UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS – UFAM

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO, AGRICULTURA E AMBIENTE – IEAA

LICENCIATURA EM CIÊNCIAS: MATEMÁTICA E FÍSICA

EDEM CORDEIRO DE AGUIAR

NOÇÕES BÁSICAS SOBRE DERIVADAS PARA INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA FUNÇÃO QUADRÁTICA: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO MÉDIO

MONOGRAFIA

HUMAITÁ – AM

2019

EDEM CORDEIRO DE AGUIAR

NOÇÕES BÁSICAS SOBRE DERIVADAS PARA INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA FUNÇÃO QUADRÁTICA: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO MÉDIO

Monografia apresentada como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Ciências: Matemática e Física, do Instituto de Educação, Agricultura e Ambiente – IEAA, da Universidade Federal do Amazonas – UFAM.

Orientador: Prof. Péricles Vale Alves

HUMAITÁ – AM

2019

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

A282n

Aguiar, Edem Cordeiro
Noções básicas sobre derivadas para interpretação geométrica da função quadrática: : uma proposta para o ensino médio / Edem Cordeiro Aguiar. 2019
41 f.: il. color; 31 cm.

Orientador: Pericles Vale Alves
TCC de Graduação (Licenciatura Plena em Ciências - Matemática e Física) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Função Quadrática. 2. Interpretação Geométrica. 3. Derivadas. 4. GeoGebra. I. Alves, Pericles Vale II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

Dedico este trabalho a minha família!

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, gostaria de agradecer a Deus.

A minha família, pelo carinho, incentivo e total apoio em todos os momentos da minha vida.

Ao meu orientador, que me mostrou os caminhos a serem seguidos e pela confiança depositada.

A minha namorada que sempre esteve ao meu lado.

A todos os professores do Instituto, que ajudaram de forma direta e indireta na conclusão deste trabalho e para minha formação acadêmica.

Uma força menor aplicada
persistentemente é igual a uma força
maior. (Leibniz).

RESUMO

AGUIAR, Edem Cordeiro. **NOÇÕES BÁSICAS SOBRE DERIVADAS PARA INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA FUNÇÃO QUADRÁTICA: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO MÉDIO**. 2019. 40 f. Monografia (Licenciatura em Ciências: Matemática e Física) – Universidade Federal do Amazonas – UFAM. Humaitá – AM, 2019.

A matemática é uma ciência ampla em conceitos fundamentais que embasam teorias capazes, por exemplo, de gerar inovações tecnológicas para benefício e evolução da sociedade. O presente trabalho tem como objetivo, compreender como o conhecimento intuitivo de derivadas pode contribuir na interpretação geométrica da função quadrática no ensino médio. Como metodologia, optou-se pela abordagem descritivo-exploratória com intervenção, isto é, é vital lançar mão da aplicação de questionários com questões abertas e fechadas e regências. No primeiro questionário pode-se verificar o nível da turma com respeito ao conceito de função e a partir dele, regrar a maneira da abordagem em sala. Com o segundo questionário, após a intervenção em sala de aula com as regências, pode-se constatar o grau de compreensão dos conceitos abordados na pesquisa, bem como a aceitação do método utilizado para estudar a interpretação geométrica da função quadrática, distinto do método, geralmente, usado nesta etapa da vida acadêmica. Portanto, com os resultados obtidos, advogamos que este método, além de poderoso na interpretação geométrica, teve total aceitação pela turma que participou da ação empregada por esta pesquisa.

Palavras-chave: Função Quadrática. Interpretação Geométrica. Derivadas. GeoGebra.

ABSTRACT

AGUIAR, Edem Cordeiro. **BASIC CONCEPTS ON DERIVATIVES FOR GEOMETRIC INTERPRETATION OF QUADRATIC FUNCTION: A PROPOSAL FOR MIDDLE SCHOOL**. 2019. 40 p. Monography (Graduation in Science: Mathematics and Physics in) – Federal University of Amazonas – UFAM. Humaitá – AM, 2019.

The present work aims to understand how the intuitive knowledge of derivatives can contribute to the geometric interpretation of the quadratic function in secondary education. As a methodology, the descriptive-exploratory approach with intervention was chosen, that is, it is vital to use questionnaires with open and closed questions and regencies. In the first questionnaire one can verify the level of the class with respect to the concept of function and from it, to govern the way of the approach in room. With the second questionnaire, after the intervention in the classroom with the regencies, one can verify the degree of comprehension of the concepts approached in the research, as well as the acceptance of the method used to study the geometric interpretation of the quadratic function, different from the method, usually used at this stage of academic life. Therefore, with the obtained results, we advocate that this method, besides being powerful in the geometric interpretation, was totally accepted by the group that participated in the action employed by this research.

Keywords: Quadratic Function. Geometric Interpretation. Derivatives. GeoGebra.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A matemática está presente nas mais diversas áreas do conhecimento científico, ou seja, praticamente tudo permeia em torno de números, medidas, figuras geométricas e outros conceitos inerentes a esta ciência (RODRIGUES, 2004). Por exemplo, as crianças já tem contato com noções matemáticas no seu cotidiano bem antes de dar início ao período escolar, ou seja, aprendendo matemática, sem sequer perceber, numa simples brincadeira com bolinhas de gude. Todavia, na escola, a matemática aparece, por exemplo, ao dividir a merenda escolar com os amigos ou ao responderem a sua idade com os dedos.

A matemática deve estar presente na vida das crianças com objetivo de ampliar suas habilidades e promover a capacidade de resolver problemas, argumentar com lógica, levantar questionamentos e pensar criticamente. A introdução dos conceitos matemáticos na vida dos pequenos é o caminho para favorecer seu desenvolvimento intelectual, social e emocional.

Além disso, a matemática é uma ciência fundamental para diferentes aspectos da vida contemporânea, desde os avanços tecnológicos a situações e necessidades cotidianas (CHASSOT, 1995). O conhecimento, ainda que básico, dos conceitos matemáticos desde os primeiros anos de vida será determinante na formação de indivíduos que, quando adultos, saberão lidar melhor com as diferentes formas de tecnologia, terão maior capacidade para deliberar, questionar decisões sociais e financeiras que dizem respeito a toda a sociedade, além de ocupar-se com mais naturalidade das situações cotidianas que envolvem números.

Por exemplo, quando se chega ao Ensino Médio, o adolescente se depara com o conceito de uma função, que é considerado um dos conceitos mais importantes e fundamentais em matemática, pois na antiguidade já vinha sendo utilizado para solucionar problemas relacionados à dependência entre duas quantidades, atualmente conhecidos por variáveis. Este conceito tem uma gama de aplicações importantes que podem ser traduzidas de forma direta ao cotidiano dos alunos, a saber: numa simples brincadeira de futebol pode-se observar o comportamento parabólico de uma bola, ao ser cobrado um escanteio ou na cobrança de uma falta antes do início da grande área.

Os exemplos acima, são passíveis de formulações matemáticas, sendo que, a mais simples entre elas é a modelagem pela função quadrática ou polinomial do segundo grau. Esse conceito têm diversas aplicabilidades em distintas áreas do conhecimento, sendo fortemente empregado em problemas de física, como por exemplo, no estudo do movimento oblíquo.

A função quadrática tem como princípio fundamental a resolução da equação do segundo grau e, problemas matemáticos que recaem na equação do segundo grau, são considerados problemas clássicos em matemática. Ela é ensinada na educação básica utilizando a equação resolutiva do segundo grau propondo ao estudante, por exemplo, memorizar as fórmulas para se obter o vértice da parábola, além de outras fórmulas pertinentes aos problemas relativos a este conceito.

Uma outra ferramenta de fundamental importância para a resolução de problemas e aplicações nas áreas de ciências da natureza, engenharias e tecnologias, é o cálculo diferencial e integral, desenvolvido por Arquimedes[1], passando por Newton[2] e refinado por Leibniz[3] (SILVA; SOUSA, 2015).

O cálculo diferencial não está previsto no programa atual do ensino médio, apesar de alguns anos atrás estar presente em alguns livros deste nível, como por exemplo, na referência (DANTE, 2010) que integrou o Programa Nacional do Livro Didático no período de 2012 a 2014. Porém, (GODOY; PIRES, 2004) cita que nos países europeus como a França, Espanha e Portugal o conceito de derivadas e aplicações faz parte do conteúdo obrigatório do ensino médio.

Entretanto, introduzir o cálculo no ensino médio não é tarefa fácil muito menos simples, muito embora ele possa auxiliar na compreensão de gráficos de funções.

De acordo com Lopes

> [...] em todos os países, educadores e matemáticos buscam encontrar métodos que visem facilitar o entendimento do Cálculo por parte dos estudantes. Muito tem se conseguido, mas é importante dizer que nenhuma fórmula mágica foi encontrada até hoje. (MACHADO et al., 2002):

---

1 Arquimedes de Siracusa (287 a.C. – 212 a.C.) foi um matemático, físico, engenheiro, inventor, e astrônomo grego. Embora poucos detalhes de sua vida sejam conhecidos, são suficientes para que seja considerado um dos principais cientistas da Antiguidade Clássica.

2 Foi um astrônomo, alquimista, filósofo natural, teólogo e cientista inglês, mais reconhecido como físico e matemático. Sua obra, Princípios Matemáticos da Filosofia Natural é considerada uma das mais influentes na história da ciência

3 Foi um proeminente polímata e filósofo alemão e figura central na história da matemática e na história da filosofia. Sua realização mais notável foi conceber as ideias de cálculo diferencial e integral, independentemente dos desenvolvimentos contemporâneos de Isaac Newton

Além disso, o movimento oblíquo de objetos massivos estudado em cinemática, abre um ponto de conexão entre a física e matemática promovendo a interdisciplinaridade. Esta ponte entre a matemática e a física pode ser também a conexão entre o conceito de derivadas e aplicações na física vistas no ensino médio. Por exemplo, o estudo da função quadrática em sua interpretação geométrica pode ser explorada a partir do conceito informal de derivadas, isto é, a derivada da função em cada ponto é a assinatura da velocidade do objeto em cada instante de tempo.

Desta forma, este trabalho objetiva-se em compreender como o conceito de derivadas pode contribuir na interpretação geométrica da função quadrática com aplicações no estudo da cinemática.

2 REVISÃO DA LITERATURA

2.1 UMA BREVE HISTÓRIA DO CÁLCULO DIFERENCIAL

A história nos conta, que o ano 1642 nasceu um prodígio para a ciência, chamado Isaac Newton (FILHO, 2000). Ele nasceu com talento nato para a matemática, ingressando no *Trinity Collegeem* 1661, ao passar quatro anos nesse recinto educacional, teve um estudo aprofundado sobre a matemática, e com eles vieram suas contribuições nessa área. Porém, nessa época houve no continente europeu uma epidemia que fez a instituição *Trinity College* ser desativada. Esse acontecimento fez com que Newton voltasse ao seu lugar de origem, onde realizou inúmeras outras contribuições, sendo uma delas a criação cálculo diferencial.

A construção do conhecimento não é obra de gênios isolados, ao passo que também é uma junção de pensamentos, então cabe colocar a figura de um outro grande estudioso na área do cálculo, Pierre de Fermat (1601 – 1665). Esse foi reconhecido por Laplace (1749 – 1827) como o criador do cálculo diferencial já que no ano de 1629 criou uma maneira de encontrar máximos e mínimos, assim esse procedimento ficou conhecido como "método para máximos e mínimos" (FILHO, 2000). Devido a esse feito realizado por Fermat, atualmente o método é reconhecido pelo termo diferenciação. Porém, Fermat não avançou tanto, pois não tinha um ferramental denominado limite. Entretanto, sua formulação foi apreciada por Isaac Newton, pois trata-se de um estudo diretamente ligado a abordagem do cálculo diferencial.

Ainda de acordo com Santana Filho (2000), Newton publicou em 1687, que é considerado por muitos, uma das maiores obras para o campo científico, sendo de sua autoria, a tão conhecida obra *Philosophia e Naturalis Principia Mathematica* (Princípios Matemáticos da Filosofia Natural). Vale salientar que nessa época houve disputa, entre pessoas unidas a Isaac Newton e outras ligadas a Gottfried Wilhelm Leibniz, a respeito de quem formulou o cálculo. Com o passar do tempo, a história concedeu a vitória a Newton, contando que sua formulação sobre o cálculo veio dez anos antes que Leibniz.

Segundo (ÁVILA, 2007), o conceito de derivadas, formulado por Newton, Leibniz e Fermat é um ferramental do cálculo diferencial, e tornou-se de grande importância na construção da matemática no século XVII, sendo esse instrumento um suporte fundamental para a ciência moderna.

Atualmente, o ensino do cálculo está concentrado na formação do ensino superior. Em cursos de engenharias, física, matemática, entre outros. Alguns autores recomendam que o ensino dessa ferramenta matemática se inicie ainda na escola básica, ainda que de forma intuitiva, apenas para que o estudante tenha o primeiro contato com o cálculo diferencial.

O ensino de cálculo diferencial deveria ser aplicado no ensino médio, mas ressalta que no ensino médio deve ser apresentado de forma simples e discreta, de maneira que o discente entenda a importância desse conteúdo e sua vasta aplicabilidade. Assim diferenciando da forma que é apresentado no ensino superior (ÁVILA, 2007).

Segundo Ávila (2007) é de grande satisfação encontrar autores que apresentam cálculo na terceira série ensino médio. Mas, seria muito mais viável ser ensinado no início do ensino médio, o que traria uma melhor performance na abordagem de funções e no entendimento do estudo de movimentos na área da física.

Dante afirma que

> [...] compreender o comportamento de uma função qualquer em termos de sua variável independente, sem que haja necessariamente o conhecimento prévio de seu gráfico, como por exemplo, conhecer intervalos no qual a função cresce ou decresce, pontos de máximos e mínimos, dentre outros atributos, estes são objetos que surgem via conceitos de derivadas (DANTE, 2010).

A inserção do conceito de derivada no ensino básico é fundamental, pois lá habita um número expressivo de aplicações neste nível (BARBOSA; CONCORDIDO; GODINHO, 2016). Por exemplo, na 1ª série do ensino médio, o estudo do movimento de partículas em uma ou duas dimensões são tópicos abordados, com a inserção do conceito de derivadas, existe a possibilidade de potencializar o aprendizado destes eixos temáticos com o uso do livro didático.

Existem inúmeras maneiras para resolver um mesmo problema matemático (SANTOS, 2013), e isso pode ser trabalhado em sala de aula como atividades alternativas, possibilitando ao profissional uma variedade de opções, não obstante, fazer uso de derivadas para interpretar gráfico de funções também é uma forma de conduzir ao aluno uma nova maneira de pensar.

2.2 CONCEITO DE UMA FUNÇÃO

Função é um dos mais importantes conteúdos existentes na matemática, presente nas mais diversas áreas do conhecimento. Assim, o conceito intuitivo de uma função está relacionado com à ideia de associar um dado elemento com outro, ou seja, dados dois conjuntos não vazios, X e Y, a estrutura que permite relacionar as informações dos elementos de X aos dados de Y é a ideia de uma função. Porém, é válido quando cada objeto de X associa a um único objeto de Y, para obter uma função de X em Y. Assim, a definição formal é escrita da seguinte maneira:

> **Definição:** *Dados os conjuntos X, Y, uma função $f : X \longrightarrow Y$ (lê-se "uma função de X em Y") é uma regra (ou conjunto de instruções) que diz como associar a cada elemento $x \in X$ a um elemento $f(x) = y \in Y$. O conjunto X chama-se domínio e Y é o contradomínio da função f. Para cada $x \in X$, o elemento $f(x) \in Y$ chama-se imagem de X pela função f, ou valor assumido pela função f no ponto $x \in X$. Escreve-se $x \longrightarrow$ f(x) para indicar que f transforma (ou leva) x em $f(x)$ (LIMA et al., 2006).*

2.3 FUNÇÃO POLINOMIAL DO SEGUNDO GRAU

Em matemática, as funções polinomiais são empregadas para modelar diversos fenômenos reais. Em física, por exemplo, conjuntos especiais de funções polinomiais nomeadas como os polinômios de Legendre, Laguerre e Hermite são as soluções para alguns problemas muito importantes. Em geral, escrevemos esses termos em ordem decrescente do poder da variável x, da esquerda para a direita, isto é,

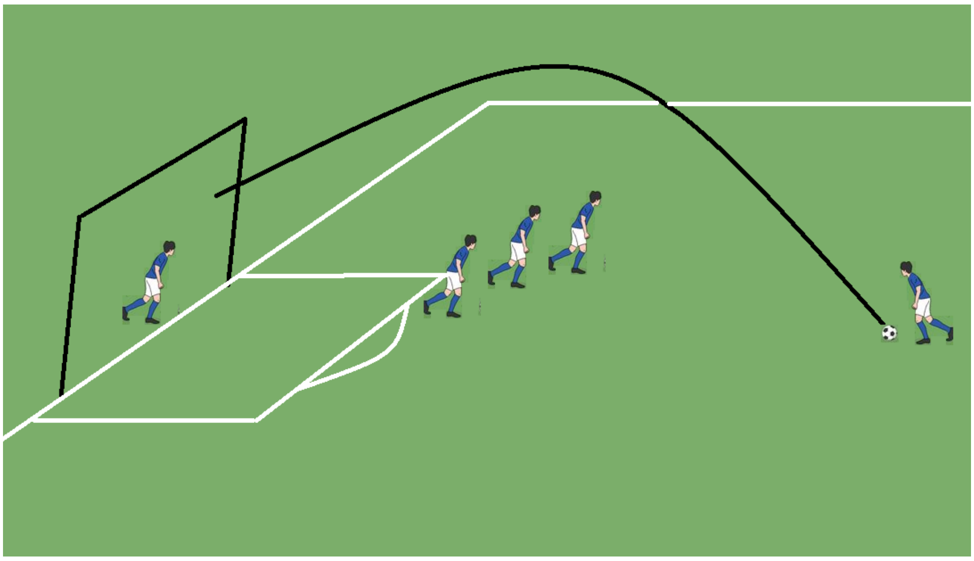
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0. \tag{1}$$

Desta forma, ao observar um certo jogador de futebol realizando a cobrança de uma falta, sabe-se que uma das maneiras de ele fazer o gol é lançando a bola por cima da barreira e, desta forma, a trajetória que a bola descreverá será uma parábola conforme ilustrado na Figura (1) .

Definição: *Uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ chama-se quadrática quando existem números reais a, b, c com $a \neq 0$ tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$.* (LIMA et al., 2006)

Ainda de acordo com Lima et al. (2000), o gráfico da função quadrática consiste em uma parábola, e é conceituado da seguinte maneira: "Dados um ponto F e

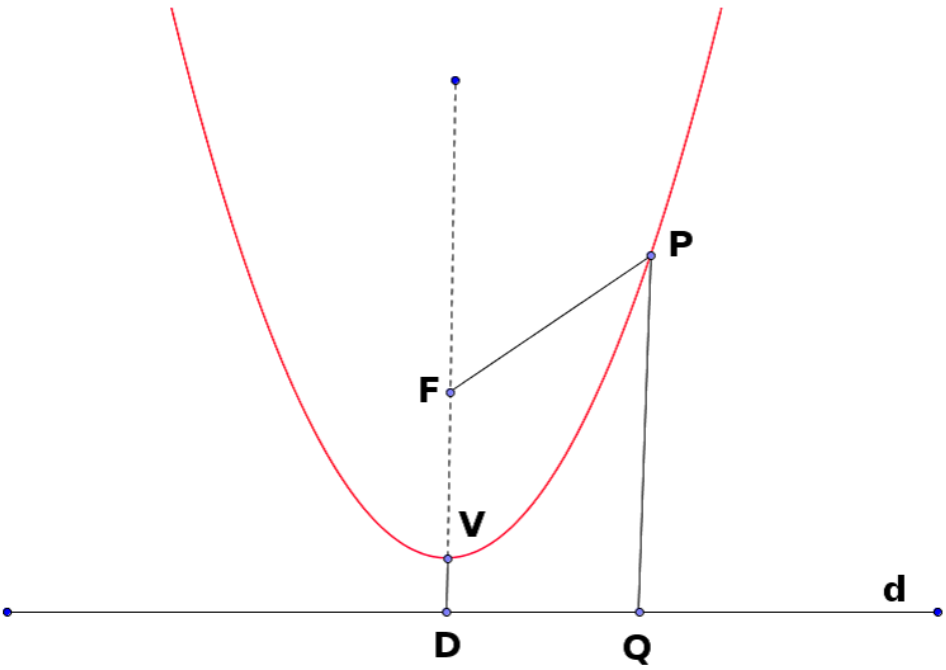
Figura 1 – Trajetória da bola de futebol na cobrança de falta próxima a grande área.



Fonte: O Autor (2019).

uma reta d que não o contém, a parábola de foco F e diretriz d é o conjunto dos pontos do plano que distam igualmente de F e de d”. Em relação a reta, ela é perpendicular a diretriz, e o onde o foco fica centrado chama-se eixo da parábola conforme ilustrado na Figura (2). E o ponto que tem a menor proximidade da diretriz é conhecido como vértice da parábola. Ele consiste no ponto médio do segmento, onde sua delimitação constitui o foco e a interseção do eixo com a diretriz.

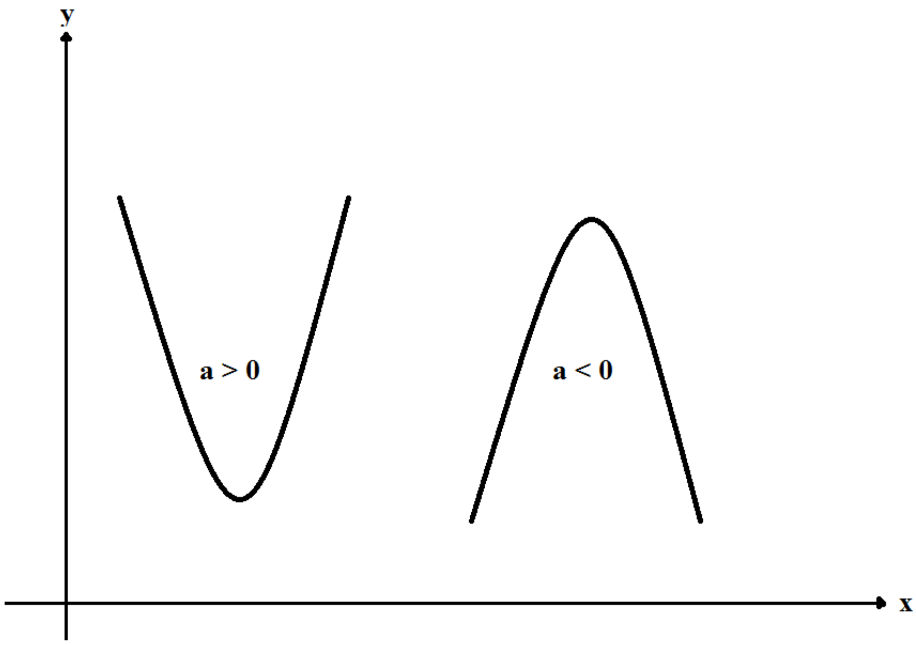
Figura 2 – Gráfico de uma função polinomial do segundo grau.



Fonte: O Autor (2019).

Ainda com relação ao gráfico da função quadrática, se $a > 0$, então a concavidade da parábola é voltada para o sentido positivo do eixo OY e se $a < 0$, então a concavidade da parábola é voltada para o sentido negativo do eixo OY como mostrado na Figura (3).

Figura 3 – Concavidade da função polinomial do segundo grau.



Fonte: O Autor (2019).

Além disso, para uma função $f(x) = ax^2 + bx + c$ os pontos que interceptam o eixo OX são tais que $ax^2 + bx + c = 0$ (PAIVA, 2013), ou seja:

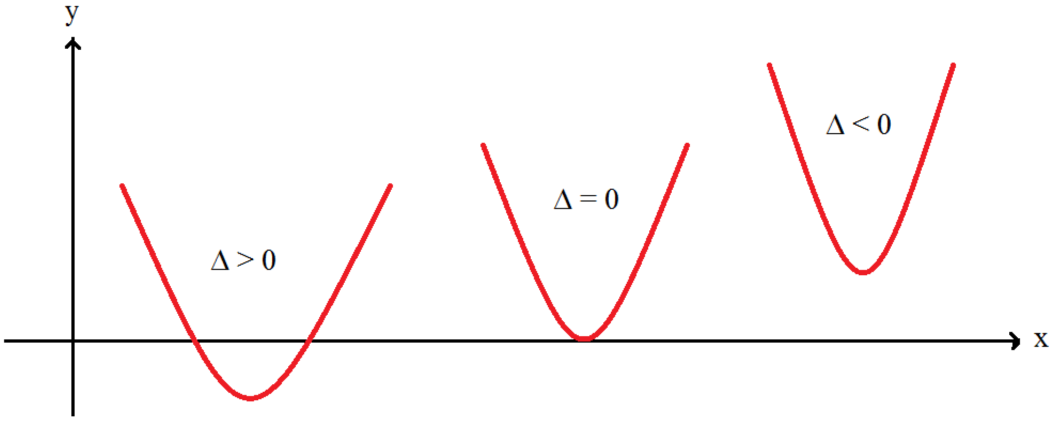
- se $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, existem $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, distintos, satisfazendo a propriedade $f(x) = 0$;
- se $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, existem $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, iguais, satisfazendo a propriedade $f(x) = 0$;
- se $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, não existem $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, satisfazendo a propriedade $f(x) = 0$.

Assim, conhecendo o valor de Δ, sabe-se imediatamente quantas raízes reais a equação do segundo grau admite. Logo, estas raízes são determinadas através da relação

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \tag{2}$$

sendo estas representadas conforme a Figura (4).

Figura 4 – Gráfico representativo das raízes de uma função quadrática.



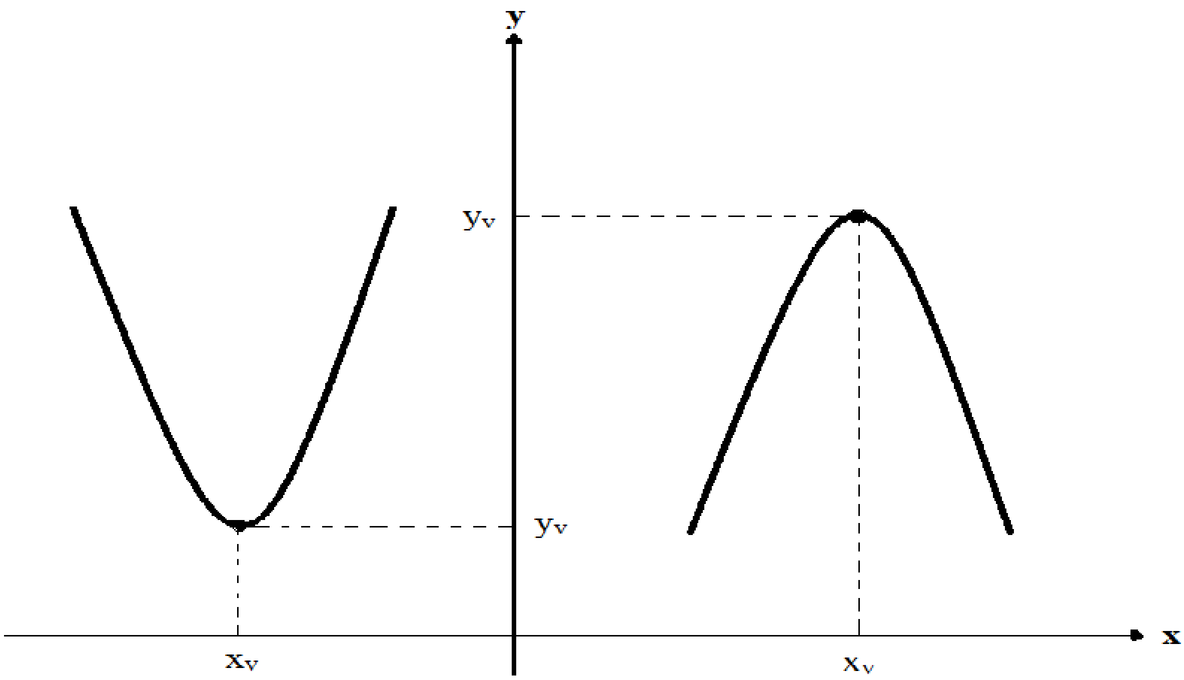
Fonte: O Autor (2019).

De acordo Paiva (2000), o ponto da parábola que intercepta o eixo OY, encontra-se atribuindo zero a variável x da equação, com isso, segue que $y = c$.

Outro objeto importante do gráfico da função quadrática é o chamado vértice da parábola, V, que de acordo com Paiva (2010), é obtido pelas equações $x_v = -b/2a$ e $y_v = -\Delta/4a$ chamadas coordenadas do vértice da parábola.

Desta forma, se $a > 0$ diz-se que o vértice V da parábola é um ponto de mínimo, caso contrário um ponto de máximo como ilustrado na Figura (5).

Figura 5 – Gráfico representativo dos pontos de máximo e mínimo de uma função quadrática.

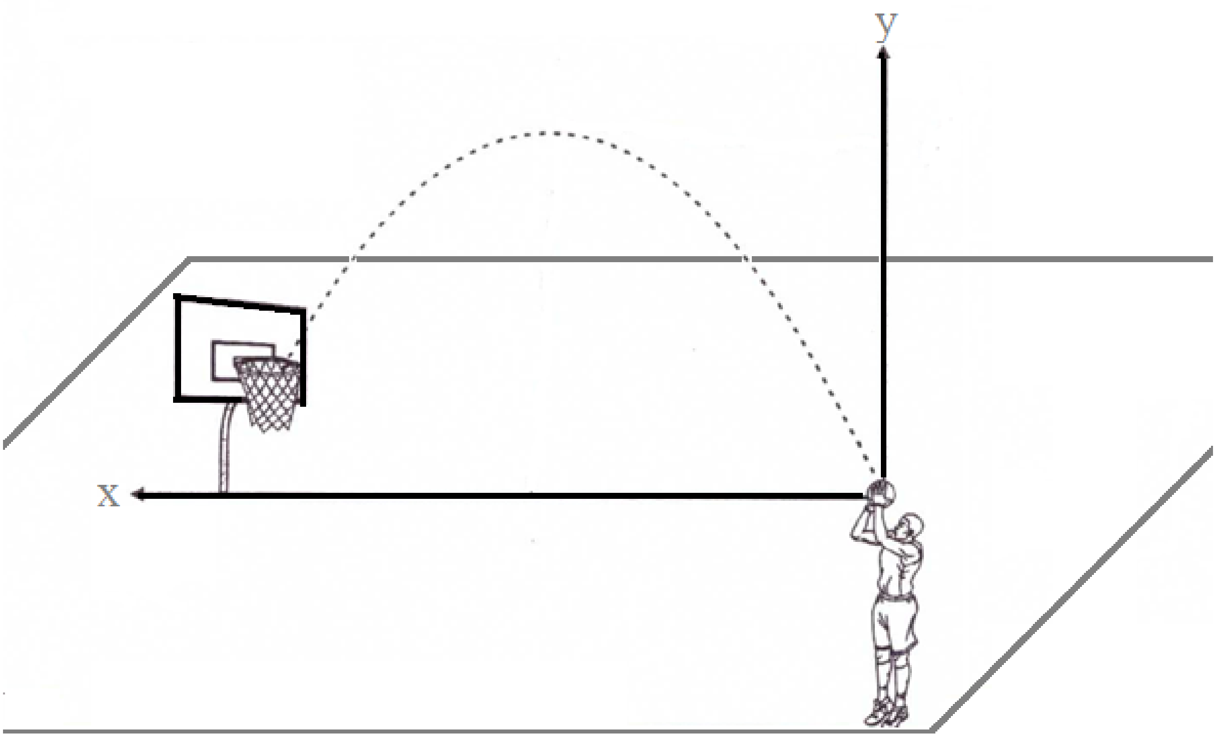


Fonte: O Autor (2019).

2.4 CINEMÁTICA: LANÇAMENTO HORIZONTAL

Lançamento oblíquo é um movimento composto de um movimento uniforme, na direção horizontal, e de um movimento acelerado, na vertical. Esses movimentos ocorrem simultaneamente. A cobrança de um escanteio no futebol; o arremesso de uma bola de basquete, Figura (6), podem ser considerados como bons exemplos de lançamento oblíquo.

Figura 6 – Trajetória de uma bola de basquete arremessada em direção a cesta.



Fonte: O Autor (2019).

Para descrever este movimento, precisa-se recordar da equação que relaciona a variação da posição $\Delta S = S - S_0$ com S sendo posição final e S_0 a posição inicial de um objeto massivo em função do tempo dado pela relação

$$\frac{\Delta S}{t^2} = \frac{\alpha}{2}, \tag{3}$$

onde α é a aceleração que o objeto sente devido a ação da gravidade e t é o tempo. Desta forma, temos que

$$S - S_0 = \frac{\alpha t^2}{2}, \tag{4}$$

desde que a velocidade inicial do objeto seja $v_0 = 0$ m/s (PIETROCOLA et al., 2011).

Porém, se o objeto não parte da origem da trajetória e nem do repouso, a função horária da posição é dada por (PIETROCOLA et al., 2011)

$$S(t) = S_0 + v_0 t + \frac{\alpha t^2}{2}. \tag{5}$$

2.5 SOFTWARE LIVRE *GEOGEBRA*

O software GeoGebra pode é uma ferramenta que pode ser utilizada no ensino para alunos do Ensino Médio até a graduação. O seu uso promove um ensino orientado para o problema, experiências matemáticas e descobertas dentro e fora da sala de aula (HOHENWARTER; FUCHS, 2004).

No que se refere a esta ferramenta tecnológica, segundo Bazzo (2009), cita que o Geogebra é um *software* que faz parte do pacote matemático, e foi formulado para a educação matemática nas escolas, seu criador foi Markus Horenwarter da Universidade de Salzburg. Este programa é constituído por três partes [1]:

> Janela algébrica, janela de gráficos e Linha/entrada de comandos. Na Janela da esquerda ou janela de álgebra, aparecem indicações dos objetos (coordenadas de pontos, equações de retas, de circunferência, comprimentos, áreas, etc.). A janela de gráficos apresenta um sistema de eixos coordenados e uma malha de pontos. A linha/entrada de comandos, é destinada à entrada dos comandos/condições que definem os objetos, (BAZZO, 2009).

Pode-se ver que esta ferramenta é muito poderosa, porém pouco utilizado como material de apoio pedagógico pelos professores [2], por exemplo, para a construção de gráficos.

> O problema da reta tangente, por sua vez, pode ser abordado a partir do conceito de reta secante ao gráfico de uma função, fazendo com que a reta secante se aproxime cada vez mais da posição tangente, na medida em que considerarmos intervalos cada vez menores no domínio dessa função, (MOLON; FIGUEIREDO, 2015).

Assim, vale observar os seguinte pontos:

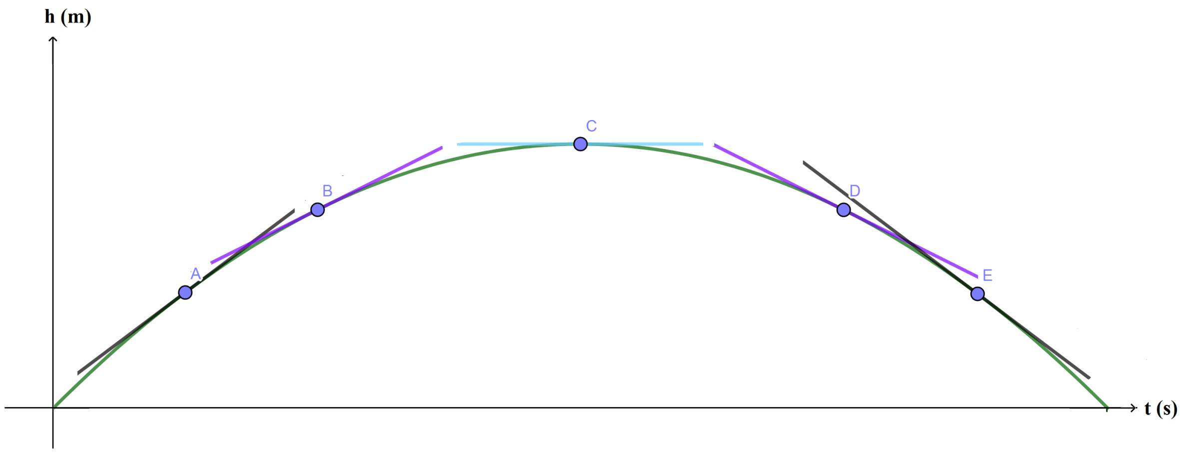
- pode-se construir o gráfico de uma função quadrática em milésimos de segundos;
- para cada ponto, pode-se traçar uma reta tangente, sem muitas dificuldades;

[1] Para aprender a utilizar este software: https://wiki.geogebra.org/pt/Manual

[2] Isto se dá por conta da infraestrutura das escolas públicas do país.

Ou seja, para uma curva parabólica que descreva o comportamento de um lançamento de uma bola de basquete, cuja concavidade é voltada para baixo, pode-se mostrar no programa as retas tangentes ponto a ponto na curva. Além disso, a declividade de cada reta tangente, que está associada a primeira derivada da função que descreve a curva, ajuda na compreensão da velocidade da bola para cada instante de tempo na direção vertical como ilsutrado na Figura (7).

Figura 7 – Alguns pontos de tangência na parábola.



Fonte: O Autor (2019).

2.6 O CONCEITO DE DERIVADAS

Considere uma função $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e um ponto $x_0 \in I$. Então, a razão

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{6}$$

é chamada de derivada da função f em x_0 a medida que Δx se torna tão pequeno, ou seja, se aproxima de zero (DANTE, 2010). De modo mais formal, temos que:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0). \tag{7}$$

Ainda de acordo com Dante (2010), quando se trata da derivada de uma função $y = f(x)$ em um ponto qualquer x, pertencente ao domínio da função, denomina-se apenas como a derivada da função como f'.

O estudo sobre as derivadas é muito amplo e cheio de detalhes, porém será de interesse para este trabalho promover noções de derivadas das funções constante e da função polinomial de até grau dois. Assim, seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função definida por $f(x) = \alpha x^n$ onde α é uma constante real não nula e $n \in \mathbb{N}$, então

$$f'(x) = n\alpha x^{n-1} \tag{8}$$

é a primeira derivada da f e

$$f''(x) = n(n-1)\alpha x^{n-2} \tag{9}$$

é a segunda derivada da f.

2.7 APLICAÇÃO DAS DERIVADAS NO ESTUDO DO MOVIMENTO OBLÍQUO

Em cinemática, a posição de uma partícula de massa m pode ser determinada a cada instante de tempo t, a equação que produz as informações da posição em função do tempo é chamada de equação horária da posição (ALMEIDA et al., 2011). Uma partícula que se desloca de uma certa posição S_0 no instante t_0 até uma posição S em t, define a grandeza chamada de velocidade escalar média dada por

$$v_m = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S - S_0}{t - t_0}, \tag{10}$$

onde ΔS e Δt são as variações da posição e do tempo, respectivamente.

Por outro lado, a velocidade escalar no instante $t = t_0$ é dada por

$$v(t_0) = S'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{t \to t_0} \frac{S - S_0}{t - t_0}. \tag{11}$$

3 METODOLOGIA DA PESQUISA

Este trabalho se propôs investigar, por meio da abordagem descritivo-exploratória com intervenção, como o conceito intuitivo de derivadas pode contribuir no aprendizado referente ao estudo gráfico da função quadrática e suas aplicações práticas. O alvo da pesquisa de que se trata este trabalho, foi uma turma composta por 41 alunos do Curso Técnico de Nível Médio em Administração na forma integrada, do Instituto Federal do Amazonas – IFAM, *campus* Humaitá, situada no Sul do Amazonas.

A pesquisa descritiva "tem como objetivo primordial a descrição das características de determinada população ou fenômeno ou o estabelecimento de relações entre variáveis" (GIL, 2008). Assim, uma proposta para a investigação, foi através de aplicação de questionários objetivos e abertos e, essa "técnica de investigação composta por um conjunto de assuntos que são submetidas a pessoas com o propósito de obter informações sobre conhecimentos, crenças, sentimentos, valores, interesses, expectativas, aspirações, temores, comportamento presente ou passado etc." (GIL, 2008).

Por outro lado, a pesquisa exploratória "é realizada especialmente quando o tema escolhido é pouco explorado e torna-se difícil sobre ele formular hipóteses precisas e operacionalizáveis" (GIL, 2008). De fato, sabe-se que atualmente o conceito de derivadas não é abordado no ensino básico, ou seja, não era possível de antemão, afirmar com segurança se este conceito, ainda que apresentado de maneira intuitiva, pudesse ser efetivo no ensino-aprendizagem no estudo gráfico da função quadrática.

Desta forma, esta pesquisa se empenhou a partir da intervenção com regências em sala de aula, investigando a abordagem em prol da educação básica. Neste contexto, "as pesquisas descritivas são, juntamente com as exploratórias, as que habitualmente realizam os pesquisadores sociais preocupados com a atuação prática" (GIL, 2008).

Assim, aconteceram oito encontros, cada um com duração de cem minutos, que ao todo contabilizou-se oitocentos minutos, os mesmos foram efetuados em dias distintos, sendo que no primeiro e no oitavo aplicou-se os questionários I e II (Apêndice A e B), nos demais realizaram-se as regências. No primeiro momento, foi aplicado um questionário para averiguação do conhecimento adquirido sobre a função. Na sequência, abordandaram-se os conceitos de função e função quadrática até a construção da interpretação geométrica desta função. Nesta próxima etapa, abordou-se o conceito informal de derivadas e derivadas da função quadrática. No momento seguinte, ilustrou-se a interpretação geométrica da derivada da função quadrática. No próximo passo, apresentou-se a conexão entre os conteúdos estudados e a cinemática estudada na disciplina de física, com uso o *software GeoGebra*, ou seja, trabalhou-se com a promoção da interdisciplinaridade. Finalmente, no último encontro foi aplicado o segundo questionário, o qual permitiu averiguar o aprendizado com respeito a interpretação geométrica da função quadrática a partir de noções de derivadas. Para a realização das etapas citadas acima, utilizaram-se: pincéis nas mais diversificadas cores, quadro branco, datashow, computador e o software livre *GeoGebra*.

3.1 DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA

3.1.1 Primeiro encontro

Neste primeiro encontro, realizado no dia 29 de abril de 2019, apresentou-se o projeto com todos os detalhes, frisando a importância do tema para o ensino da matemática. Em seguida, aplicou-se um questionário constituído por 6 perguntas (Apêndice A).

3.1.2 Segundo encontro

No segundo encontro, teve como objetivo introduzir o conceito de função e de função quadrática. Como ponto de partida, foi exibido um exemplo de aplicação no cotidiano que dizia, “em certa horta comunitária, um canteiro de verduras retangular será ampliado, em uma mesma medida, tanto no comprimento quanto com na largura” (SOUZA; GARCIA, 2016).

Este exemplo serviu como motivação para a construção da função quadrática. Nesse mesmo encontro realizou-se a revisão de plano cartesiano e pares ordenados, utilizou-se a lei de formação da função quadrática dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$. Além disso, foi apresentada a construção intuitiva do gráfico de uma função polinomial do

2ºgrau.

3.1.3 Terceiro encontro

No que se refere ao terceiro encontro, objetivou-se fazer o tratamento rigoroso da interpretação geométrica da função quadrática. Neste momento, fez-se uso do livro didático (SOUZA; GARCIA, 2016), abordando na linguagem do livro didático, de maneira que foi possível interpretar cada coeficiente da lei de formação da função. Além disso, com alguns exemplos previstos no livro didático, construiu-se o gráfico de algumas funções. Neste passo, ainda abriu-se mão do software *GeoGebra*.

3.1.4 Quarto encontro

De início, houve uma rápida revisão em relação ao terceiro encontro. Em seguida, mostrou-se para os discentes como chegar, através do eixo de simetria do gráfico da parábola, nas equações

$$x_v = -\frac{b}{2a} \quad \text{e} \quad y_v = -\frac{\Delta}{4a}, \tag{12}$$

que são exatamente as coordenadas do vértice, V, da parábola, isto é, $V(x_v, y_v)$.

3.1.5 Quinto encontro

Neste encontro, realizou-se uma breve revisão do encontro anterior e, em seguida, fora realizado a interpretação para o vértice da parábola quanto ao seu caráter de ponto de máximo ou ponto de mínimo. Para isto, utilizou-se de alguns exemplos do livro didático, os quais exigiam a construção do gráfico para cada exemplo.

3.1.6 Sexto encontro

Este encontro teve como foco principal, apresentar o conceito básico de derivadas. Para esta finalidade, fez-se as seguintes abordagens:

- primeiro apresentou-se a definição informal de derivadas, enfatizando que seu uso é por vezes utilizado para fazer aproximações;
- depois, ensinou-se calcular derivadas das funções constante e potência.

- finalmente, foi apresentado o cálculo de derivadas da função potência em pontos arbitrários.

Depois de promover o primeiro contato dos alunos com o conceito informal de derivadas, proporcionou-se uma série de exemplos para que a ideia fosse fixada na mente dos alunos.

3.1.7 Sétimo encontro

Nesta etapa, o objetivo fora um tanto ousado, pois neste momento precisava-se agregar uma série de conceitos já vistos pelos alunos, tanto na parte de matemática quanto de física.

Com o intuito de deixar os conceitos o mais esclarecido possível, isto é, juntar matemática e física e, sobre tudo, a ideia de derivadas, fez-se apelo ao *GeoGebra*. Para isto, utilizamos a seguinte sequência didática:

1. escolheu-se um exemplo de uma partícula massiva que se movimenta regida pela equação horária da posição dada por $S(t) = t^2 + 2t$;

2. derivou-se está equação horária para todo instante de tempo t;

3. interpretou-se esta derivada como a equação horária da velocidade;

4. para os instantes $t = 0$ s, $t = 2$ s e $t = 4$ s determinou-se a velocidade;

5. construiu-se o gráfico da posição em função do tempo, isto é, $S \times t$, sendo que neste passo fez-se uso do *GeoGebra* e, a construção do gráfico foi feita de forma detalhada para que os alunos pudessem aprender também a manusear o software;

6. ainda no software, foi ensinado como construir a equação da reta tangente a curva $S(t)$ nos pontos calculados no item 4;

7. pode-se observar que para cada reta tangente obtida, cada uma delas exibia uma inclinação diferente, isto serviu como motivação para questionar os alunos sobre tal comportamento;

8. chegou-se a conclusão de que, a derivada da função horária da posição para os instantes de tempo, representa o valor da velocidade da partícula ponto a ponto, por isso cada reta tangente exibe distintas inclinações.

3.1.8 Oitavo encontro

Neste encontro, fez-se a aplicação de um segundo questionário (Apêndice B) cujo objetivo era verificar o aprendizado referente a toda matéria apresentada. Obviamente, o questionário não se trata de uma avaliação nos moldes tradicionalista, isto é, as questões elaboradas frisavam, de modo particular, os conceitos e interpretações a cerca das propriedades geométrica da função quadrática aplicada na física e usando o conceito básico de derivadas e não o tratamento algébrico.

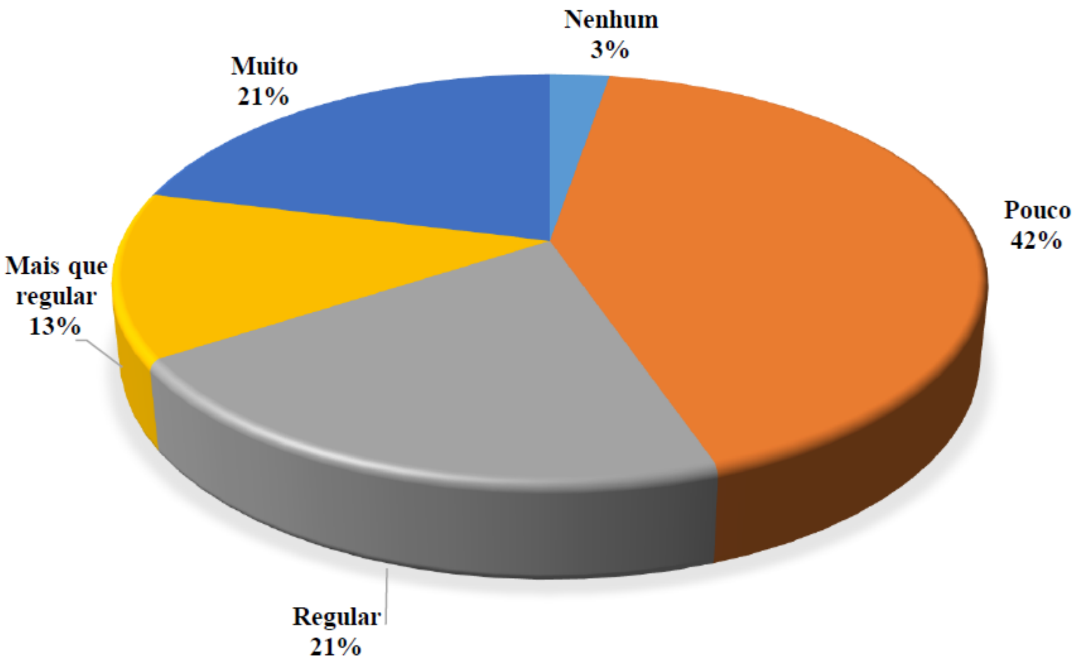
4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

4.1 ANÁLISE DOS QUESTIONÁRIOS

4.1.1 Questionário 1

Este primeiro questionário (Apêndice A) aplicado no dia 29 de abril de 2019, serviu como *background* para verificar o nível de conhecimento de cada estudante sobre o conceito de funções, bem como o interesse pela disciplina de matemática. Vale ressaltar que, no dia em que foi aplicado o primeiro questionário estavam presentes apenas 37 alunos dos 41 matriculados.

Figura 8 – Gráfico que avalia o interesse da turma pela disciplina de matemática.

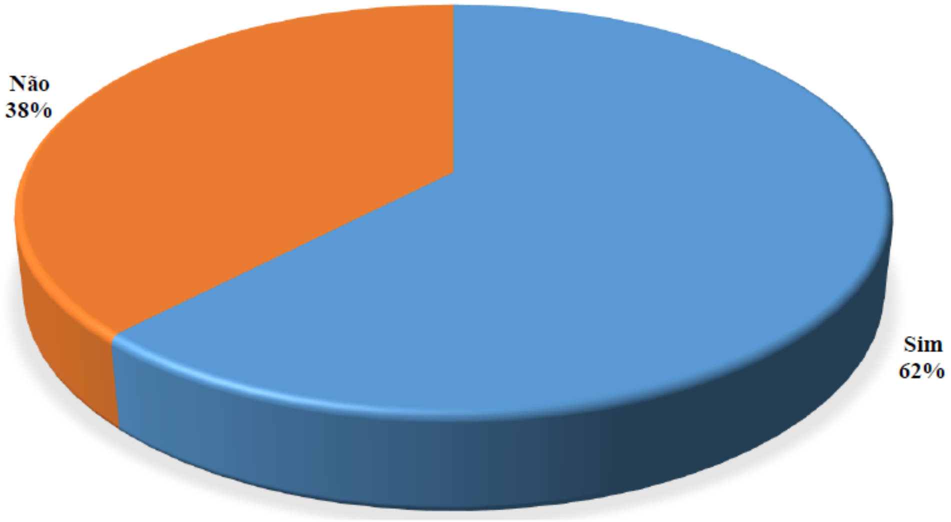


Fonte: O Autor (2019).

De acordo com o gráfico ilustrado na Figura (8), verifica-se que os alunos tinham pouca afinidade com a disciplina de matemática, ou seja, de início, já depara-se com um ponto interessante para a execução do projeto, pois a maioria da turma vê a matemática pouco atraente. Desta forma, surge o desafio em reverter este quadro.

Ao observar o gráfico da Figura (9), nota-se que a maioria da turma já teve contato em algum momento com a parte conceitual de função, como era de se esperar, pois os livros do 9º ano de ensino fundamental, disponibilizados pelo Plano Nacional

Figura 9 – Gráfico que verifica nível de conhecimento da turma sobre o conceito de função.

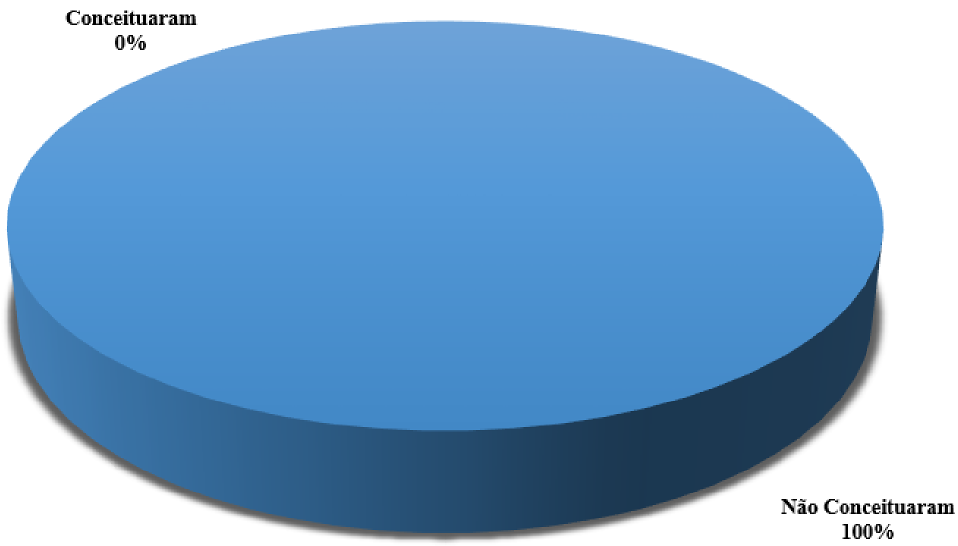


Fonte: O Autor (2019).

do Livro Didático (PNLD) abordam de uma forma elementar o conceito de função.

Ao fazer a análise da terceira Questão pelo gráfico da Figura (10), a qual estava vinculada a Questão dois, nota-se que nenhum estudante conseguiu apresentar o conceito de função, apesar de alguns discentes afirmarem ter conhecimento de tal conceito. Desta forma, precisava-se fazer novamente a aplicação deste conceito.

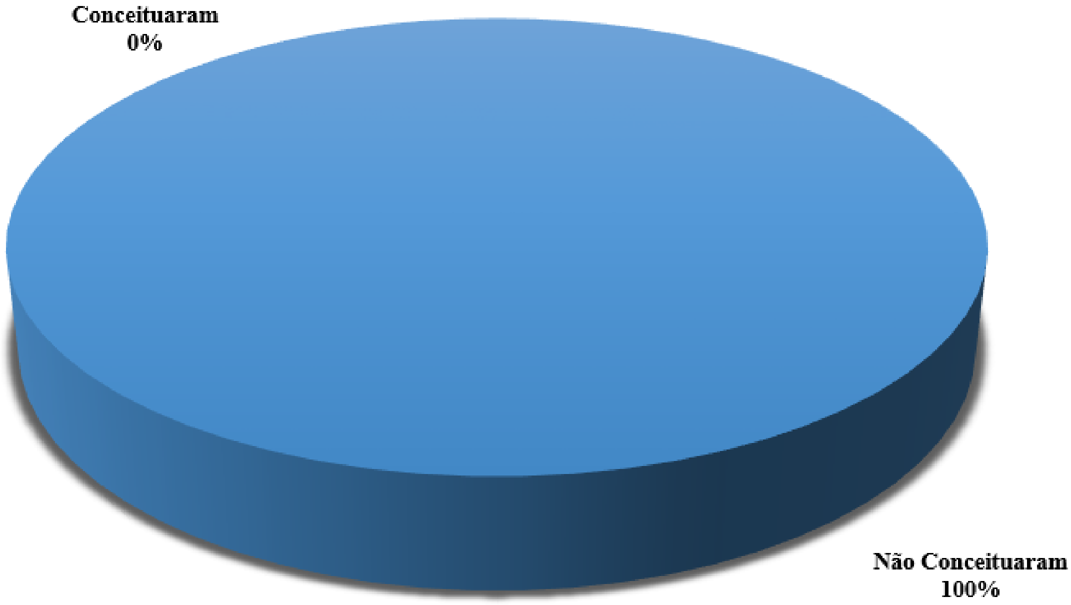
Figura 10 – Gráfico dos acertos para a conceituação de uma função.



Fonte: O Autor (2019).

Tendo em vista que a Questão quatro está relacionada com a Questão de número dois, isto é, como apenas 14 responderam “Não” para a segunda Questão, logo, tecnicamente, apenas estes deveriam apresentar, de maneira direta, alguma ideia so-

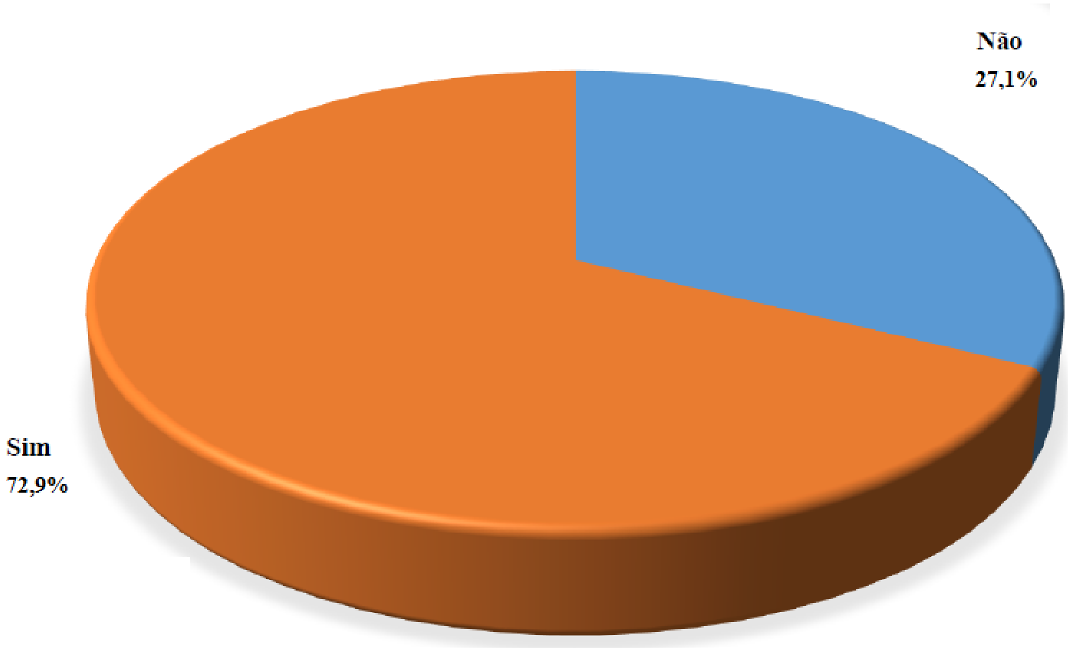
Figura 11 – Gráfico ilustrativo da ideia do conceito de uma função.



Fonte: O Autor (2019).

bre função, isto não aconteceu como pode ser visto na Figura (11), ou seja, nenhum deles conseguiu expor a ideia de uma função.

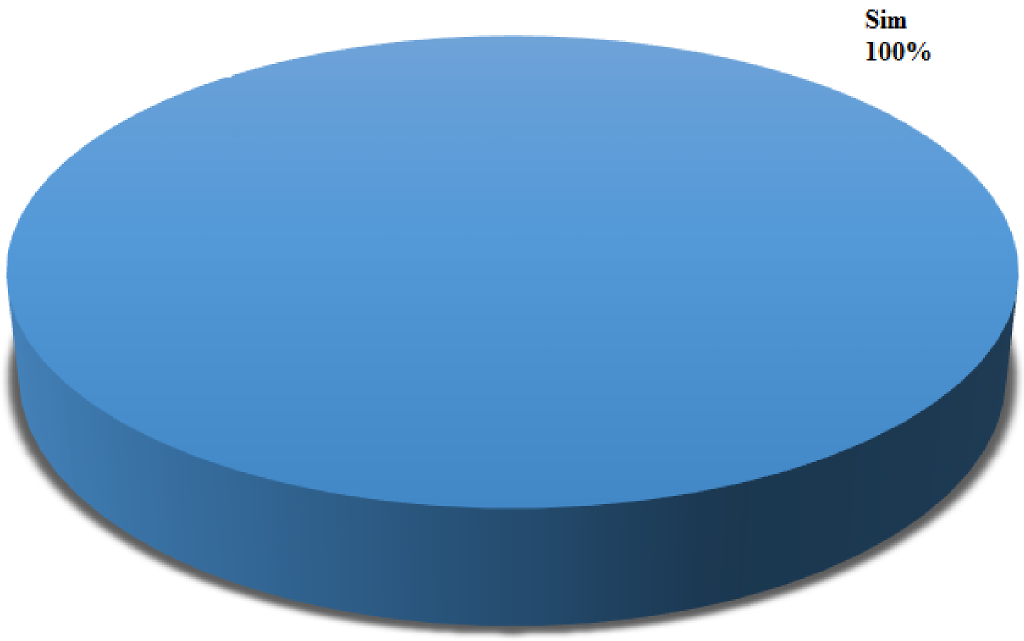
Figura 12 – Gráfico que ilustra se os alunos conseguem visualizar a matemática estudada em seu cotidiano.



Fonte: O Autor (2019).

Do gráfico ilustrado na Figura (12), fica visível que a maioria da turma, em algum momento, já visualizou a matemática em seu cotidiano, pois ela encontra-se presente em quase todo lugar, como por exemplo: no dinheiro, a quantidade de integrantes de uma família, as medidas de uma casa, as horas etc.

Figura 13 – Gráfico que ilustra a capacidade de os alunos associarem um exemplo de função ao seu cotidiano.



Fonte: O Autor (2019).

O gráfico da Figura (13) permite diagnosticar que, apesar de os alunos não conseguirem transcrever um conceito formado sobre função na óptica da matemática, todos conseguiram expor um exemplo da relação matemática *versus* cotidiano.

4.1.2 Questionário 2

Este segundo questionário (Apêndice B) aplicado no dia 14 de maio de 2019, permitiu avaliar de forma qualitativa o desempenho dos alunos após a aplicação das atividades propostas pelo projeto. Vale ressaltar que, no dia em que foi aplicado o segundo questionário estavam presentes apenas 36 alunos dos 41 matriculados.

Após a análise das respostas empregada por cada aluno, pode-se observar que na Questão 1, os discentes obtiveram bom rendimento como pode ser visto na Tabela (1), pois a maioria conseguiu distinguir a ação dos valores para o coeficiente **a**. Assim, nota-se que as regências surtiram efeitos positivos na turma no que diz respeito a assimilação conceitual, isto é, este questionário serviu como uma avaliação qualitativa do conteúdo ministrado.

Tabela 1 – Análise da primeira Questão do segundo questionário aplicado.

	Questão 1				
	Item (a)	Item (b)	Item (c)	Total	%
Acertos	34	34	26	94	87
Erros	02	02	10	14	13
Acertos (%)	94	94	72	–	–
Erros (%)	6	6	28	–	–

Fonte: Autoria própria (2019).

Na Tabela (2), pode-se verificar que turma apresentou um resultado satisfatório, como já era de se esperar, pois os alunos durante a explicação deste conceito demonstraram poucas dificuldades na compreensão.

Tabela 2 – Análise da segunda Questão do segundo questionário aplicado.

	Questão 2			
	Item (a)	Item (b)	Total	%
Acertos	26	26	52	76
Erros	10	10	20	28
Acertos (%)	72	72	–	–
Erros (%)	28	28	–	–

Fonte: Autoria própria (2019).

Ao fazer o diagnóstico da Questão 3, todos optaram por determinar o vértice da parábola usando o conceito de derivadas como ilustrado na Tabela (3). Após ter em mãos o resultado da presente pergunta, vale lembrar que durante a explicação do conteúdo com relação ao método usual disponibilizado no livro para o ensino médio, os alunos encontraram dificuldades no momento da demonstração que rege as equações utilizadas para encontrar as coordenadas abscissas e ordenadas do vértice da parábola.

Tabela 3 – Análise da terceira Questão do segundo questionário aplicado.

	Questão 3		
	Optantes	Total	%
Método de derivadas	36	36	100
Usando a simetria do gráfico como propõe o livro didático	0	0	0
Método de derivadas (%)	100	–	–
Usando a simetria do gráfico como propõe o livro didático (%)	0	–	–

Fonte: Autoria própria (2019).

Por outro lado, a Tabela (3), mostra que o método com derivadas, conteúdo não previsto na base curricular do ensino médio, apresentou uma excelente aceitação pela turma como método alternativo para determinar as coordenadas do vértice de uma função quadrática.

Tabela 4 – Análise da quarta Questão do segundo questionário aplicado.

	Questão 4	
	Total	%
Acertos	21	58
Erros	15	42

Fonte: Autoria própria (2019).

Ao analisar as respostas da Questão 4, dado que a opção correta é “raízes da função”, é louvável que o número de acertos tenha predominado como apresentando na Tabela (4), visto que a turma teve um bom rendimento na apresentação do conteúdo sobre raízes de uma função. Vale enfatizar que a construção do gráfico de uma função quadrática apresentou-se antes, permitindo que os mesmos pudessem identificar onde no gráfico era localizado a raízes.

Ao analisar a respostas apresentadas pelos alunos para a Questão 5, cuja resposta correta é “Quando a altura é máxima, significa dizer que, a velocidade da ordenada é zero”. Entretanto, a resposta poderia ser colocada em outras palavras desde que, não entrasse em detrimento ao sentido real.

Desta forma, a Tabela (5) ilustra em detalhes a análise referente a esta Questão.

Tabela 5 – Análise da quinta Questão do segundo questionário aplicado.

	Questão 5	
	Total	%
Acertos	31	86
Erros	05	14

Fonte: Autoria própria (2019).

5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Ao analisar o conhecimento prévio dos estudantes sobre função através do primeiro questionário, ficou claro que a maioria da turma admitia uma defasagem na compreensão rigorosa acerca deste conceito, visto que dos 37 alunos que participaram da pesquisa, nenhum conseguiu expor a ideia formal de função, apesar de alguns terem afirmado já ter tido um primeiro contato com este.

Um outro fator interessante percebido a partir do primeiro questionário, foi o interesse da turma ser baixo pela matemática, isto implicou em mais um desafio para a pesquisa, ou seja, era preciso motivá-los a gostar da disciplina em questão.

No período de intervenção em sala de aula, a turma demonstrou empatia pelas atividades propostas no primeiro encontro, desta forma, a condução dos demais encontros se deram de forma proveitosa, pois o interesse em aprender os conceitos, na forma como o projeto se propunha fazer, era surpreendente. Isto tornou-se claro a medida que dávamos seguimento nas atividades e mais evidente ainda, quando avaliamos o segundo questionário.

Assim, excelentes resultados foram alcançados, pois foi possível ensinar função e função quadrática, gráficos, aplicar estes conceitos no contexto da física de tal forma, que os alunos não ficassem fatigados. Além disso, ao introduzir o conceito intuitivo de derivadas e ao apresentar a diferença entre obter as coordenadas do vértice da parábola com derivadas, método distinto daquele apresentado no livro texto, ficou evidente a aceitação total da turma à este método, além da interpretação das variáveis física envolvidas.

Portanto, esta pesquisa mostra que apesar de o cálculo diferencial não estar inserido na Base Comum Curricular Nacional, é uma ferramenta poderosa para resolução de problemas matemáticos além da grande aceitação.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Nilze de et al. Matemática–ciências e aplicações. **São Paulo-SP, Saraiva**, 2011. Citado na página 23.

ÁVILA, Geraldo. Várias faces da matemática–tópicos para licenciatura e leitura geral. **São Paulo: Blucher**, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 15.

BARBOSA, Augusto Cesar de Castro; CONCORDIDO, Claudia Ferreira Reis; GODINHO, Leandro Machado. Uma proposta para o ensino de derivada na primeira série do ensino médio no brasil. **EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM REVISTA–RS**, v. 1, n. 17, 2016. Citado na página 15.

BAZZO, Bruno-SEED. O uso dos recursos das novas tecnologias, planilha de cálculo e o geogebra para o ensino de função no ensino médio. In: **Congresso Nacional de Educação**. [S.l.: s.n.], 2009. v. 9, p. 5314–5322. Citado na página 21.

CHASSOT, Attico Inacio. **A ciência através dos tempos**. [S.l.]: Moderna, 1995. Citado na página 11.

DANTE, Luiz Roberto. Matemática: contexto e aplicações. **São Paulo: Ática**, v. 2, 2010. Citado 3 vezes nas páginas 12, 15 e 22.

FILHO, Antônio Ferreira Santana. **Noções de derivadas: introdução ao cálculo diferencial**. [S.l.]: Editora da Universidade do Amazonas, 2000. Citado na página 14.

GIL, Antonio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. [S.l.]: 6. ed. Ediitora Atlas SA, 2008. Citado na página 24.

GODOY, Elenilton Vieira; PIRES, Célia Maria Carolino. Matemática no ensino médio–analisando as organizações curriculares de outros países. 2004. Citado na página 12.

HOHENWARTER, Markus; FUCHS, Karl. Combination of dynamic geometry, algebra and calculus in the software system geogebra. In: **Computer algebra systems and**

dynamic geometry systems in mathematics teaching conference. [S.l.: s.n.], 2004. Citado na página 21.

LIMA, Elon Lages et al. A matemática do ensino médio, vol. 2. **Coleçao do Professor de Matemática, SBM**, 2006. Citado na página 16.

MACHADO, Luiz Elpídio de Melo et al. O hipertexto na aprendizagem do cálculo diferencial e integral. Florianópolis, SC, 2002. Citado na página 12.

MOLON, Jaqueline; FIGUEIREDO, Edson Sidney. Cálculo no ensino médio: uma abordagem possível e necessária com auxílio do software geogebra. **Ciência e Natura**, Universidade Federal de Santa Maria, v. 37, n. 3, 2015. Citado na página 21.

PAIVA, Manoel. Matemática: Paiva. **Ensino Médio. Editora Moderna**, v. 1, 2013. Citado na página 18.

PIETROCOLA, Maurício et al. Física em contextos: pessoal, social e histórico. **São Paulo: FTD**, v. 1, p. 2, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 21.

RODRIGUES, Luciano Lima. A matemática ensinada na escola e a sua relação com o cotidiano. **Distrito Federal: Universidade Católica de Brasília**, 2004. Citado na página 11.

SANTOS, Rogério César dos. Soluções alternativas em problemas de máximos e mínimos. **Educação Matemática em Revista**, n. 31, p. 33–38, 2013. Citado na página 15.

SILVA, Carlos da; SOUSA, Kelia. CÁlculo: Uma proposta possÍvel para o ensino mÉdio. **Revista Panorâmica online**, v. 17, n. 0, 2015. ISSN 2238-9210. Disponível em: <http://revistas.cua.ufmt.br/revista/index.php/revistapanoramica/article/view/595/234>. Citado na página 12.

SOUZA, Joamir; GARCIA, Jacqueline. Contato matemática. **São Paulo: FTD**, v. 1, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 26.

APÊNDICES

APÊNDICE A – PRIMEIRO QUESTIONÁRIO

1. Como avalia seu interesse pela disciplina de matemática?

1	2	3	4	5
Nenhum	Pouco	Regular	Mais que regular	Muito

2. Durante toda sua trajetória escolar, em algum momento você estudou o conceito de função? ◯ SIM ◯ NÃO.
3. Se a resposta para o item anterior foi “SIM”, procure explicar com suas próprias palavras o conceito de uma função.
4. Se a resposta para a “Questão 2” foi “NÃO”, apresente, em poucas palavras a ideia que você tem de função.
5. Durante toda sua trajetória escolar, em algum momento você conseguiu visualizar a matemática estudada em seu cotidiano? ◯ SIM ◯ NÃO.
6. Se a resposta da Questão 5 foi SIM, dê um exemplo.

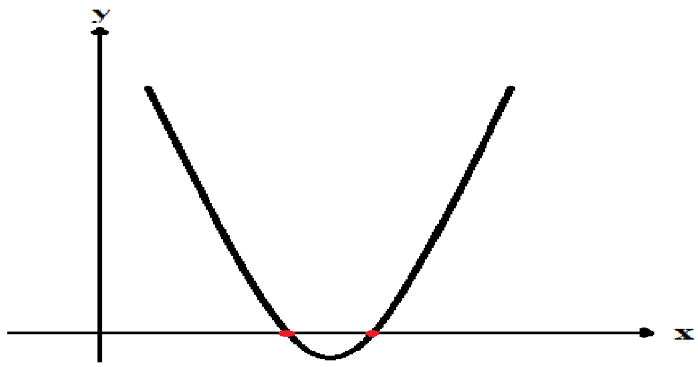
APÊNDICE B – SEGUNDO QUESTIONÁRIO

1. Uma função quadrática, é uma função do tipo $f(x) = x^2 + bx + c$, definida para todo x real tal que os coeficientes a,b e c são constantes reais com $a \neq 0$. Além disso, o gráfico de f é uma parábola. Pergunta-se: **i)** Se a for negativo a concavidade do gráfico será: ( ) para cima ( ) para baixo. **ii)** Se a for positivo a concavidade do gráfico será: ( ) para cima ( ) para baixo. **iii)** O que representa geometricamente o valor da constante c?

2. Em suas palavras, baseado nas aulas sobre a função quadrática, o que representa o vértice da parábola se: **a)** Se a for negativo: ( ) ponto de máximo ( ) ponto de mínimo. **b)** Se a for positivo: ( ) ponto de máximo ( ) ponto de mínimo.

3. Você aprendeu a determinar o vértice da parábola conforme o livro apresenta e usando o conceito de derivadas. Qual dos métodos você julga mais simples?

4. A parábola representada no gráfico a seguir, corta duas vezes o eixo das abscissas. Marque qual o nome recebe estes valores. **a)** ( ) ponto de máximo; **b)** ( ) ponto de mínimo; **c)** ( ) raízes da função; **d)** ( ) coordenadas do vértice da parábola.



5. Você viu no *software GeoGebra* a trajetória de um ponto com o passar do tempo. Se aquela animação simula o movimento de uma bola de futebol, por exemplo, em poucas palavras, diga o que acontece quando a altura é máxima.