equações diferenciais ordinárias por Transformada de Laplace obtemos:

$$x(t) = \frac{v_0 \cos \theta}{k} (1 - e^{-kt}) \quad (10)$$

$$y(t) = \left(\frac{v_0}{k} \text{sen} \theta + \frac{g}{k^2} \right) (1 - e^{-kt}) - \frac{g}{k} t \quad (11)$$

onde $k = b/m$.

Isolando t na equação (10) e substituindo na equação (11):

$$y = \left(tg\theta + \frac{g}{kv_0} \text{sec}\theta \right) x + \frac{g}{k^2} \ln \left(1 - \frac{kx}{v_0} \text{sec}\theta \right) \quad (12)$$

A eq. (12) só serve se a função \ln não zera, ou seja, se $1 - \frac{kx}{v_0} \text{sec}\theta > 0$

A trajetória desse movimento tenderia assintoticamente para uma reta vertical caso não houvesse colisão do projétil com o solo. Isto é, a trajetória seria limitada à direita, conforme ilustrado na figura ao lado:

Independente do ângulo de tiro θ , nenhuma trajetória ultrapassaria a reta $x = \frac{v_o}{k} = (mv_o)/b$. A constante b aparece no denominador, então, quanto maior a resistência do ar, menor será o alcance horizontal.

Esta é uma alta diferença entre o caso com resistência do ar e no vácuo, pois a trajetória não desenha uma parábola, uma vez que as trajetórias parabólicas no vácuo caso não fossem interrompidas com a colisão do projétil no solo, seriam ilimitadas na direção x . Outra diferença é segundo ao ângulo de tiro que produz o alcance horizontal máximo, enquanto no caso parabólico o alcance máximo é obtido quando $\theta = 45^\circ$, no caso $b > 0$ varia para cada movimento particular.

Suponha uma família de curvas parametrizada por θ em todos os pontos (x, y) :

$$C_\theta = \{ (x, y) \in R^2 : f(x, y, \theta) = 0 \} \quad (13)$$

Para acharmos a envoltória, é necessário que uma reta tangente passe por todos os pontos, para isso o vetor gradiente tem de ser diferente de zero em todos os pontos da curva. As expressões matemáticas para tais condições são:

$$\begin{cases} f(x(\theta), y(\theta), \theta) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x(\theta), y(\theta), \theta) \frac{dx}{d\theta} + \frac{\partial f}{\partial y}(x(\theta), y(\theta), \theta) \frac{dy}{d\theta} = 0 \end{cases} \quad (14)$$

Fixamos o parâmetro θ :

$$\begin{cases} f(x, y, \theta) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \theta}(x, y, \theta) = 0 \end{cases} \quad (15)$$

Para provar que a solução $(x(\theta), y(\theta))$ é uma envoltória, deriva-se $f(x(\theta), y(\theta), \theta) = 0$ em relação a θ .

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, \theta) \frac{dx}{d\theta} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, \theta) \frac{dy}{d\theta} + \frac{\partial f}{\partial \theta}(x, y, \theta) = 0 \quad (16)$$

Partiremos para o cálculo da região de segurança, fixando um plano perpendicular ao solo contendo o ponto de lançamento. No caso sem resistência do ar, por exemplo, vamos usar a equação geral do movimento:

$$y = -\frac{g \sec^2 \theta}{2v_o^2} x^2 + (tg\theta)x \quad (17)$$

Derivando parcialmente em relação a θ , o sistema torna-se:

$$\begin{cases} y = -\frac{g \sec^2 \theta}{2v_o^2} x^2 + (tg\theta)x = 0 \\ x \sec^2 \theta \left[\frac{gx}{v_o^2} tg\theta - 1 \right] = 0 \end{cases} \quad (18)$$

Como $x \sec^2 \theta > 0$ para todo $x > 0$ e todo $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, então a segunda equação do sistema nos fornece: $tg\theta = \frac{v_o^2}{gx}$, e se $\sec^2 \theta = 1 + tg\theta$, obtemos:

$$y = -\frac{g \sec^2 \theta}{2v_0^2} x^2 + \frac{v_0^2}{2g} \quad (19)$$

Usando programas computacionais, obtemos o gráfico dessa função com a sua região de segurança:

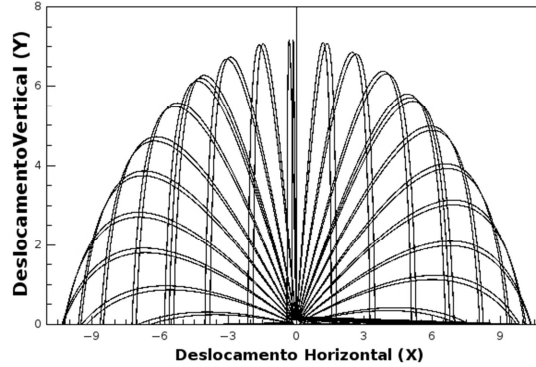


Gráfico 1: Família de trajetórias sem a resistência do ar e do vento com velocidade inicial de 20m/s

A envoltória seria a parábola que envolve toda a família de curva, chamada de parábola de segurança.

3º tipo de movimento: efeito da presença do vento

Agora com a presença do vento, o corpo de massa m recebe uma velocidade constante, que será representada pelo vetor u (u_1, u_2). Neste caso a segunda lei de Newton completa fica:

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = mg - b \left(\frac{dr}{dt} - u \right), \quad r(0) = 0, \quad \frac{dr}{dt}(0) = v_0 \quad (20)$$

Nesta equação também chamaremos $k=b/m$, em coordenadas cartesianas fica:

$$\begin{cases} x''(t) + kx'(t) = ku_1, & x(0) = 0, & x'(0) = v_0 \cos \theta, \\ y''(t) + ky'(t) = -g + ku_2, & y(0) = 0, & y'(0) = v_0 \sin \theta, \end{cases} \quad (21)$$

Cuja resolução nos dá:

$$x(t) = tu_1 + \left[\frac{v_0 \cos \theta - u_1}{k} \right] (1 - e^{-kt}) \quad (22)$$

$$y(t) = \frac{(-g + ku_2)}{k} t + \left[\frac{v_0 \sin \theta}{k} - \frac{ku_2 - g}{k^2} \right] (1 - e^{-kt}) \quad (23)$$

Para valores grandes de t o fator $(1 - e^{-kt})$ é próximo de 1, de modo que vale as aproximações:

$$x(t) \approx tu_1 + \left[\frac{v_0 \cos \theta - u_1}{k} \right] \quad (24)$$

$$y(t) \approx \frac{(-g + ku_2)}{k} t + \left[\frac{v_0 \sin \theta}{k} - \frac{ku_2 - g}{k^2} \right] \quad (25)$$

$$\text{Chamando } c_1 = \left[\frac{v_0 \cos \theta - u_1}{k} \right] \text{ e } c_2 = \left[\frac{v_0 \sin \theta}{k} - \frac{ku_2 - g}{k^2} \right], \text{ então } \frac{y(t) - c_2}{x(t) - c_1} \approx \frac{(-g + ku_2)}{ku_1} \quad (26)$$

A trajetória fica arbitrariamente próxima de uma reta para grandes valores de t , com inclinação de reta $\frac{(-g+ku_2)}{ku_1}$.

É claro que diferentes trajetórias dependerão do valor do vetor velocidade u .

O gráfico para a região de segurança para esse caso de resistência de ventos seria dado pela equação geral do movimento: $y = c_2 + \frac{(-g+kv_2)}{ku_1}(x - c_1)$. Vejamos alguns exemplos resultantes da variação de u , o qual direciona o vento.

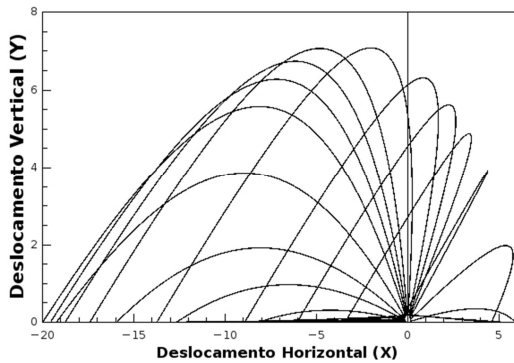


Gráfico 2: Família de Trajetórias considerando a resistência do ar e do vento na direção oeste com $v_0 = 20 \text{ m/s}$, $u_1 = -8$, $u_2 = 0$ e $k = 1,5$

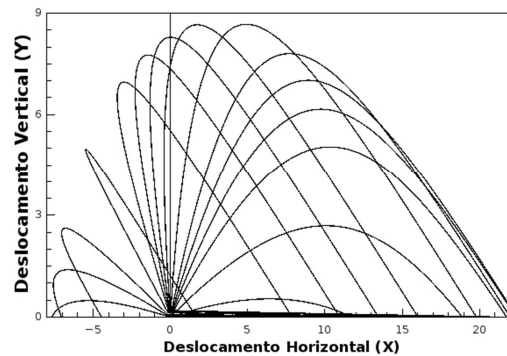


Gráfico 3: Família de trajetórias obtidas considerando a resistência do ar e vento para o leste com $v_0 = 20 \text{ m/s}$, $u_1 = 5$, $u_2 = 7$ e $k = 1,5$

Na direção oeste, $u_1 < 0$ e $u_2 = 0$. O gráfico ilustra ângulos de tiros de 0 a 180° . O vento deforma a região de segurança, notamos que a mesma não tem nenhuma simetria. Já na direção leste, $u_2 > 0$ e $u_1 = 0$. Sendo o oposto do oeste. Notamos que para os dois casos, se o vento for muito intenso o corpo colidirá com o solo num ponto de abscissa negativa.

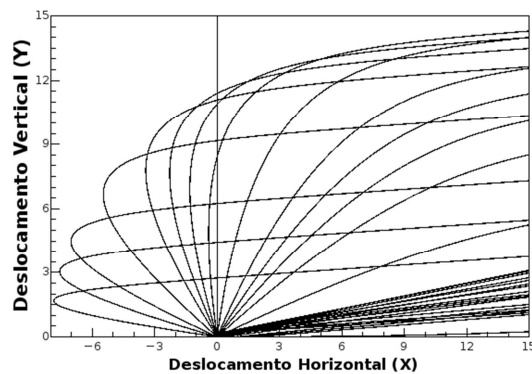


Gráfico 4: Família de trajetórias na direção nordeste, com alta intensidade na direção vertical, $v_0 = 20 \text{ m/s}$, $u_1 = 5$, $u_2 = 3$ e $k = 1,5$

Agora u_1 e u_2 são positivos. As expressões em função de x e y são limitadas superiormente e remetem que para grande valor de t o projétil estará bem próximo de uma reta com coeficiente angular positivo e o corpo jamais atingirá o solo.

Definimos, assim, algumas regiões de segurança, com diversos ângulos de tiros e probabilidade de ventos e resistência do ar.

5. Conclusão

O estudo da balística é debatido em várias situações práticas, aonde precisamos reconhecer suas dimensões. Estudada a região tridimensional, na qual um corpo desenvolve um trajeto parabólico em várias condições de atrito, prosseguimos então com o objetivo de achar uma região que ficasse livre da ação desse corpo, chamada de região de segurança.

A fim de se ter um modo comparativo, foi desenvolvido algumas condições de lançamento, bem como para fixar uma notação que será usada por meio de todo o projeto. O primeiro estudo foi com lançamento de projéteis sem resistência do ar, seguido de com a resistência do ar, logo depois podemos progredir para uma análise menos clássica de lançamento com efeito da presença do vento em algumas direções.

Conforme as equações foram se organizando, poderíamos desenvolver várias parábolas, conforme o ângulo de tiro, a variância da resistência do meio, e o massa do corpo. Feito isso, conduzimos o projeto a análise final das famílias de curvas, projetando em gráficos baseados em programas computacionais. O cálculo da envoltória determina a nossa região de segurança, como foi demonstrado em diversos lançamentos. Rotacionando o eixo da famílias de curvas, temos a região tridimensional completa da região de segurança.

Vimos, então, uma utilização muito prática de um projeto que é desenvolvido computacionalmente. Podendo ajudar em explosões, construções civis, argumentos de tiros e projeções convenientes.

6. Referências Bibliográficas

- [1] J. L. Synge e B.A. Griffith, *Mecânica Racional* (Ed. Globo, Porto Alegre, 1968), 2ª Ed.
- [2] P. A. Tipler e G. Mosca, *Mecânica, Oscilações e Ondas, Termodinâmica* (Ed. LTC, Rio de Janeiro, 2006), 5º Ed.
- [3] L. R. Pereira e V. Bonfim, *Artigo: Regiões de segurança em lançamentos de projetéis* (publicado em 2008)
- [4] Vilches, M.A. Envoltória de Curvas Planas. 2009. Disponível em: <http://magnum.ime.uerj.br/cadernos_mat/cadmat_arquivos/V2021/cime.pdf>. Acesso em: 16 jul. 2013.

7. Cronograma Executado

| Nº | Descrição | Ago 2012 | Set | Out | Nov | Dez | Jan 2013 | Fev | Mar | Abr | Mai | Jun | Jul |
|----|---|-------------|-----|-----|-----|-----|-------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1 | Levantamento bibliográfico da função de correlação de pares | X | X | | | | | | | | | | |
| 2 | Estudo do Lançamento de Projéteis | | | X | X | | | | | | | | |
| 3 | Estudo da Envoltória de uma família de Curvas | | | | | X | X | X | X | | | | |
| 4 | Cálculo da Região de Segurança | | | | | | | | X | X | X | X | |
| 5 | - Elaboração do Resumo e Relatório Final (atividade obrigatória) | | | | | | | | | | | X | |
| 6 | - Preparação da Apresentação Final para o Congresso (atividade obrigatória) | | | | | | | | | | | | X |