UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
DEPARTAMENTO DE APOIO À PESQUISA
PROGRAMA INSTITUCIONAL DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA

Otimização Combinatória e Teoria dos Jogos aplicados à Gestão de Eventos Esportivos

Bolsista: João Paulo Fontenele Brito - CNPq

MANAUS
2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
DEPARTAMENTO DE APOIO À PESQUISA
PROGRAMA INSTITUCIONAL DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA

RELATÓRIO FINAL
PIB - E - 0061/2012
Otimização Combinatória e Teoria dos Jogos aplicados à Gestão de Eventos Esportivos

Bolsista: João Paulo Fontenele Brito - CNPq

Orientadora: Rosiane de Freitas Rodrigues

MANAUS
2013

Otimização Combinatória e Teoria dos Jogos aplicada à Gestão de Eventos Esportivos

Bolsista: João Paulo Fontenele Brito - CNPq
Orientador Rosiane de Freitas Rodrigues

Resumo

Este trabalho estuda os problemas de gestão da venda de ingressos para campeonatos esportivos com fases classificatórias. É discutido formas de melhorar o processo de venda de várias formas, dividindo o processo de venda de ingressos em duas fases, fazendo o uso de Otimização Combinatória para alocação de cadeiras em estádios para os torcedores dos times competidores dos jogos, de forma a maximizar a satisfação dos torcedores que compram ingressos, fazendo uso de Teoria dos Jogos para determinar preços diferenciados para os ingressos, levando em consideração condições específicas para cada partida. Tudo isso sem afetar negativamente a renda obtida na venda de ingressos, mas sim garantindo uma renda maior.

Palavras-chave: Precificação de Ingressos, Teoria dos Jogos, Otimização Combinatória Esportiva

Sumário

1 Introdução

A cada ano a indústria do entretenimento cresce, investe-se cada vez na organização e realização de eventos cada vez maiores e mais populares, e obviamente, há um aumento na renda proporcional ao investimento. Um exemplo claro deste fato é um aumento na renda dos principais clubes de futebol europeus em plena crise econômica (fonte: "Football Money League", Deloitte), mesmo com dificuldades econômicas a fidelidade e paixão dos fãs fizeram os clubes prosperarem. Pode-se observar grandes investimentos em eventos esportivos aqui mesmo no Brasil como a Copa do Mundo de Futebol de 2014 e as Olimpíadas de 2016.

Apesar de o crescimento econômico do futebol europeu ser um exemplo claro do potencial econômico da indústria do entretenimento esportivo, este não se limita à Europa ou ao futebol, há muitas outras diferentes modalidades esportivas populares em outras regiões do planeta. O que muitas delas têm em comum são competições em fases, sendo uma delas classificatória, e uma fase final, onde os melhores times competidores da fase classicatória competem pelo título na fase final.

O que se propõe neste trabalho é estudar, analisar e propor formas de melhorar o processo de venda de ingressos para tais eventos esportivos, que aumentem a satisfação do torcedor que compra os ingressos, e ainda assim possibilite um aumento na renda da venda dos ingressos. Espera-se alcançar tal objetivo aplicando conhecimentos de otimização combinatória e teoria dos jogos no processo de venda e alocação de assentos nos estádios e arenas.

É possível melhorar a satisfação total dos torcedores de um dado jogo, alocando mais cadeiras do estádio para os torcedores do time cujos ingressos são mais disputados, ou seja, se uma cadeira é utilizada por um torcedor que teve que enfrentar uma competição por ingressos maior para assistir ao jogo este vai ficar mais satisfeito de estar no jogo que um outro torcedor que compraria um ingresso para ver o jogo de um time que tem baixa demanda. Assim alocando lugares a mais para torcidas de times tradicionais, fortes, e que portanto tem uma demanda maior, é possível maximizar a satisfação total dos torcedores para aquele jogo. É aí que se aplica a Otimização Combinatória, para determinar qual deve ser a proporção de assentos para os dois times competidores de um jogo que maximiza a satisfação total dos torcedores.

Hoje em dia, os torcedores compram ingressos para competições meses antes de sua realização sem saber quem vai disputá-las de fato, e em muitos casos acabam com ingressos para assistir aos jogos de times para os quais não torcem, para resolver tal problema o que este trabalho propõe é a divisão do processo de venda em duas fases, na primeira, quando os times que irão disputar os jogos são desconhecidos, os torcedores poderiam pagar uma pequena quantia para fazer uma reserva para um determinado jogo para ver seus times favoritos, numa segunda fase, quando os times que irão disputar a partida já forem conhecidos, aqueles torcedores que pagaram pela reserva da primeira fase e que têm seus times disputando o jogo, pagam pelo ingresso para a partida.

Assim os torcedores terão a chance de ir assistir aos jogos caso seus times avancem para os jogos em que apostaram que seus times participariam. A satisfação do torcedor é maior em relação à venda tradicional de ingressos, onde os ingressos são vendidos num sistema de fila, já que se seus times participarem do jogo este terá o direito de ir assistir ao jogo, e caso contrário, se os times em para os quais ele reservou um ingresso não disputarem o jogo, o torcedor teve o prejuízo de apenas uma pequena fração do valor do ingresso.

Desta maneira garantimos que o torcedor que está assistindo ao jogo de fato desejou assistir ao jogo. Outro efeito da adição de uma fase na venda de ingressos, é a um aumento considerável na renda da venda de ingressos, pois é permitido que vários torcedores de diferentes times possam disputar uma reserva para ir assistir ao jogo, e para tal estes devem pagar pela reserva, além de depois pagar o preço do ingresso na segunda fase, quando já se souber que times disputarão um jogo.

2 Objetivos

Este trabalho tem por objetivo estudar e propor uma maneira mais eficiente de se vender e definir tanto preços como quantidade de ingressos para as torcidas dos competidores de eventos esportivos, especialmente em eventos esportivos com fases classificatórias, ou seja, em que há uma fase classificatória em que todos os competidores se enfrentam e uma fase final com os melhores competidores da fase classificatória, e portanto não se sabe quais times disputarão os jogos da fase final com antecedência. De modo a tanto melhorar a satisfação do usuário (torcedor) quanto aumentar a renda obtida diretamente com a venda de ingressos.

3 Metodologia

Para se alcançar os objetivos propostos utilizou-se os seguintes métodos: pesquisa em artigos e livros sobre Otimização Combinatória e Teoria dos Jogos, venda de ingressos e otimização esportiva; estudos dirigidos sobre os tópicos em questão; reuniões de trabalho com a orientadora.

4 Sobre o problema

Nos próximos anos muitos eventos esportivos acontecerão no Brasil, como por exemplo a Copa do Mundo de Futebol de 2014 e Olimpíadas Rio de Janeiro em 2016, estes eventos têm competições com fases classificatórias e uma segunda fase onde os melhores da fase classificatória competem para serem campeões. É natural que tais eventos atraiam investimentos e pesquisas. O que se pretende neste relatório é sugerir formas otimizadas e inteligentes de se vender ingressos para eventos como estes, que possuem fases classificatórias.

Para competiçõoes deste tipo competição é a venda de ingressos é feita em geral por um sistema de fila, ou seja aquele que chegar primeiro tem direito de comprar ingressos, como os jogos da fase classificatória são conhecidos antes de a competição se iniciar quando os torcedores compram ingressos para esta fase sabem exatamente que competidores irão disputar a partida, no entanto os jogos para a segunda fase são desconhecidos até poucos dias antes das datas dos jogos finais.

Pretende-se sugerir ideias que melhorem a satisfação dos espectadores e ainda assim garantam no mínimo a mesma renda que se obteria nos meios tradicionais de venda de ingressos, de fato pode-se ver que as chances de aumento na renda são muito boas. Utilizando pprincipalmente Teoria dos Jogos e Otimização Combinatória.

5 Fundamentação teórica

5.1 Otimização Combinatória

Otimização Combinatória é uma disciplina que estuda problemas de otimização. A Otimização Combinatória foi primeiramente criada e empregada durante a Segunda Guerra Mundial, onde era usada para decidir onde os recursos limitados dos Aliados, em especial pela Inglaterra, deveriam ser empregados. Como o uso de Otimização Combinatória mostrou resultados muito positivos e poder ser usada numa vasta gama de problemas, começou a se popularizar em muitas áreas diferentes.

Uma característica importante da Otimização Combinatória é que como para estudar tais problemas se faz uso de modelos, é possível testar e avaliar a solução encontrada antes de implementá-la na prática. Um modelo de Otimização Combinatória é um modelo matemático dado por:

- **Variáveis de decisão**: são as incógnitas a serem determinadas que solucionam o modelo.
- **Função objetivo**: é uma função matemática formada por variáveis de decisão, esta é a função que se deseja otimizar, ou seja descobrir para quais valores das variáveis de decisão o valor da função é maximizado ou minimizado.
- **Restrições**: são funções matemáticas que limitam os valores que as variáveis de decisão podem assumir.

O modelo matemático a ser utilizado depende diretamente do problema ou sistema a ser representado, as funções de restrições e objetivo podem ser ou lineares ou não-lineares, as variáveis de decisão podem assumir valores contínuos ou discretos (ou inteiros). Quando as funções do modelo forem lineares diz-se que o problema é um problema de otimização linear (ou *programação linear*), ou não-linear caso contrário, quando as variáveis de decisão só puderem assumir valores inteiros diz-se que o problema é de *programação inteira*.

Existem muitas técnicas para a solução de modelos de Otimização Combinatória, o emprego delas depende muito do problema que se quer resolver, da exatidão e da rapidez com que se quer obter o resultado.

5.2 O que são opções de compra

No mercado financeiro *call options*, ou opções de compra são um modalidade de compra de ativos, onde o comprador paga pelo prêmio (preço ou reserva) e este tem o direito, de pagar e adquirir o ativo pelo preço de exercício (*strike*) até a data de vencimento, cabendo ao comprador decidir se de fato vai comprar o ativo pelo preço de exercíco ou não.

Opções de compra minimizam o prejuízo do investidor pois se este pagou pela "reserva"da compra do ativo, o investidor pagará o preço de exercício e irá adquirir o ativo apenas se obtiver lucro com a transação, caso contrário sofreu apenas um pequeno prejuízo com a compra do prêmio de um ativo.

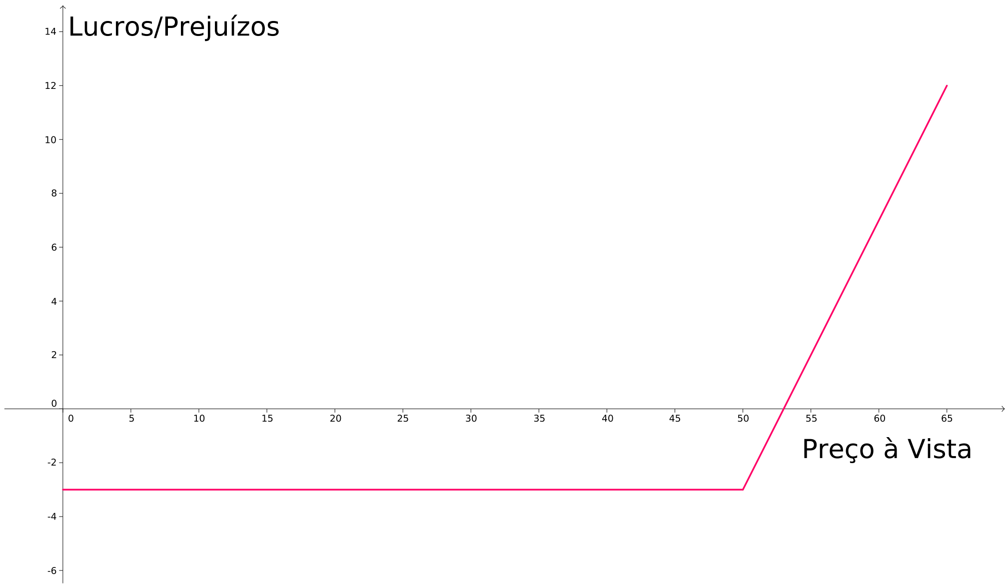

Figura 1: Lucros e Prejuízos de Opção com Strike de R$50,00 e prêmio R$3,00.

Por exemplo se um investidor pagou R$3,00 pelo prêmio de um ativo e o preço de exercício deste ativo é de R$50,00, o investidor só irá exercer o direito de comprar o ativo se o preço do ativo no mercado for maior que R$53,00, já que pagou o prêmio a R$3,00 e ainda terá de pagar mais R$50,00 pela compra do mesmo, caso o preço de mercado do ativo seja inferior a R$53,00 o investidor terá um prejuízo no valor do prêmio ou seja, apenas R$3,00.

Em geral o preço do prêmio sobe quando as chances de que a compra pelo preço de exercício de certo ativo são maiores, ou seja, se um ativo tem grandes chances de dar lucro, o preço de seu prêmio é maior, o oposto ocorre quando as chances de se exercer o direito de compra é menor, ou seja quando as chances de lucro são menores o preço do prêmio também é menor.

5.3 Teoria dos Jogos

Nesta seção serão apresentados alguns conceitos de Teoria dos Jogos para um melhor entendimento do trabalho.

5.3.1 Jogos com Estratégias Puras

Definição 5.1. (Jogo) *Um jogo é composto pelos seguintes elementos:*

- $G = \{g_1, ..., g_n\}$ ▶ *n jogadores;*
- $S_i = \{s_{i1}, s_{i2} \ldots s_{im_i}\}$ ▶ *estratégias puras do jogador* g_i*,* $(m_i \geq 2)$*;*
- $\mathbf{s} = (s_{1j_1}, s_{2j_2}, ..., s_{nj_n})$ ▶ *perfil de estratégia pura, onde* $s_{ij_i} \in S_i$*;*

- $S = \prod_{1}^{n} S_i = S_1 \times S_2 \times .. \times S_n$ ▶ *espaço de estratégia pura.*
- $u_i : S \longrightarrow \mathbb{R}$ ▶ *função utilidade*
  $\mathbf{s} \longmapsto u_i(\mathbf{s})$

Para fins de notação, seja

$$s_{-i} = (s_{1j_1}, ..., s_{(i-1)j_{i-1}}, s_{(i+1)j_{i+1}}, ..., s_{nj_n}) \in$$
$$S_{-i} = S_1 \times \cdots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \cdots \times S_n$$

5.3.2 Equilíbrio de Nash em Estratégias Puras

Definição 5.2. Equilíbrio de Nash em Estratégias Puras *Dizemos que um perfil de estratégia*

$$s^* = (s_1^*, ..., s_{(i-1)}^*, s_i^*, s_{(i+1)}^*, ..., s_n^*) \in S$$

é um equilíbrio de Nash se

$$u_i(s^*) = u_i(s_i^*, \mathbf{s_{-i}^*}) \geq u_i(s_{ij_i}, \mathbf{s_{-i}^*})$$

para todo $i = 1, ..., n$ *e* $j_i = 1, ..., m_i \geq 2$. *Ou seja,*

$$u_i(s^*) = u_i(s_1^*, ..., s_{(i-1)}^*, s_i^*, s_{(i+1)}^*, ..., s_n^*) = max_{x \in S_i} u_i(s_1^*, ..., s_{(i-1)}^*, x, s_{(i+1)}^*, ..., s_n^*),$$

para cada $i = 1, \ldots, n$.

5.3.3 Jogos com Estratégias Mistas

Definição 5.3. Estratégia Mista *Uma estratégia mista para o jogador* g_i *é um vetor* $p^i = (p_1^i, \ldots, p_{m_i}^i)$ *de números reais não negativos satisfazendo a condição* $p_1^i + p_2^i + \cdots + p_{m_i}^i = 1$, *com a interpretação que o jogador* g_i *jogará a estratégia* s_{ij_i} *com probabilidade* $p_{j_i}^i$, *para* $j_i = 1, \ldots m_i$.

Definição 5.4. Utilidade Esperada *Num jogo com n jogadores dado pela definição (5.1) onde o jogador* g_i *usa a estratégia mista* $p^i = (p_1^i, \ldots, p_{m_i}^i)$, *seja a tupla* $p = (p^1, \ldots, p^n)$. *A função utilidade esperada do jogador* g_i *é dada por*

$$EU_i(p) = \sum_{s_{1j_1} \in S_1, \ldots, s_{nj_n} \in S_n} \left[p_{j_1}^1 \cdot p_{j_2}^2 \cdots p_{j_n}^n \right] u_i(s_{1j_1}, s_{2j_2}, ..., s_{nj_n})$$

Definição 5.5. Equilíbrio de Nash em Estratégias Mistas *Dizemos que um perfil de estratégia mista* $p_* = (p_*^1, \ldots, p_*^n)$, *onde para cada i,* $p_*^i = (p_{*1}^i, \ldots, p_{*m_i}^i)$, *é um equilíbrio de Nash em Estratégias Mistas se:*

$$EU_i(p_*) = EU_i\left(p_*^1, \ldots, p_*^{i-1}, p_*^i, p_*^{i+1}, \ldots, p_*^n\right) = max_{x \in \Delta(S_i)} EU_i\left(p_*^1, \ldots, p_*^{i-1}, x, p_*^{i+1}, \ldots, p_*^n\right),$$

para cada $i = 1, \ldots, n$, *onde* $\Delta(S_i)$ *é o conjunto de todas as distribuições de probabilidade sobre o conjunto* S_i.

Definição 5.6. *Um jogo é finito quando o número de jogadores é finito e para cada jogador i, seu espaço de estratégias S_i é finito.*

Teorema 5.7. Teorema de Nash *Todo jogo finito possui um equilíbrio de Nash em Estratégias Mistas.*

5.4 Resvisão da Literatura

Já existem aplicações de Otimização Combinatória e Teoria dos Jogos em várias áreas de gestão esportiva. Um exemplo de aplicação prática de Otimização Combiinatória pode ser encontrado aqui mesmo no Brasil, e apesar de muita gente não se dar conta, os jogos do Campeonato Brasileiro são marcados utilizando o método proposto por [Urrutia e Ribeiro 2009]. Como os direitos de transmissão dos jogos pela TV são parte fundamental da renda dos jogos, o que o modelo faz é maximizar a quantidade de jogos atrativos, para os horários em que a audiência é maior. Ou seja maximizando a quantidade de jogos dos times de elite do Rio de Janeiro e São Paulo para os fins de semana. Isto respeitando uma série de restrições que tentam melhorar atratividade e a renda com publicidade, além de evitar situações injustas que favoreceriam alguns times com uma agenda melhor.

Cada campeonato tem um conjunto diferente de restrições que quer respeitar e outros aspectos que quer minimizarou maximizar, então a alocação de locais e horários para eventos esportivos (*sports scheduling*) se tornou uma área de pesquisa por si só, há muito espaço para melhoras dos modelos e técnicas de resolução, além de ser uma área bastante viável do ponto de vista finaceiro.

[Rasmussen e Trick 2008] faz uma análise geral sobre trabalhos já realizados de *sports scheduling*, para torneios em que todos os competidores se enfrentam (torneios *round-robin*), e que definir se um time vai competir em casa ou não são relevantes para o sistema.

A título de exemplo dos muitos trabalhos na área, específicos para cada campeonato, [Dilkina e Havens 2004] discute um protótipo para otimizar a transmissão para a TV dos jogos da *U.S. National Footbal League* (NFL), de modo que os organizadores possam participar da elaboração da agenda dos times e restrições. [Kyngäs e Nurmi 2009] trata da minimização de quantidade de jogos consecutivos em casa ou como convidado (ou *breaks*) dos times da primeira divisão de hóquei no gelo finlandesa. [Bonomo et al. 2008] propõe um modelo que minimiza a distância total a ser viajada pelos times da primeira divisão de vôlei feminino da Argentina.

O mercado da venda de ingressos pouco evoluiu mesmo com o avanço da tecnologia dos últimos anos, houve poucas inovações, e não há muita diferenciação de preços por categorias em especial em eventos esportivos, [Happel e Jennings 2001] discorre sobre o mercado de ingressos esportivos, e as razões da pouca inovação, entre elas, fala que boa parte da renda destes eventos não está na venda de ingressos, mas sim em publicidade e direitos de transmissão dos jogos. [Krautmann e Berri 2007] chega a uma conclusão parecida depois de avaliar a inelasticidade dos preços de ingressos para várias ligas esportivas nos Estados Unidos.

[Courty 2000] aborda a venda de ingressos na indústria do entretenimento em geral, fala desde a precificação, demanda, e mercado secundário de ingressos. [Balseiro et al. 2011] aborda o tema de precificação de ingressos e opções de compra para eventos esportivos com fases classificatórias, e mostra que oferecendo opções de compra para os torcedores é possível aumentar a renda, e ainda trata da demanda baseada no preço dos ingressos e opções.

Como se pode ver apesar de já se usa muita otimização no processo de gestão esportiva, no entanto não há muitos trabalhos que inovem no processo de venda de ingressos em especial.

6 Abordagens de Resolução

6.1 Venda de ingressos em duas fases

Uma primeira abordagem bastante simples, porém muito efetiva é a divisão do processo de venda de ingressos para a fase final da competição em duas fases. Como num primeiro momento não se sabe quem vai competir na fase final, pode-se aplicar a ideia de *Call Options* para vender os ingressos.

A primeira fase de vendas ocorreria antes da fase final, quando ainda não se conhece quem serão os competidores da fase final, nesta primeira fase os torcedores poderiam pagar um pequeno valor (*prêmio*) relativo ao ingresso para um determinado jogo para quantos times quiserem, a quantidade de usuários (ou torcedores) de um determinado time que pagariam pagar por um prêmio do ingresso para um determinado jogo seria limitada à metade da capacidade do estádio. Depois quando os competidores do jogo fossem conhecidos na fase final da competição, estes compradores para aquele jogo teriam o direito de adquirir o ingresso de fato quando um dos times que este usuário escolheu fosse de jogar.

Por exemplo, considerando apenas a partida final da Copa do Mundo de 2014. Não se sabe quem vai disputar o jogo, mas certamente será o jogo cujos ingressos serão mais disputados. Considerando que o Estádio do Maracanã (onde será disputada a final), tem capacidade máxima de 73.000 espectadores, então seriam disponibilizados 36.500 prêmios de ingressos para torcedores de cada time, como há 32 seleções disputando a Copa do Mundo, um total de 1.168.000 prêmios (32 seleções $\times$ (73.000 lugares /2)) de ingressos seriam disponibilizados, o valor deste prêmio poderia variar tanto quanto se quisesse, mas para fins de exemplo, considera-se que o valor do ingresso tradicional seria R$500,00, e que o valor do prêmio deste ingresso seria 10% deste valor, portanto R$50,00.

Então caso absolutamente todos os prêmios de ingressos fossem vendidos a renda obtida apenas nesta primeira fase seria de R$58.400.000,00 (1.168.000 prêmios $\times R\$50,00$). Depois quando se as semi-finais forem disputadas e os finalistas forem portanto conhecidos, aqueles torcedores que pagaram por um prêmio para a final daqueles dois times têm o direito de pagar pelo ingresso da final, que tanto poderia custar o valor do ingresso tradicional ou poderia custar o preço do ingresso tradicional memos o valor do prêmio que o torcedor pagou pelo prêmio daquele ingresso, portanto R$450,00 no exemplo.

A renda obtida com a venda de ingressos na segunda fase seria portanto R$32.850.000,00 ($R\$450,00 \times 73.000$ lugares). Assim a renda total obtida neste modelo proposto de venda de ingressos em duas fases para o jogo da final da Copa de 2014 seria de R$ 91.250.000,00 ($R\$58.400.000,00 + R\$32.850.000,00$).a

Caso fosse utilizado o modelo tradicional para o mesmo jogo nas mesmas condições a renda obtida seria de R$36.500.000,00 ($R\$500,00 \times 73.000$ lugares), portanto o método proposto geraria uma renda R$54.750.000,00 maior do que o método tradicional em apenas um jogo do campeonato. É notável a diferença entre as rendas das vendas, mesmo aplicando apenas esta ideia simples de divisão do processo de venda e utilizando a ideia de *Call Options*.

Um efeito positivo deste método novo, é que assim pode-se ter certeza de que quem está assistindo ao jogo, de fato quis ver uma das seleções que estarão jogando, pois fizeram esta opção na primeira fase de vendas, e portanto as chances de o torcedor acabar com um ingresso caro para um jogo que não se quer assistir são zero. E aqueles torcedores que pagaram pelo prêmio do ingresso na primeira fase e porventura seus times não avançaram para o jogo apenas gastaram uma pequena fração do valor nominal do ingresso.

6.2 Utilizando Otimização Combinatória na alocação de cadeiras

É possível otimizar a satisfação total dos torcedores para um determinado jogo mudando a proporção de cadeiras para os torcedores dos dois times. A ideia central do modelo é que se uma cadeira é ocupada por um torcedor de um time forte, ou popular e que portanto cujos ingressos são mais disputados, a satisfação deste torcedor por ter um assento no estádio e ir assistir ao jogo seria maior que um torcedor de um time cujos ingressos são menos disputados.

Então a partir desta ideia é possível desenvolver um modelo de Otmização Combinatória que maximize a satisfação do usuário, calculando a proporção de lugares para os dois times competidores daquele jogo. Logo as variáveis de decisão serão cada assento do estádio, estas variáveis de decisão mostrarão se um dado assento foi alocado para qual time. Deve-se levar em consideração que alocando assentos a mais para um determinado time mais popular geraria insatisfação para os torcedores do time menos popular, assim a função objetivo para maximização da satisfação total dos torcedores de um dado jogo seria:

$$\textit{max satisfação } z = \sum_{i=1}^{C} d_1 x_i + \sum_{i=1}^{C} d_2 y_i - \sum_{i=1}^{C} d_2 x_i - \sum_{i=1}^{C} d_1 y_i,$$

onde x_i e y_i são variáveis de decisão que representam se o i-ésimo assento será ocupado por um torcedor do time 1, ou do time 2 respectivamente, d_1 e d_2 são constantes que representam a vontade, ou satisfação que os torcedores do time 1 e time 2 respectivamente tem de ir ao estádio, estas constantes podem ser calculadas da forma que se achar mais apropriada, podem ser tanto uma pesquisa sobre intenção de ir assistir ao jogo de um time, ou uma medida da força, ou tradição dos times, e C é a capacidade máxima do estádio ou seção do estádio, ou seja a quantidade de lugares disponíveis.

Agora que a função objetivo e variáveis de decisão foram definidas, é necessário definir as restrições do modelo. Uma primeira restrição seria em relação à capacidade máxima do estádio, ou seja a soma das variáveis de decisão (ou assentos do estádio) não pode ultrapassar a capacidade máxima do estádio, portanto

$$\sum_{i=1}^{C} x_i + \sum_{i=1}^{C} y_i \leq C$$

.

Se por um acaso um time ou seleção tiver uma popularidade imensa e disputar um jogo com uma seleção não muito popular, por exemplo, considerando uma possível final da Copa do Mundo de 2014 no Maracanã entre Brasil e Honduras, é muito provável que o resultado da solução do modelo desse a esmagadora maioria dos lugares do estádio para os torcedore do Brasil, mesmo havendo compradores de ingressos para Honduras. Então se faz necessário que se estabeleça uma restrição de disponibilidade mínima de assentos para os torcedores de ambos os times, portanto

$$\sum_{i=1}^{C} x_i \geq D_{min}$$
$$\sum_{i=1}^{C} y_i \geq D_{min},$$

onde D_{min} é uma constante de disponibildade mínima que pode ser definida como se queira.

Deve-se garantir que um dado assento só pode ser ocupado por um único torcedor, portanto

$$x_i + y_i = 1, \forall i(1, 2, \ldots, C)$$

As variáveis de decisão só podem assumir valores entre 0 ou 1, e as "demandas"e capacidade do estádio devem ser maiores que 0, portanto

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \text{ e } y_{ij} \in \{0,1\}, \forall i(1,2,\ldots,C)$$
$$d_1 \geq 0, \text{ e } d_2 \geq 0$$
$$C \in \mathbb{Z} \text{ e } C > 0$$

Temos assim um modelo de otimização que pode ser utilizado para definir a proporção de assentos para um jogo, juntando todas as funções temos:

$$\textit{max satisfação } z = \sum_{i=1}^{C} d_1 x_i + \sum_{i=1}^{C} d_2 y_i - \sum_{i=1}^{C} d_2 x_i - \sum_{i=1}^{C} d_1 y_i$$

restrição de capacidade

$\sum_{i=1}^{C} x_i + \sum_{i=1}^{C} y_i \leq C$

restrições de disponibilidade mínima

$\sum_{i=1}^{C} x_i \geq D_{min}$

$\sum_{i=1}^{C} y_i \geq D_{min}$

restrição de ocupação de assentos

$x_i + y_i = 1, \forall i(1,2,\ldots,C)$

restrições de integralidade e de não-negatividade

$x_{ij} \in \{0,1\}, \text{ e } y_{ij} \in \{0,1\}, \forall i(1,2,\ldots,C)$

$d_1 \geq 0, \text{ e } d_2 \geq 0$

$C \in \mathbb{Z} \text{ e } C > 0$

6.3 Precificação de ingressos com opções

Nesta seção será discutido como refinar o processo de venda de opções diferenciando o preço dos prêmios. Na primeira fase será usado um modelo de venda baseado em opções de compra, ou seja um torcedor (investidor) poderá comprar várias opções de ingressos para os times que quiser ver em determinados jogos à sua escolha.

A precificação dos prêmios dos ingressos deve ser feita, portanto de modo que quanto maior a chance de o torcedor exercer o direito de compra do ingresso, maior deverá ser o preço do prêmio a ser pago, ou seja se o torcedor escolher uma seleção que tem poucas chances de disputar a partida, menor deverá ser o prêmio pago pelo torcedor, do contrário, se o time que o torcedor escolher for um time forte, e portanto ter grandes chances de disputar a partida em questão, o torcedor deverá pagar um prêmio maior.

Baseado em estatísticas, rankings entre outros dados relevantes é possível atribuir uma valor v de 0 a 100 aos times competidores de modo que seleções muito fortes teriam o valor v próximo a 100. Então pode-se limitar os prêmios pagos por um valor R\$$P_{min}$ e um valor R\$$P_{max}$. Dados os preços mínimo e máximo o valor do prêmio a ser pago pelo torcedor que escolher uma seleção com um valor v é dado pela função

$$P(v) = P_{min} + \frac{P_{max} - P_{min}}{100} v.$$

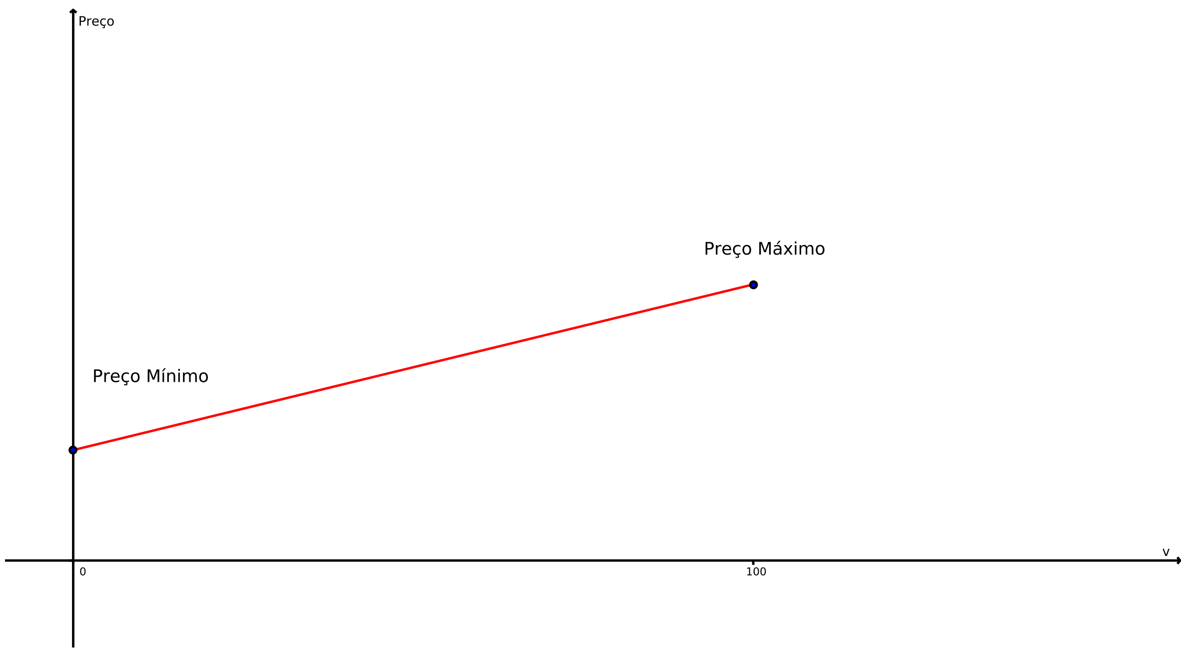

Figura 2: Função de precificação de prêmios de ingressos da primeira fase.

6.4 Venda de ingressos usando Teoria dos Jogos

Nesta seção relacionaremos o modelo de venda de ingressos da segunda fase com a Teoria dos Jogos.

No caso da venda de ingressos da segunda fase, pode-se definir os torcedores que compram ingressos e o vendedor dos ingressos (empresa que lucra com a venda dos ingressos) como os jogadores $g_1, ..., g_n, V_1$, onde $g_1, ..., g_n$ são os compradores e V_1 é o vendedor.

Cada jogador g_i já fez suas pré-compras pagando os prêmios para as seleções que desejou. Seja $w = 32$, e definamos o conjunto $I = \{1, \ldots, w\}$.

Como existem w seleções, através de um estudo feito baseado em dados relevantes de cada seleção, se a seleção j disputar o jogo final, os torcedores que fizeram uma pré-compra acreditando que a seleção j dispute a final pagarão um valor mínimo de ingresso c_j, e valor máximo deste ingresso como sendo $2c_j$, para $j = 1, \ldots, w$.

Para cada jogador g_i, seja $X_i = \{k \in I|$ o jogador g_i pagou o prêmio para a seleção k $\}$. Então, para cada jogador comprador g_i, definimos o seu conjunto de estratégias $S_i = \{s_{ij_i1}|j_i \in X_i\}$, onde a estratégia s_{ij_i} significa que o jogador g_i fez uma pré-compra para assistir a seleção j_i na final . Para o jogador vendedor V_1, ele terá apenas uma estratégia dada por $S_{v_1} = \{s_{V_1}\}$ que é a estratégia de vender todos os ingressos.

Os jogadores compradores g_i desejam pagar o menor valor possível de ingresso. Por outro lado, o jogador vendedor deseja ter o maior lucro possível com estas vendas.

Vamos prosseguir agora definindo a função utilidade de cada jogador. Quanto maior for a demanda por uma seleção k maior será o preço de pré-compra. Então dado um perfil de estratégias $s = (s_{1j_1}, s_{2j_2}, \ldots, s_{ij_i}, \ldots, s_{nj_n}, s_{V_1})$, para cada $k \in \{1, \ldots, w\}$ definimos $t_k(s)$ como sendo o total de jogadores compradores que fizeram a pré-compra da seleção k. Ou seja, se definirmos o conjunto $I_k(s) = \{sij_i, i = 1, \ldots n|j_i = k\}$, teremos $t_k(s) = |I_k(s)|$.

Assim, definimos a função utilidade do jogador comprador g_i como sendo $u_i(s) = u_i\left(s_{1j_1}, \ldots, s_{ij_i}, \ldots, s_{nj_n}, s_{V_1}\right) = c_{j_i} e^{-t_{j_i}(s)}$.

Para o jogador vendedor, dado o perfil de estratégias $s = (s_{1j_1}, , s_{nj_n}, s_{V_1})$ sua função utilidade será $u_{V_1}(s) = u_{V_1}\left(s_{1j_1}, , \ldots, s_{nj_n}, s_{V_1}\right) = \displaystyle\sum_{k=1}^{w} 2c_k - c_k e^{-t_k(s)}$.

As funçôes utilidades dos jogadores compradores representam descontos na compra do ingresso para a seleção escolhida que tais jogadores fizeram uma pré-compra. Por outro lado, a função utilidade do jogador vendedor representa o somatório dos valores de ingressos de todas as seleções.

Encontrando-se o Equilíbrio de Nash em Estratégias Mistas p_* e sabendo-se quais duas seleções vão disputar um jogo, verificaremos quais jogadores fizeram pré-compra para estas duas seleções e utilizaremos as respectivas probabilidades determinadas pelo Equilíbrio de Nash em Estratégias Mistas para fazer um sorteio e determinar quais torcedores assistirão o jogo final.

Se o jogador g_i fez a pré-compra e foi sorteado para assistir o jogo final, ele deverá pagar um valor de ingresso dado por

$$V_i = \sum_{s_{1j_1} \in S_1, \ldots, s_{nj_n} \in S_n} \left[\, p^1_{*j_1} \cdot p^2_{*j_2} \cdots p^n_{*j_n} \right] \left(2 \cdot c_{j_i} - c_{j_i} e^{-t_{j_i}(s)}\right) \tag{1}$$

onde $p_*^i = (p_{*1}^i, \ldots, p_{*m_i}^i)$ é a estratégia mista do jogador g_i obtida do Equilíbrio de Nash. Este valor V_i é interpretado como o valor esperado ótimo que o jogador g_i deve pagar.

6.5 Exemplo de aplicação

Nesta seção será apresentado um exemplo de aplicação da venda de ingressos em duas fases proposto.

6.5.1 Primeira fase

Para simplificar considera-se a venda de ingressos para a final da Copa do Mundo de Futebol, com um estádio com 1000 lugares com um preço de ingresso a R$500,00, e que os lugares do estádio estarão dividos igualmente entre as duas seleções que disputarão o jogo, sendo assim vendidos 500 ingressos para torcedores de cada uma das duas seleções que disputarão o jogo. Note que o mesmo método pode ser aplicado a todos os outros jogos, em que não se sabe quais times os disputarão.

Pelo método tradicional o lucro obtido seria de R$ $500,00 \times$(1000 lugares), totalizando **R$500.000,00**. E a renda da venda dos ingressos para a final terminaria neste valor.

Para o caso da venda de ingressos com opções, considerando que cada torcedor escolheria apenas uma única seleção, e que ao menos 500 torcedores de cada seleção comprariam, o lucro obtido caso, todos os torcedores pagassem o preço mínimo estabelecido de 10% do preço do ingresso tradicional, ou seja R$50,00 o lucro obtido na primeira fase de vendas seria R$50 $\times$ 32 times $\times$ 500 lugares, totalizando **R$800.000,00**.

Como pode-se ver o lucro apenas na primeira fase superaria em R$300.000,00, o método tradicional, é possível igualar a renda obtida no método tradicional repetindo as mesmas condições acima e fazendo o preço mínimo igual a R$31,25, como mostra a figura 3.

Note que no processo de simplicação foi considerado que todos os torcedores pagariam o preço mínimo, mas na realidade, os preços das opções ingressos iriam variar para mais pois seriam atribuidos valores às seleções e utilizando a fórmula para cálculo do valor dos prêmios proposta na seção 6.3, os preços dos prêmios seriam calculados, e seria permitido que mais do que metade da capacidade de ingressos sejam vendidos ou seja mais que 500 ingressos por seleção, além disso é permitido aos torcedores comprarem mais de uma opção, não apenas uma como foi considerado na simplificação, ou seja, apenas a primeira fase já é um método possivelmente mais eficiente de venda de ingressos que o método tradicional.

6.5.2 Segunda fase

Seguindo a modelagem proposta pela Teoria dos Jogos, para fins ilustrativos consideremos 5 torcedores. Cada um deles faz a pré-compra para as duas seleções: Espanha e Brasil. Consideremos os preço mínimos de ingresso para as seleções da Espanha e Bra-

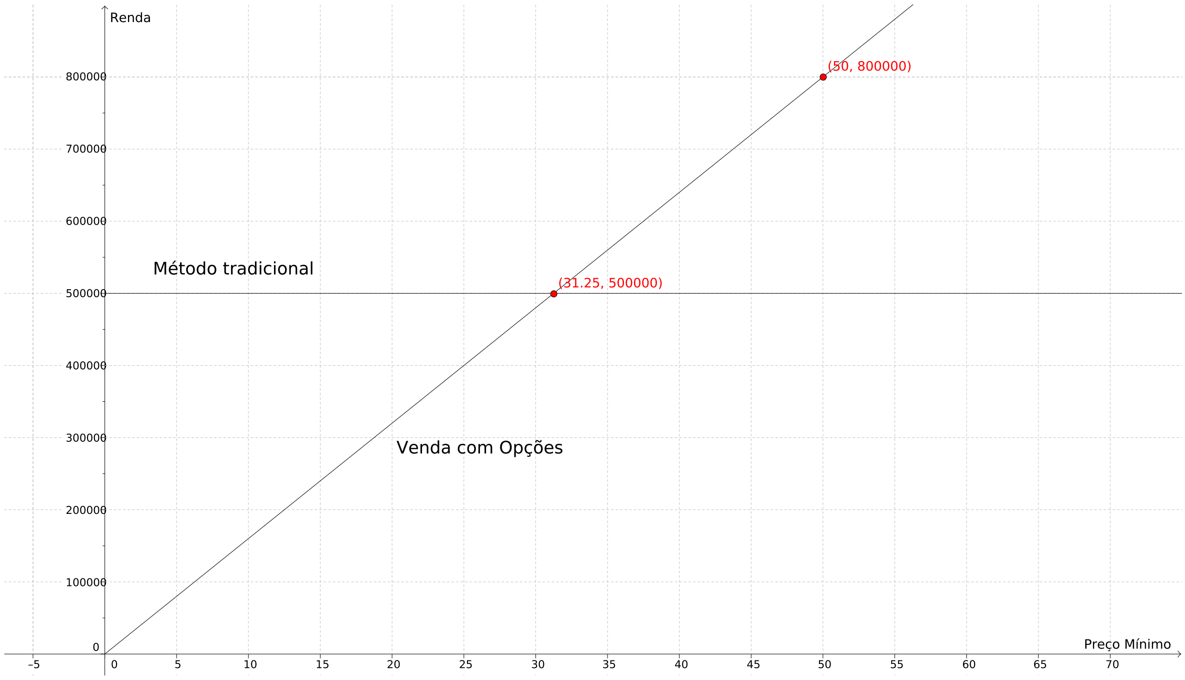

Figura 3: Comparação entre a renda da venda de ingressos utilizando o método tradicional e a venda de ingressos com opções (primeira fase).

sil como sendo c_1 =R$ 400,00 e c_2 =R$ 350,00, respectivamente. Então, teremos um jogo com 5 jogadores compradores $g_1, \ldots, g_5$ e um jogador vendedor, onde cada jogador comprador possui 2 estratégias. Utilizando o software Gambit obtemos 9 equilíbrios de Nash em Estratégias Mistas, do qual escolhemos o seguinte equilibrío a seguir, onde p_E e p_B representam as probabilidades que cada jogador tem para a estratégia de comprar ingresso para ver a Espanha e o Brasil respectivamente:

Jogador	p_E	p_B
g_1	0.5181	0.4819
g_2	0.5181	0.4819
g_3	0.5751	0.4249
g_4	0.5181	0.4819
g_5	0.5181	0.4819

Tabela 1: Equilíbrio de Nash em Estratégias Mistas

Com as probabilidades dadas pelo equilíbrio de Nash é possível fazer um sorteio com os compradores de opções dos times que disputam a partida, e distribuir ingressos respeitando a capacidade do estádio. Podemos obter também valor do ingresso que o torcedor g_i deve pagar usando a equação (1).

Analisando a equação (1), percebe-se que quanto maior for a procura dos torcedores para assistir a uma seleção em um determinado jogo na primeira fase maior será o preço do ingresso para assistir ao jogo na segunda fase, o contrário também ocorrendo. E se o torcedor escolhe muitas seleções na primeira fase, o preço final do ingresso também sobe como esperado, já que as chances de exercer o direito de compra do ingresso (ativo) era maior, assim como ocorre em *call options* no mercado financeiro.

Jogador	Ingresso Espanha	Ingresso Brasil
g_1	R$361,45	R$384,22
g_2	R$361,45	R$384,22
g_3	R$401,21	R$338,77
g_4	R$361,45	R$384,22
g_5	R$361,45	R$384,22

Tabela 2: Preços dos ingressos na segunda fase

7 Conclusões

Como foi visto Otimização Combinatória tem ampla aplicação em diversas áreas inclusive no mundo esportivo, no entanto aplicá-la para fazer uma alocação de cadeiras diferenciada para cada partida distinta gerando maior satisfação para os torcedores é uma inovação, o modelo atual é bem simples e ainda tem amplo espaço para melhoras, no entanto cumpre seus fins.

O modelo de venda de ingressos em duas fases apresentado, supera o modelo tradicional em dois aspectos fundamentais: na renda, e na satisfação do torcedor que vai aos estádios.

Como foi demonstrado a renda da primeira fase de venda de ingressos é alta, mesmo cobrando apenas um pequena fração do preço real do ingresso, já que a venda não se limita diretamente à capacidade do estádio, ou seja, muito mais torcedores têm chance de comprar, e estes podem escolher mais de um time para concorrer a um ingresso para assistir aos jogos de seus times favoritos.

Num segundo momento quando já se sabe que competidores irão disputar uma partida, aqueles que pagaram por um ingresso da primeira fase poderão comprar um ingresso para assistir ao jogo, e a fórmula para o cálculo do preço do ingresso ajusta o preço que o torcedor paga pela demanda pelos ingressos e pelas escolhas que o torcedor fez na primeira fase de venda, ou seja se o torcedor quer assistir a um jogo que tem um público grande ou apostou em muitos times na primeira fase, tal torcedor pagaria um pouco a mais na segunda fase.

Um segundo efeito da aplicação deste modelo seria uma maior satisfação do torcedor, pois ele estaria pagando por um ingresso de um jogo de um time que de fato ele queria ver jogando, já que ele teve de escolher que times ele gostaria de ver na primeira fase da venda. E mesmo os times que escolheu não disputem o jogo, o torcedor teve apenas um pequeno prejuízo pagando pelos prêmios dos ingressos. O que não ocorre no modelo tradicional, onde se compra os ingressos para um jogo em que os times que o disputarão são desconhecidos no momento da venda dos ingressos, e portanto as chances de se terminar com ingressos para times para os quais o torcedor não gostaria de assistir são altas.

Caso os organizadores não desejem fazer o sorteio de ingressos proposto para segunda fase ainda é possível utilizar a venda em duas fases não permitindo o *overbooking* proposto na primeira fase, ou seja, limitando a venda de ingressos para apenas metade da capacidade dos estádios para os torcedores de cada time competidor, e na segunda fase vender os ingressos para os torcedores que pagaram na primeira fase, o que ainda assim geraria tanto uma renda maior quanto a mesma satisfação para os torcedores.

8 Cronograma

2ª ETAPA - 1º SEMESTRE - 2012

Atividades	Mai	Jun	Jul
Leitura de artigos sobre Otimização Esportiva	X	X	
Leitura de artigos sobre Teoria dos Jogos	X	X	
Elaboração do Relatório Final			X

9 Referências

[Balseiro et al. 2011]BALSEIRO, S. et al. *Revenue management of consumer options for sporting events.* [S.l.], 2011.

[Bonomo et al. 2008]BONOMO, F. et al. An application of the traveling tournament problem: the argentine volleyball league. In: *Proc. of the 7th International Conference on the Practice and Theory of Automated Timetabling.* [S.l.: s.n.], 2008.

[Courty 2000]COURTY, P. An economic guide to ticket pricing in the entertainment industry. *Recherches Économiques de Louvain/Louvain Economic Review*, JSTOR, p. 167–192, 2000.

[Dilkina e Havens 2004]DILKINA, B. N.; HAVENS, W. S. The us national football league scheduling problem. In: *AAAI.* [S.l.: s.n.], 2004. p. 814–819.

[Happel e Jennings 2001]HAPPEL, S. K.; JENNINGS, M. M. Creating a futures market for major event tickets: Problems and prospects. *Cato J.*, HeinOnline, v. 21, p. 443, 2001.

[Krautmann e Berri 2007]KRAUTMANN, A. C.; BERRI, D. J. Can we find it at the concessions? understanding price elasticity in professional sports. *Journal of Sports Economics*, Sage Publications, v. 8, n. 2, p. 183–191, 2007.

[Kyngäs e Nurmi 2009]KYNGÄS, J.; NURMI, K. Scheduling the finnish 1st division ice hockey league. In: *FLAIRS Conference.* [S.l.: s.n.], 2009.

[Rasmussen e Trick 2008]RASMUSSEN, R. V.; TRICK, M. A. Round robin scheduling–a survey. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 188, n. 3, p. 617–636, 2008.

[Urrutia e Ribeiro 2009]URRUTIA, S.; RIBEIRO, C. Scheduling the brazilian soccer tournament by integer programming maximizing audience shares under fairness constraints. In: *23 rd European Conference on Operation Research, Bonn, Alemania, del.* [S.l.: s.n.], 2009. v. 5.