UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
CENTRO DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA
ESPECIALIZAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA
PARA O ENSINO MÉDIO NA MODALIDADE À DISTÂNCIA

VOLUME DA PIRÂMIDE: UMA AULA EXPERIMENTAL EM DUAS ESCOLAS DE ENSINO MÉDIO NO INTERIOR DO AMAZONAS

AGNALDO BRAZÃO RODRIGUES
EDENISE DA SILVA SANTOS

Manaus – AM
Abril de 2023

AGNALDO BRAZÃO RODRIGUES
EDENISE DA SILVA SANTOS

VOLUME DA PIRÂMIDE: UMA AULA EXPERIMENTAL NO ENSINO MÉDIO EM DUAS ESCOLAS NO INTERIOR DO AMAZONAS

Monografia apresentada ao Centro de Educação à Distância da Universidade Federal do Amazonas como requisito parcial para a obtenção do grau de especialista em Matemática.

.

Orientador(a)
Dra. Maria Rosilene Barroso dos Santos

Universidade Federal do Amazonas – UFAM
Centro de Educação à Distância – CED

Manaus-AM
Abril de 2023

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

R696v

Rodrigues, Agnaldo Brazão
Volume da pirâmide : uma aula experimental no ensino médio em duas escolas no interior do Amazonas / Agnaldo Brazão Rodrigues, Edenise da Silva Santos. 2023
46 f.: il. color; 31 cm.

Orientador: Maria Rosilene Barroso dos Santos
TCC de Especialização (Especialização em Ensino de Matemática para o Ensino Médio - EAD) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Volume da pirâmide. 2. Princípio de Cavalieri. 3. Aula experimental. 4. Geometria espacial. I. Santos, Edenise da Silva. II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

Monografia de Especialização sob o título **Volume de Pirâmide: uma aula experimental no ensino médio em duas escolas no interior do amazonas,** apresentada por Agnaldo Brazão Rodrigues e Edenise da Silva Santos e aceita pelo Centro de Educação à Distância da Universidade Federal do Amazonas, sendo aprovada por todos os membros da banca examinadora abaixo especificada:

Orientador(a) Dra. Maria Rosilene Barroso dos Santos

Departamento de Matemática

Universidade Federal do Amazonas

Dr. Dimas Martinez Morera

Departamento de Matemática

Universidade Federal do Amazonas

Dr. Hudson do Nascimento Lima

Departamento de Matemática

Universidade Federal do Amazonas

Manaus-AM

26 de Abril de 2023

Dedico este trabalho a todos que ajudaram ao longo dessa jornada.

.

AGRADECIMENTOS

Chegar ao final deste trabalho, só foi possível graças a condições e apoio de diferentes pessoas e instituições. A todos, o nosso sincero agradecimento.

A Deus, por nos dá sabedoria para superar as dificuldades ao longo da nossa caminhada.

Aos professores do curso de Especialização em Ensino da Matemática da Universidade Federal do Amazonas – UFAM, pelo compartilhamento de seus conhecimentos e orientações.

Especial a nossa orientadora Dra. Maria Rosilene Barroso dos Santos, pela paciência, disponibilidade, ensinamento e sugestões durante a elaboração e execução deste trabalho.

A direção das Escolas e os alunos do segundo e terceiro ano por permitirem o desenvolvimento desde estudo.

À nossas famílias, que sempre estiveram ao nosso lado nos momentos de dificuldades, não nos deixando desistir quando faltou força e ânimo. A vocês um obrigado especial pela compreensão, dedicação e amor que sempre demonstraram por nós.

“O melhor de mim é aquilo que eu não sei’ isso significa que aquilo que eu não conheço é a minha melhor parte. Porque aquilo que eu já sei é mera repetição. Aquilo que eu não sei é o que me renova, o que me faz crescer. O conhecimento é algo que reinventa, que recria, que renova”

Mario Sergio Cortella

VOLUME DA PIRÂMIDE: UMA AULA EXPERIMENTAL NO ENSINO MÉDIO EM DUAS ESCOLAS NO INTERIOR DO AMAZONAS

Autor: Edenise da Silva Santos

Orientador (a): Dra. Maria Rosilene Barroso dos Santos

RESUMO

O presente trabalho versa sobre uma aula experimental de um tópico de geometria espacial: O volume da pirâmide e o Principio de Cavalieri. A aula teve como proposta ensinar geometria por meio de uma metodologia dinâmica que desperte o interesse dos alunos pela matemática. Para isso, foi seguido um roteiro da aula experimental disponível no site Matemática Multimídia, https://m3.ime.unicamp.br/. A metodologia utilizada foi a qualitativa e para coleta de dados, a técnica de aplicação de questionários sobre o tema proposto, disponibilizados aos alunos das escolas do ensino médio dos municípios de São Gabriel da Cachoeira e Itacoatiara do Estado do Amazonas. Por meio dos dados obtidos, observou-se a grande deficiência dos alunos na aprendizagem de geometria.

Palavras-chave: Volume da Pirâmide, Princípio de Cavalieri, Aula Experimental, Geometria Espacial.

VOLUME OF THE PYRAMID: AN EXPERIMENTAL CLASS IN HIGH SCHOOL AT TWO SCHOOLS IN THE COUNTRYSIDE OF AMAZONAS

Autor: Edenise da Silva Santos

Orientador (a): Dra. Maria Rosilene Barroso dos Santos

ABSTRACT

The present work deals with an experimental class on a topic of spatial geometry: The volume of the pyramid and the Cavalieri Principle. The class was proposed to teach geometry through a dynamic methodology that awakens students' interest in mathematics. For this, an experimental class script was followed, available on the Multimedia Math website, https://m3.ime.unicamp.br/. The methodology used was qualitative and for data collection the technique of applying tests on the standard theme, made available to students from high schools in the municipalities of São Gabriel da Cachoeira and Itacoatiara in the State of Amazonas. Through the obtained data, it was observed the great deficiency in the learning of geometry.

Keywords: Volume of the Pyramid, Cavalieri's Principle, Experimental class, Space Geometry.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A atividade de docência deve encontrar meios para desenvolver nos alunos a capacidade de ler e interpretar os conceitos matemáticos. Para isso, precisam buscar novas formas de ensinar, que interligue a abstração matemática à realidade, despertando no aluno o gosto pela disciplina, seu uso e aplicação como elemento de transformação no cotidiano. Vale ressaltar que não é tarefa fácil para os docentes a adaptação a essa nova realidade de ensino. O ranking divulgado pelo Programa Internacional de Avaliação de Estudantes – PISA 2018, mostrou que os estudantes brasileiros são incapazes de compreender textos, resolver cálculos e questões científicas simples e rotineiras em matemática. Este ranking mostrou que o Brasil ocupa a posição 489 entre os países avaliados.

De acordo com as “Orientações Curriculares Para o Ensino Médio” do Ministério da Educação (2016), para desenvolver o espírito investigativo nos alunos não precisa de laboratórios modernos e equipamentos sofisticados. Experimentos simples, com materiais do nosso cotidiano, podem levar a descobertas importantes. Isso quer dizer que o professor deve buscar novas práticas e novas ferramentas para melhorar o ensino em sala de aula.

Este trabalho traz uma aula experimental com intuito de romper com o modelo tradicional de ensino, buscando despertar no aluno o interesse pelo conteúdo de geometria espacial, em especial o volume da pirâmide e o Princípio de Cavalieri. Conforme Lorenzato (2010):

> A experimentação é o melhor modo para se conseguir a aprendizagem com significado, uma vez que realça o “porquê”, a explicação e, assim, valoriza a compreensão. Além disso ela possibilita: A integração de diferentes assuntos; A redescoberta; A memorização de resultados; A aprendizagem de diferentes estratégias de resolução de problemas; A verificação de conjecturas ou de resultados (LORENZATO, 2010, p.72.).

Desse modo, é de suma importância ensinar geometria por meio de atividades dinâmicas como o a experimentação, acredita-se que assim, o aluno consiga ter uma experiência concreta que o ajudará no seu conhecimento para a realização dos cálculos matemáticos. Segundo Sá (2020), o ensino de matemática por atividades experimental é:

> “[...] um processo didático desenvolvido por meio da realização de tarefas, envolvendo material concreto ou ideias, elaboradas pelo professor com

> objetivo de levar estudantes ao encontro com um conhecimeto/conteúdo matemático especifico após a realização da tarefa, do registro de resultados, analise e elaboração de reflexos sobre os resultados obtidos que culminam com a sistematização ou institucionalização de um conteúdo matemático.(SÁ,2020, p.13)

Assim, a realização de atividades experimentais permite que os alunos, além de compreender a teoria, participem do processo de construção do conhecimento. Em vista disso se desenvolveu a investigação desse trabalho, cuja pesquisa foi dividida em duas aulas experimentais que foram realizadas nas escolas estaduais de ensino médio São Gabriel, município de São Gabriel da Cachoeira e José Carlos Martins Mestrinho, município de Itacoatiara-AM, com a participação de 28 alunos do 2º ano e 27 alunos do 3º ano. Essas aulas foram baseadas no material disponível no site Matemática Multimídia https://m3.ime.unicamp.br/, e adaptadas à realidade dos autores. O site dispõe de vários conteúdos experimentais prontos para serem aplicados de forma prática em sala de aula, trabalhados com material de fácil acesso e de uso diário, propondo uma nova forma de abordagem para ensino da matemática.

1.1 Contextualização ou Definição do Problema

A geometria faz parte da matemática e o seu uso remonta aos primórdios da civilização, quando ainda na Pré-história, os primeiros caçadores coletores, registraram em cavernas o uso de simples contagem matemática e das figuras geométricas, atribuindo-lhes, valores e significados. Conforme o avanço da civilização, a atividade humana se tornou mais complexa, o ser humano em algum momento precisou calcular as distâncias, áreas e volumes, tornando o uso da geometria uma necessidade imprescindível para o desenvolvimento humano.

O ser humano tem a necessidade de compreender o espaço que lhes rodeia. Identificar a existência de objetos, figuras e a relação entre estes no espaço real, torna a geometria fundamental para a vida das pessoas, e principalmente para os estudantes. Conhecer e entender os conceitos básicos matemáticos, em especial os conceitos de geometria, como o volume e área, possibilita desenvolver habilidades para a resolução de problemas presente no dia a dia. Por exemplo, para estacionar um veículo é preciso no seu campo de visão ter a noção do espaço para realizar a ação, entender esses conceitos nos da a competência de observar, medir, calcular e comparar. Muitas das vezes, em sala de aula, notamos que os alunos não compreendem a relação da aplicabilidade desses conceitos com seu cotidiano, resta assim, desenvolver essas habilidades através do ensino.

Ensinar o volume da pirâmide e o Princípio de Cavalieri de forma experimental traz uma nova forma de abordar e transmitir conhecimento de geometria espacial para o aluno, uma vez que as demonstrações do experimento estimulam o raciocínio do aluno e a visualização geométrica. No ensino tradicional, as aulas sobre volumes dos sólidos geométricos se resumem a fórmulas, sem nenhum entendimento prático.

Na busca por uma aprendizagem satisfatória em geometria, os autores deste trabalho usaram de forma adaptada um experimento, disponível no site Matemática Multimídia https://m3.ime.unicamp.br/ cujo titulo é “volume de pirâmides - geometria e medidas”. Para realização do experimento, a plataforma disponibiliza: roteiro do experimento (anexo A), guia do professor (anexo B), e folha do aluno (anexo C). Esses materiais serviram como suporte para a aula experimental.

A escolha do experimento do Volume de Pirâmides se deu pelo fato de ser realizada com materiais simples do dia a dia. Além disso, a Geometria Espacial se faz presente no cotidiano das pessoas e seu conteúdo alia teoria e prática, possibilitando também trabalhar o Princípio de Cavalieri, conceitos poucos explorados em sala de aula. Vale ressaltar que quando esses assuntos são explorados, se da muita ênfase às fórmulas e os alunos utilizam mecanicamente as fórmulas sem demonstrar o real entendimento desses conceitos.

O experimento leva o aluno a desenvolver sua habilidade e despertar a curiosidade e interesse, transformando-o em sujeito da aprendizagem, pois é possível visualizar de maneira real, medir e calcular o volume e a área das figuras geométricas. Tais práticas dificilmente são exploradas no ensino tradicional.

É importante apontar também a necessidade de mudança de postura do professor, não como detentor de todo conhecimento teórico de geometria, mas como facilitador e direcionador de ensino. Isto instiga os alunos a identificarem elementos de geometria nas figuras disponíveis no dia a dia. Por exemplo, o formato de uma bola, esfera, do campo de futebol, retângulo, em uma viagem, a placa de sinalização, que indica uma reta, em um jantar, o formato da pizza, do cilindro do copo, e outras formas, de fácil entendimento, tornando a aprendizagem de matemática mais atrativa, aliando a teoria e prática.

1.2 Objetivos

Objetivo Geral:

- Constatar experimentalmente o conceito de Volume da Pirâmide.
- Apresentar o Princípio de Cavalieri.
- Realizar aula de forma que desperte o interesse do aluno pela matemática.

Objetivos Específicos:

- Analisar a metodologia da aula experimental;
- Observar o impacto da aprendizagem;
- Verificar se os alunos entenderam o conceito de Volume;
- Verificar se os alunos compreenderam o conceito do Princípio de Cavalieri;

1.3 Organização do Trabalho

Este trabalho foi dividido em cinco capítulos: a apresentação do tema, a fundamentação teórica, a metodologia, a análise dos dados e as considerações finais.

No primeiro capítulo, encontra-se os problemas e os objetivos gerais e específicos, assim como a organização do trabalho. No segundo capítulo consta a fundamentação teórica e investigação sobre o ensino e aprendizagem de geometria e o Princípio de Cavalieri. No terceiro capítulo apresenta-se a metodologia e técnica usada. No quarto capítulo a analise de dados. E no quinto, as considerações finais do estudo.

2 O ENSINO E APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA E O PRINCÍPIO DE CAVALIERI

A geometria nos auxilia em atividades diárias, como por exemplo, em sinalizações de trânsito, nas marquises dos prédios, janelas, portas, paredes, móveis de nossas casas, em praças com pisos em paralelepípedos, áreas de lazer definindo a área do campo de futebol, nas bolas de basquete, vôlei, rampas de skate, na garrafa d´agua, canetas, borrachas, relógios, e na natureza. Para onde quer que se olhe, a geometria se faz presente. Dessa forma, estudar geometria é indispensável, pois nos permite solucionar problemas, desenvolver o raciocínio lógico e proporcionar um melhor entendimento de outras áreas de estudo.

O primeiro entendimento que o homem teve a respeito da geometria, deu-se pela necessidade de compreender o meio em que vivia. De acordo com o dicionário online Dicio (2023) a geometria é a "parte matemática que estuda rigorosamente o espaço e as formas (figuras e corpos) que nele podem estar.” A origem da palavra deriva do grego Geo que significa terra e metron significa medir. Segundo Pontes:

> Não há uma data certa para o surgimento da geometria espacial, mas os dados, segundo, Howard Eves, dizem que os Babilônios do período 2000 a.C a 1600 a.C, já eram capazes de determinar volumes de paralelepípedos”. Contudo, a geometria evoluiu mesmo com o geometra Euclides de Alexandria, em sua obra “os elementos de Euclides” que está dividido em 13 livros, o cálculo do volume é destaque no livro XII (PONTES, 2014, p. 15).

A geometria plana ou euclidiana “é a parte da matemática que estuda as figuras que não possuem volume. [...] é chamada de euclidiana, em homenagem a Euclides considerado o pai da geometria.” (GOUVEIA, 2023). Já a geometria Espacial:

> “[...] é responsável pelo estudo das figuras geométricas espaciais, também chamadas de sólidos geométricos, que ocupam lugar no espaço, devido sua característica de tridimensionalidade (altura, largura e comprimento). Cubos, prismas, pirâmides e cones são alguns sólidos explorados por essa subárea da geometria.’’ (CAIUSCA, 2018).

A compreensão do estudo da geometria dá-se por várias formas, e traz um relevante conhecimento. Segundo as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN +), (BRASIL, 2002):

> A Geometria, ostensivamente presente nas formas naturais e construídas é essencial à descrição, à representação, à medida e ao dimensionamento de uma infinidade de objetos e espaços na vida diária e nos sistemas produtivos e de serviços. No ensino médio, trata das formas planas e tridimensionais e suas representações em desenhos, planificações, modelos e objetos do mundo concreto. (BRASIL, 2002, p.120)

O estudo da geometria desenvolve o raciocínio logico dos indivíduos, e na visão de (FAINGUELERNT,1995):

> A Geometria oferece um vasto campo de ideias e métodos de muito valor quando se trata do desenvolvimento intelectual do aluno, do seu raciocínio lógico e da passagem da intuição e de dados concretos e experimentais para os processos de absorção e generalização. A Geometria também ativa a passagem do estágio das operações concretas para o das operações abstratas. É, portanto, tema integrador entre as diversas partes da Matemática, bem como campo fértil para o exercício de aprender a fazer e aprender a pensar. Ela desempenha papel primordial no ensino, porque a intuição, o formalismo, a abstração e a dedução constituem a sua essência (FAINGUELERNT, 1995 p.45).

O conhecimento geométrico precisa ser aplicado de maneira a proporcionar compreensão e reflexão significativa, pois segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN):

> [...] as habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e de aplicação na busca de soluções para problemas podem ser desenvolvidas com um trabalho adequado de Geometria, para que o aluno possa usar as formas e propriedades geométricas na representação e visualização de partes do mundo que o cerca. (BRASIL, 2000, p.44).

Uma ferramenta para o cálculo de áreas e volumes é o Princípio de Cavalieri. Com base intuitiva e de simples fórmulas, o Princípio de Cavalieri permite resolver muitos problemas de mensuração que normalmente requeriam técnicas avançadas de cálculo. Conforme Pontes (2014):

> Os princípios de Cavalieri usados como axiomas podem resolver diversos problemas de área e volume, evitando o uso do cálculo integral moderno. Ao passo que os alunos do Ensino Médio brasileiro, que não possuem o cálculo em sua grade curricular, sejam capazes de resolver problemas de área e volume apenas com esses princípios. (PONTES 2014, p, 18)

Além de que, muitos estudos acadêmicos, ressaltam a importância do uso do Princípio de Cavalieri como instrumento facilitador de ensino da geometria, para uma melhor compreensão dos estudantes dos cálculos aplicados ao volume da pirâmide e áreas. O Princípio de Cavalieri foi desenvolvido para calcular o volume de sólidos geométricos, a saber, dados dois sólidos com a mesma altura, se todas as suas secções paralelas ao plano em que esses sólidos estão apoiados formam figuras planas de área igual, então o volume desses sólidos é o mesmo. Por mais que o formato dos sólidos geométricos seja diferente, o volume deles é o mesmo**,** se a altura é a mesma e se para toda secção feita nos sólidos à área deles é a mesma.

Para mais detalhes sobre o Princípio de Cavalieri, foi anexado a este trabalho o guia do professor (anexo B) do site Matemática Multimídia (2022), onde, foi colocado toda a teoria sobre o Princípio.

3 METODOLOGIA

3.1 Modalidade de Pesquisa

A pesquisa deste trabalho tem estilo qualitativo. A partir de uma pesquisa bibliográfica foram formuladas perguntas que melhor atendessem os objetivos do estudo e foram entregues aos alunos para que respondessem. Com as respostas obtidas foi possível correlacionar a nossa percepção em relação ao ensino da matemática, especificamente o da geometria.

3.2 Campo de Pesquisa

As aulas foram realizadas em duas escolas de ensino médio do Estado do Amazonas: Escola Estadual São Gabriel e Estadual José Carlos Martins Mestrinho. A primeira escola está localizada em São Gabriel da Cachoeira/AM, e o público alvo foi formado por 27 estudantes de uma turma do 2º ano do turno vespertino. A segunda escola está localizada no Município de Itacoatiara/AM, e o público alvo foi formado por 28 estudantes de uma turma da 3ª série do turno matutino.

3.3 Instrumento de Coleta de Dados

A coleta de dados foi obtida através de questionário que continha perguntas abertas, entregue aos alunos no dia da aula, áudios gravados através de aparelho celular e rodada de conversas com os alunos.

3.4 Materiais e Roteiro da Aula

Para facilitar a compreensão do experimento em sala de aula, foram levados os seguintes materiais: polígonos com áreas iguais, que serviram de base para as pirâmides, canudinhos com 7 cm, para demonstrar a altura e dois modelos de pirâmide com formatos diferentes. Areia para exibir os volumes, folhas de papel A4, tesoura, canudos, copos descartáveis, cola branca, fita adesiva transparente, papelão e régua, para a produção das figuras geométricas.

A dinâmica da aula obedeceu ao seguinte roteiro: a turma foi dividida em grupos e cada grupo, recebeu um guia do experimento, conforme anexo A e todo o material a ser utilizado. Cada aula teve a duração de 45 minutos. Houve a explicação do objetivo do tema, Volume da pirâmide e a introdução ao Princípio de Cavalieri, assim como, a exemplificação desses conceitos no dia a dia dos alunos e a exibição de alguns dos objetos geométricos. Após essas apresentações, a turma passou a construção das pirâmides.

Os grupos construíram os modelos de pirâmides e depois encheram seus volumes com a areia. Ao fim das construções, compararam o nível de suas pirâmides com as de outros grupos, para que todos percebessem que não importa o seu formato e medidas, pois o volume será o mesmo. Ao término do experimento, responderam as perguntas do questionário aplicado.

3.5 Desenvolvimento da Aula

3.5.1 Aula Experimental Turno Vespertino

Esta aula foi desenvolvida e ministrada pelo discente do curso de pós-graduação – UFAM, Especialização em Ensino da Matemática para o Ensino Médio na modalidade EaD, Agnaldo Brazão Rodrigues.

A aula começou com uma conversa informal (Fig 1), objetivando saber, qual o entendimento dos alunos em relação à geometria espacial, qual a sua utilização, aplicação e importância. Usando o espaço e a área da sala de aula, o quadro e janelas retangulares, foram instigados a reconhecerem as formas geométricas existentes e visíveis na sala, isso os estimulou a darem outros exemplos, como: a régua, a mochila, a mesa do professor e a lixeira colocada no canto da sala de aula.

Fig 1 Inicio da aula

Fonte: de autoria própria

Seguindo a proposta de aula sobre geometria espacial, foi explicado sobre o volume da pirâmide, a introdução ao Princípio de Cavalieri, e apresentou-se a proposta do experimento. A Turma de 27 alunos foi dividida em cinco grupos de alunos. Três grupos tiveram cinco membros e os outros dois, seis membros. Para cada grupo foi repassado um material impresso contendo o passo a passo de como fazer o experimento e todo o material necessário para a sua realização, juntamente com algumas perguntas formuladas para os alunos responderem. Cada grupo escolheu um molde de polígono entre os cinco que tinha para servir de base de suas pirâmides.

Fig 2 Grupo trabalhando na planificação da pirâmide.

Fonte: de autoria própria

Como o tempo de aula era apenas de 45 minutos, foi estipulado o tempo limite para o fim do experimento de 30 minutos. Ao final do tempo estipulado, apenas dois grupos conseguiram fazer as pirâmides, um grupo que pegou o polígono triangular e o outro grupo que pegou o polígono quadrado. Os outros grupos alegaram a falta de tempo para a não conclusão das pirâmides. Então, foram feitas as medidas com areia no copo apenas dos dois grupos que concluíram suas pirâmides.

Fig 3 Copo com as comparações dos volumes.

Fonte: de autoria própria

Foi explicado sobre as medidas no copo descartável, a área da base, a altura dos canudos e de como se calculava o volume das pirâmides, surgiram algumas perguntas sobre a explicação, a maioria delas era em relação ao nome “geometria espacial”. Segundo os alunos, nunca haviam ouvido falar nesse conceito, e houve uma animosidade nos alunos e um falatório incontrolável. Infelizmente, a aula não foi completada, pois o tempo planejado não foi suficiente (Fig 4).

Fig 4 Fim da aula, questionamento dos grupos

Fonte: de autoria própria

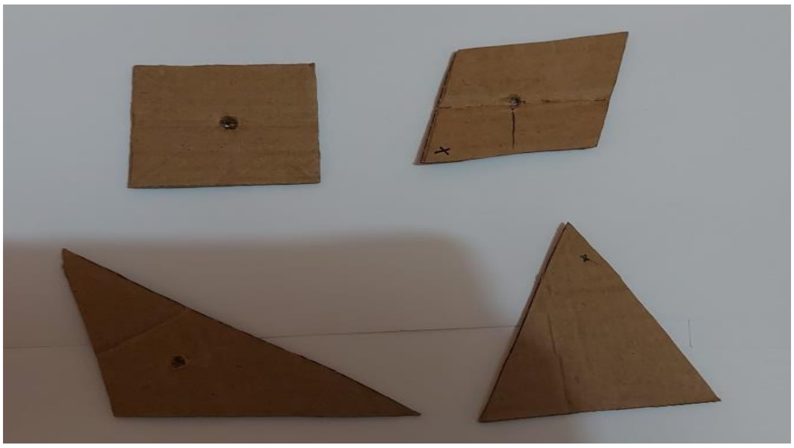
3.5.2 Aula Experimental Turno Matutino

Esta aula foi desenvolvida e ministrada pela discente do curso de pós-graduação **–** UFAM, Especialização em Ensino da Matemática para o Ensino Médio na Modalidade de EaD, Edenise da Silva Santos.

Para promover o experimento, a turma foi dividida em grupos. Em seguida, iniciou a aula com perguntas sobre o tema, instigando os alunos a demonstrarem o seu conhecimento a respeito de geometria espacial e a reconhecerem as formas geométricas existentes na natureza, no universo, na sala de aula em atividades diárias. A ideia foi levar os estudantes à percepção da importância geométrica e formas de utilização da geometria espacial no cotidiano.

Seguindo a proposta da aula experimental sobre geometria espacial, explanou-se sobre o tema: o volume da pirâmide e introdução ao Princípio de Cavalieri. Em seguida foram entregues aos grupos os materiais necessários para realização da atividade. Os estudantes realizaram a construção das pirâmides triangulares e quadradas. A turma de 28 alunos foi dividida em 4 grupos de 7 alunos e foi entregue 1 molde para cada grupo, nos formatos de quadrados e triângulos, (Fig 5).

Fig 5 Modelo dos formatos entregues aos alunos.



Fonte: de autoria própria

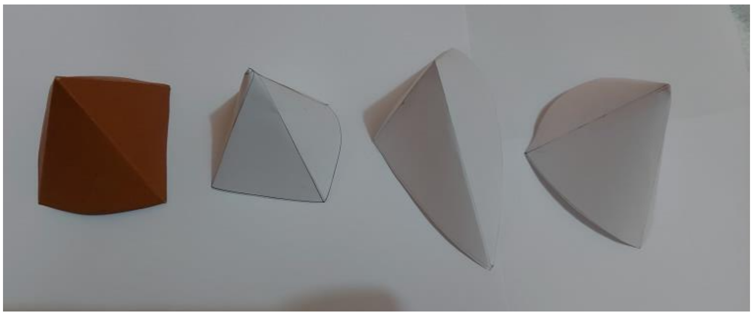
Para cada grupo foi entregue um guia impresso contendo o passo a passo de como fazer o experimento, juntamente com algumas perguntas formuladas para os grupos responderem (anexo C e D).

Fig 6 Alunos realizando as atividades.

Fonte: de autoria própria

Após produzidas as pirâmides triangulares e quadradas (Fig 7), os alunos preencheram as pirâmides com a areia e em seguida despejaram no copo descartável, marcando o nível, conforme a figura 8, comparando os volumes. Depois, responderam a questão de número (1) do questionário (apêndice C e D). Em seguida, responderam as perguntadas de número (2) (apêndice C e D). Os estudantes realizaram as medições da altura, largura e cálculos da área da base e do volume.

Fig 7 Pirâmides construídas.



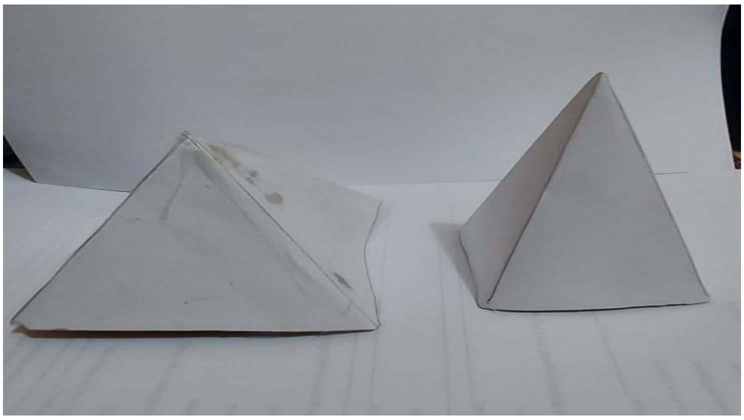
Fonte: de autoria própria

Fig 8 Copos preenchidos com areia.

Fonte: de autoria própria

Ao término das conclusões obtidas nos questionamentos mostraram-se as pirâmide com formatos diferentes (Fig 9) para as devidas explicações, uma com a área da base diferente da que foi utilizada pelos alunos e com a mesma altura, e outra com a mesma área da base, mas com a medida da altura diferente das outras. Dessa forma, os alunos puderem responder às perguntas de número (3, 4 e 5), conforme apêndice C e D.

Fig 9 Pirâmides com formatos diferente.



Fonte: de autoria própria

Ao término do experimento, para facilitar a compreensão e aprendizagem do conteúdo exemplificado no experimento aos alunos, explicou-se brevemente, sobre o volume de uma pirâmide e o Princípio de Cavalieri, aplicável ao volume dos sólidos. Usando como modelo as moedas para justificar o fato de dois sólidos terem a mesma altura e as suas seções planas de mesma altura ter a mesma área, assim os sólidos tem o mesmo volume***.***

Fig 10 Exemplo aplicável ao Princípio de Cavalieri

Fonte: de autoria própria

3.5 Forma de Avaliação

Questionamentos realizados de forma oral, questionário com perguntas referente ao ensino de volume da pirâmide e cálculo da área da pirâmide, entregue junto com o guia do experimento.

4 ANÁLISE DOS DADOS E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

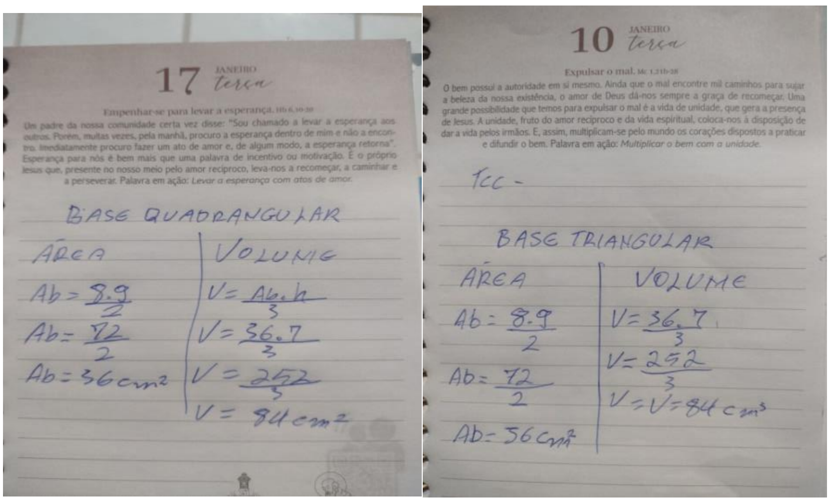
4.4.1 Analise dos questionamentos das duas aulas

Durante a aplicação do experimento, com as respostas das indagações efetuadas, observou-se que os alunos tem pouco conhecimento de geometria espacial e não conheciam o Principio de Cavalieri, tão pouco, tinham noção de como calcular a área da base e o volume de uma pirâmide, embora, reconhecessem as formas geométricas, a exemplo das pirâmides, quadrado e triângulo.

4.4.2 Analise dos questionários dos alunos do 2º ano do turno vespertino da escola São Gabriel

Na escola São Gabriel, somente, dois grupos conseguiram construir as pirâmides para a explicação de como calcular as medidas das áreas e volume da pirâmide. Embora explicado e exemplificado, foi com auxílio de uma régua, que os alunos conseguiram calcular as medidas, da área da base e a altura das duas pirâmides. Com isso, constatou-se que a área das duas pirâmides era de 36cm^2, a altura de 7cm e o volume 84cm^3. Demonstrando, que, embora as figuras geométricas tivessem formas diferentes (triangulo e quadrado) suas áreas eram iguais e possuía a mesma altura, consequentemente, volumes iguais. Seguiu-se para a próxima etapa de exemplificação e demonstração do Principio de Cavalieri. O tempo concedido não foi suficiente e os alunos não conseguiram efetuar todas as etapas do experimento.

Fig 11 Cálculo das áreas



Fonte: de autoria própria

Com os dados coletados das respostas dos questionários e a realização do experimento, foi possível concluir que, mesmo os alunos estando na 2º série do ensino médio, eles possuem total falta de conhecimento e compreensão sobre o conteúdo da geometria espacial. Isso confirma as pesquisas realizadas sobre o baixo índice de aprendizagem dos alunos brasileiros, em relação à matemática.

Contudo, acredita-se que o objetivo da aula foi cumprido, analisando as respostas do questionário, dos 27 alunos da sala, 19 alunos afirmaram ter compreendido o assunto abordado, 6 alunos disseram não ter compreendido totalmente, 2 alunos não responderam as questões. Em relação à pergunta, se tinham gostado da forma que foi abordado o assunto, 22 alunos responderam que sim, mas, acharam o tempo curto, 3 alunos disseram que não, por não conseguirem entender as explicações, 2 alunos não responderam. Perguntado qual foi sua aprendizagem em relação ao assunto, 16 alunos responderam “ótimo”, 7 alunos responderam “bom”, 2 responderam “ruim” e 2 não responderam. Perguntado qual tipo de aula eles preferiam, 21 alunos disseram preferir “teoria e prática”, 4 disseram preferir teoria e 2 não responderam. Perguntado o que poderia ser feito para que a aula fosse mais interessante e trouxesse mais aprendizado, 18 alunos responderam que gostariam de ter “mais aulas desse tipo” só que com “mais tempo” para melhor entendimento dos assuntos, 4 alunos responderam que deveriam ter melhores professores, 2 responderam apenas que acharam boa a experiência e 2 não responderam.

A maioria dos alunos relataram ter tido um bom proveito da aula experimental, o que tornou a aula, na visão dos autores desse trabalho, ferramenta para despertar a curiosidade dos estudantes sobre os temas abordados e uma busca por mais conhecimentos sobre a matemática, em especial a geometria.

4.4.3 Análise dos questionários dos alunos do 3º ano do turno vespertino da escola José Carlos Martins Mestrinho

Após realizar o experimento e as respostas dos grupos, com uma pequena margem de erro, foi constatado experimentalmente com o preenchimento dos copos que o volume das pirâmides são iguais. Em relação às conclusões obtidas sobre as diferenças entre as pirâmides e quais características elas têm em comum, foi constatado que todas as pirâmides têm a mesma altura, que é determinado pelo comprimento do canudo, independente do local, onde esteja fixado o canudo.

Com as medições feitas com a régua, foi medido a área da base e a altura. Embora os alunos não sabiam calcular a área da base e o volume, foram dadas as fórmulas para a realização dos cálculos de áreas das figuras geométricas e logo após o volume. Com os valores obtidos, área foi $36cm^2$, a altura 8cm e o volume $84cm^3$. Desse modo, apesar das pirâmides construídas terem formas diferentes, quadrado e triângulo, as áreas dessas figuras geométricas são iguais.

Em relação ao que poderia acontecer caso as áreas das bases mudassem, foi mostrado na aula, pirâmides com mesma área da base e alturas diferentes produzem volumes diferentes. Da mesma, forma foi observado que pirâmides de área da base diferentes e alturas iguais produzem volumes diferentes. Além disso, mostrou-se que apesar da localização do canudo, que determina a altura, o cálculo do volume da pirâmide não mudará. Dessa forma, conclui-se que o volume de uma pirâmide pode ser determinado conhecendo-se a área da sua base e altura.

No questionário em relação às perguntas de número 3,4 e 5 (apêndice C e D), conclui-se que se compararmos pirâmides de mesma altura, mas com bases de áreas diferentes, o seu volume irá ser diferente e se as bases tiverem áreas iguais, mas as alturas forem diferentes o volume também irá mudar.

Após isso foi apresentado o Princípio de Cavalieri como justificativa para esse fato. Se dois sólidos têm a mesma altura e as suas secções planas de mesma altura têm a mesma área, então esses dois sólidos têm o mesmo volume. Assim, foi demonstrado experimentalmente o conceito de volume da pirâmide e uma pequena demonstração do Princípio de Cavalieri, por meio de moedas.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

As duas aulas foram uma amostra do tamanho do desafio a ser enfrentado pelos docentes na busca de novos métodos que estimulam a aprendizagem dos alunos. Tais métodos podem permitir um ensino de matemática descontraída e diferenciada, construindo um ambiente favorável ao ensino a obtenção do conhecimento em sala de aula.

Ao final das aulas, esperou-se que os alunos conseguissem compreender o conceito de volume e o Princípio de Cavalieri e por meio deles chegar a um conhecimento significativo, como também conseguir calcular o volume do sólido geométrico desejado. No entanto, era notável a falta de conhecimento dos alunos sobre os conceitos abordados, o que dificultou a execução satisfatória do experimento. Nesse contexto, esbarramos na falta de interesse de alguns alunos, por estarem acostumados com o modo tradicional de ensino. Além disso, a não convivência com a turma dificultou o acompanhamento da aprendizagem. Infelizmente, conceitos como o volume da pirâmide e o Princípio de Cavalieri são desconhecidos para alunos do ensino médio e era de se esperar que uma aula de poucos minutos não resolveria o problema completamente.

O processo de mudança no que tange à aprendizagem ainda é lento e, pelo que se pode observar na forma de ensino da educação brasileira, essa mudança esta longe de acontecer. Cabe aos professores aperfeiçoarem seus conhecimentos, como também buscarem novas metodologias de ensino para aplicarem na sala de aula, para que haja uma aprendizagem mais eficaz.

REFERÊNCIAS

BRASIL, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN+ Ensino Médio:** orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, SEMTEC, 2002.

BRASIL. Ministério da Educação, Secretária de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**: Ciências da natureza, Matemática e suas tecnologias. Volume 2. Brasília, 2006p.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional comum Curricular**. Brasília. 2016.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio.** Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias – Brasília: MEC/SEF, 2000.

CAIUSCA. A. **Geometria Espacial.** Educa mais Brasil. 2018. Disponível em: https://www.educamaisbrasil.com.br/enem/matematica/geometria-espacial. Acesso em 16 de mar. de 2023.

DICIO, **Dicionário Online de Português**. Porto. Disponível em: https://www.dicio.com.br/geometria/ . Acesso em: 16/03/2023.

FAINGUELERNT, E.K. **O Ensino de Geometria no 1º e 2º Graus.** In: A Educação Matemática em Revista. SBEM, nº 4, p.45. Blumenau. 1º semestre, 1995.

FRENSEL, K; DELGADO, J. **Geometria Analítica**. NEAD - Núcleo de Educação a Distância Curso de Licenciatura em Matemática. Universidade Federal do Maranhão, 2011.

GOUVEIA, R. **Geometria Plana.** Toda Matéria. Disponível em: https://www.todamateria.com.br/geometria-plana/. Acesso em 16 de mar. de 2023.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA (INEP) **Resultados Preliminares PISA 2018**. Brasília: MEC, 2019. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/ultimas-noticias/211-218175739/83191-pisa-

2018-revela-baixo-desempenho-escolar-em-leitura-matematica-e-ciencias-no-brasil. Acesso em: 17 de mar. 2023.

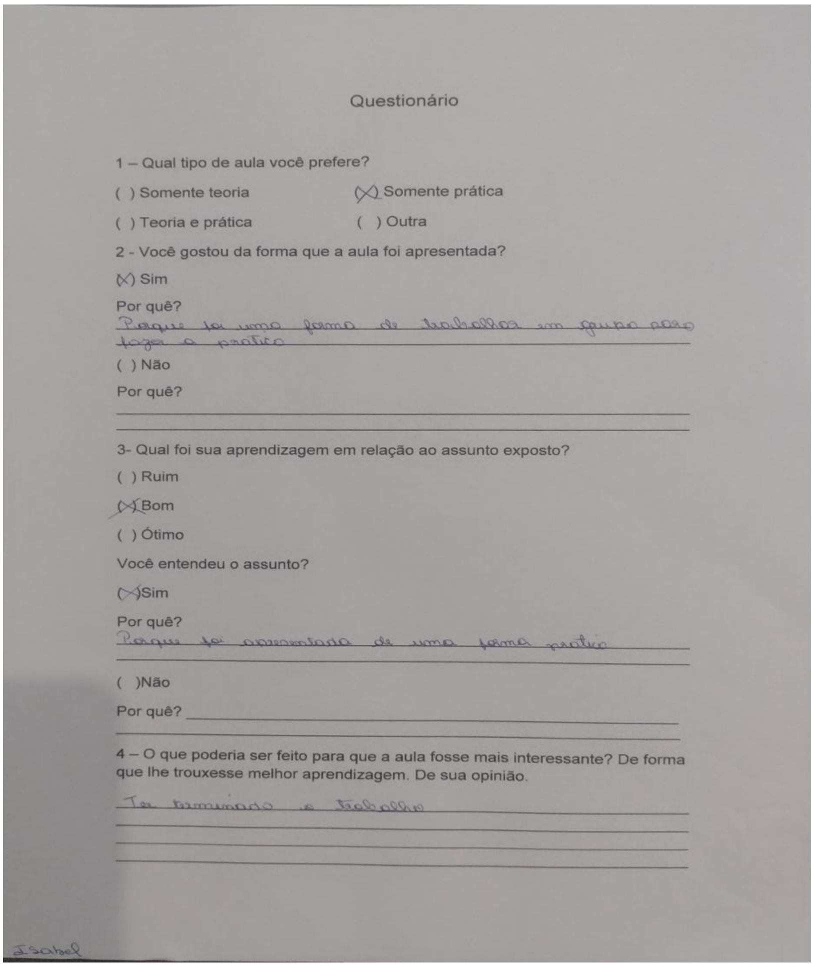
LORENZATO, S. **Para aprender matemática.** 3. ed. Campinas: Autores Associado, 2010.

MATEMÁTICA MULTIMIDIA. UNICAMP. **Volume de Pirâmides:** Geometria e Medidas. Disponível em: https://m3.ine.unicamp.br/. Acesso em 15 de Dez. de 2022.

PONTES, N.A. **O princípio de Cavalieri e suas aplicações para o cálculo de volumes**. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós- Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza Ceara 2014.

SÁ, P. F. de. **As atividades experimentais no ensino de matemática. REMATEC**, *[S. l.]*, v. 15, n. 35, p. 143–162, 2020. DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2020.n15.p143-162.id290. Disponível em http://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/99. Acesso em: 01 abr. 2023.

APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO AULA TURNO VESPERTINO



Questionário

1 – Qual tipo de aula você prefere?

( ) Somente teoria (X) Somente prática

( ) Teoria e prática ( ) Outra

2 - Você gostou da forma que a aula foi apresentada?

(X) Sim

Por quê?

Porque foi uma forma de trabalhar em grupo para fazer a pratica

( ) Não

Por quê?

3- Qual foi sua aprendizagem em relação ao assunto exposto?

( ) Ruim

(X) Bom

( ) Ótimo

Você entendeu o assunto?

(X)Sim

Por quê?

Porque foi apresentada de uma forma pratica

( )Não

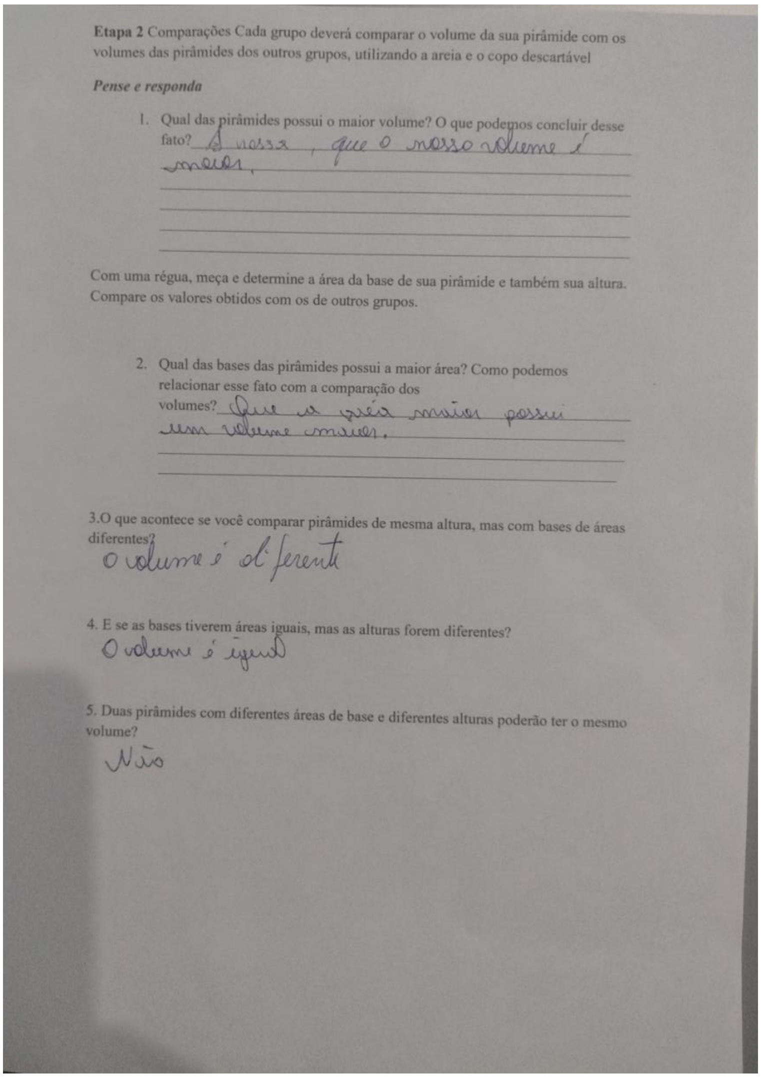
Por quê?

4 – O que poderia ser feito para que a aula fosse mais interessante? De forma que lhe trouxesse melhor aprendizagem. De sua opinião.

Ter terminado o trabalho

Isabel

APÊNDICE B– QUESTIONÁRIO AULA TURNO VESPERTINO



Etapa 2 Comparações Cada grupo deverá comparar o volume da sua pirâmide com os volumes das pirâmides dos outros grupos, utilizando a areia e o copo descartável

Pense e responda

1. Qual das pirâmides possui o maior volume? O que podemos concluir desse fato? A nossa, que o nosso volume é maior.

Com uma régua, meça e determine a área da base de sua pirâmide e também sua altura. Compare os valores obtidos com os de outros grupos.

2. Qual das bases das pirâmides possui a maior área? Como podemos relacionar esse fato com a comparação dos volumes? Que a área maior possui um volume maior.

3.O que acontece se você comparar pirâmides de mesma altura, mas com bases de áreas diferentes?

O volume é diferente

4. E se as bases tiverem áreas iguais, mas as alturas forem diferentes?

O volume é igual

5. Duas pirâmides com diferentes áreas de base e diferentes alturas poderão ter o mesmo volume?

Não

APÊNDICE C – QUESTIONÁRIO AULA TURNO MATUTINO PIRÂMIDE BASE QUADRADRA

Etapa 2 Comparações Cada grupo deverá comparar o volume da sua pirâmide com os volumes das pirâmides dos outros grupos, utilizando a areia e o copo descartável

(11)
7

Pense e responda

1. Qual das pirâmides possui o maior volume? O que podemos concluir desse fato? TODOS SÃO IGUAIS

Com uma régua, meça e determine a área da base de sua pirâmide e também sua altura. Compare os valores obtidos com os de outros grupos.

ALTURA = 7 cm   AREA : $l = 6$

2. Qual das bases das pirâmides possui a maior área? Como podemos relacionar esse fato com a comparação dos volumes? AS AREA SÃO IGUAIS

ÁREA QUADRADRO

$Ab = l^2$

$A = 6.6$

$A = 36 cm^2$

3. O que acontece se você comparar pirâmides de mesma altura, mas com bases de áreas diferentes?

O VOLUME IRÁ MUDAR

VOLUME

$V = \frac{36.7}{3}$

4. E se as bases tiverem áreas iguais, mas as alturas forem diferentes?

O VOLUME TAMBÉM MUDA

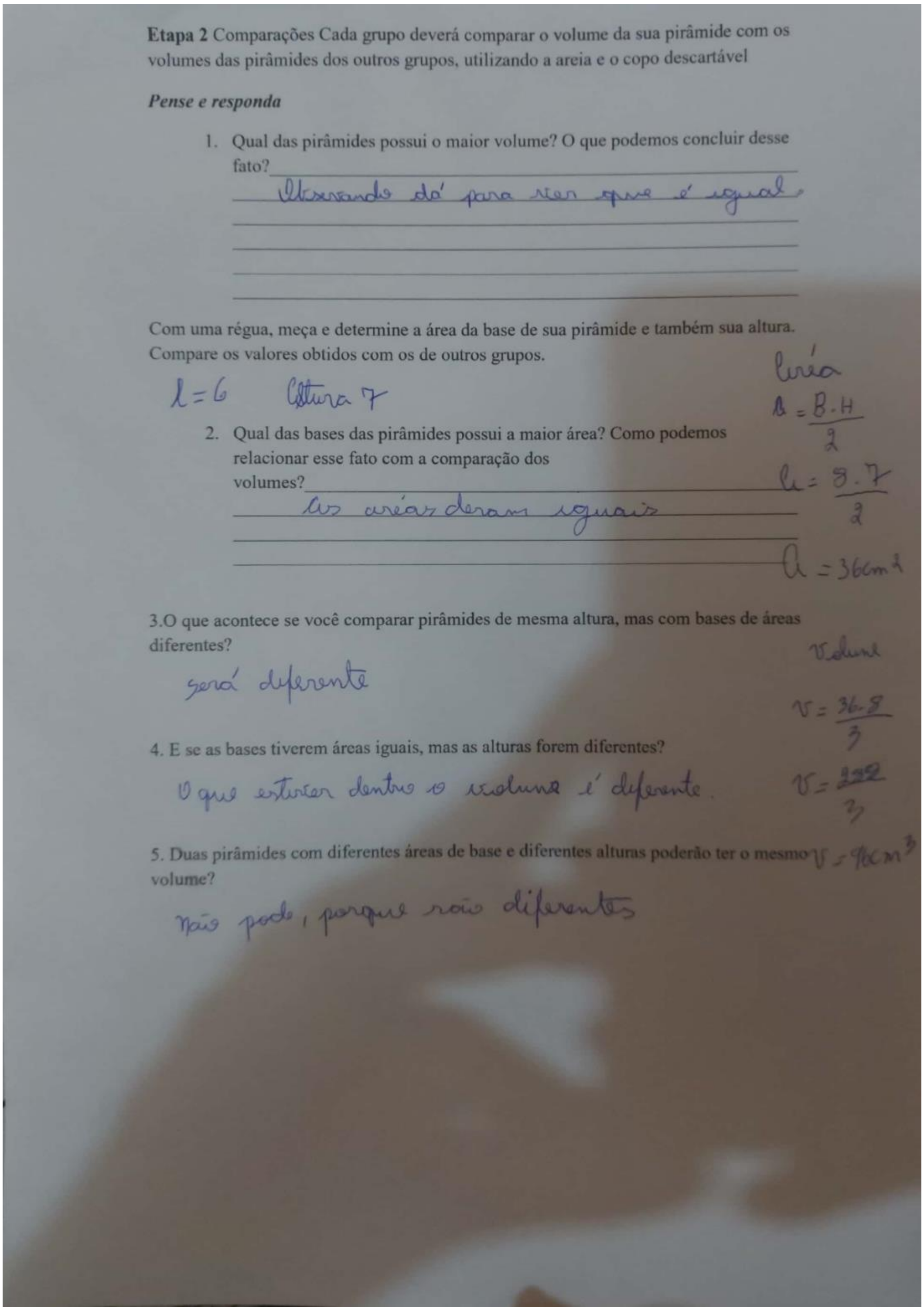
$V = 84 cm^3$

5. Duas pirâmides com diferentes áreas de base e diferentes alturas poderão ter o mesmo volume?

CONFORME EXPLICADO NO ENTENDIDO

NÃO.

APÊNDICE D – QUESTIONÁRIO SOBRE AULA TURNO MATUTINO PIRAMIDE BASE TRIANGULAR



Etapa 2 Comparações Cada grupo deverá comparar o volume da sua pirâmide com os volumes das pirâmides dos outros grupos, utilizando a areia e o copo descartável

Pense e responda

1. Qual das pirâmides possui o maior volume? O que podemos concluir desse fato?

Observando dá para ver que é igual.

Com uma régua, meça e determine a área da base de sua pirâmide e também sua altura. Compare os valores obtidos com os de outros grupos.

$l = 6$ Altura 7

Área

$A = \frac{B \cdot H}{2}$

$A = \frac{8 \cdot 7}{2}$

$A = 36cm^2$

2. Qual das bases das pirâmides possui a maior área? Como podemos relacionar esse fato com a comparação dos volumes?

As áreas deram iguais

3.O que acontece se você comparar pirâmides de mesma altura, mas com bases de áreas diferentes?

será diferente

Volume

$V = \frac{36 \cdot 8}{3}$

$V = \frac{288}{3}$

$V = 96cm^3$

4. E se as bases tiverem áreas iguais, mas as alturas forem diferentes?

O que estiver dentro o volume é diferente.

5. Duas pirâmides com diferentes áreas de base e diferentes alturas poderão ter o mesmo volume?

Não pode, porque são diferentes

ANEXO A- ROTEIRO DO EXPERIMENTO

Matemática Multimídia

GEOMETRIAS E MEDIDAS

O EXPERIMENTO

Experimento

Volume de pirâmides

Objetivos da unidade

1. Constatar experimentalmente que o volume de uma pirâmide com base poligonal depende apenas da área de sua base e da sua altura.
2. Motivar para a compreensão do Princípio de Cavalieri para volumes de sólidos.

UNICAMP

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL

Volume de pirâmides

O EXPERIMENTO

Sinopse

Nesta atividade propomos inicialmente a construção de algumas pirâmides, todas com a mesma altura e bases poligonais diferentes – as medidas dos lados serão diferentes, mas a área das bases será a mesma. A seguir, solicitamos aos alunos a comparação experimental dos volumes das pirâmides construídas. A constatação da igualdade dos volumes será usada como introdução para o Princípio de Cavalieri, sendo uma explicação para o resultado experimental.

Conteúdo

- Geometria Espacial: Volume de Pirâmides, Princípio de Cavalieri.

Objetivos

1. Constatar experimentalmente que o volume de uma pirâmide com base poligonal depende apenas da área de sua base e da sua altura.
2. Motivar para a compreensão do Princípio de Cavalieri para volumes de sólidos.

Duração

Uma aula dupla.

Material relacionado

- Experimento "Comparação de Volumes": neste experimento, também associado ao Princípio de Cavalieri, são comparados os volumes de uma semiesfera, de um cilindro e de um cone, ambos de mesma base e mesma altura;
- Programa de vídeo sobre o Princípio de Cavalieri: "Pela trilha de Arquimedes", editora Unicamp.

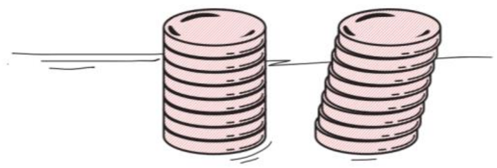
Matemática Multimídia

Introdução

Quando se trata de volumes, saber fórmulas não é a única coisa que importa: existem algumas propriedades que, se bem compreendidas, podem ser muito úteis para a determinação de volumes de formas muito mais complexas do que as vistas normalmente no Ensino Médio.

Neste experimento, a partir de materiais simples como isopor, cartolina e areia, seus alunos poderão aprender uma dessas propriedades analisando o comportamento do volume de pirâmides com: 1) bases de mesma área, mas formatos diferentes e 2) alturas de mesma medida, mas em diferentes posições.

Além disso, este experimento abre portas para a discussão da relação entre o volume de um prisma e uma pirâmide de mesma base e também para a introdução do Princípio de Cavalieri, ambos discutidos com mais detalhes no Guia do Professor.



O Experimento

Material necessário

- Uma folha de sulfite;
- Papelão;
- Tesoura;
- Régua;
- Canudo;
- Copo Descartável;
- Areia.

FIG. 1

Preparação

Este experimento deve ser proposto para grupos de dois a quatro alunos. É importante levar prontos para a sala de aula os seguintes materiais:

1. Os polígonos em anexo que servirão de base para as pirâmides. Cada grupo poderá escolher a base de sua preferência;
2. Canudinhos suficientes (um para cada grupo) todos com o mesmo comprimento (cerca de 7 cm);
3. Dois modelos de pirâmide: um com a área da base diferente da que será utilizada pelos alunos e com a mesma altura; e outro com a mesma área da base, mas com a medida da altura diferente das outras. Esses modelos ajudarão no Fechamento do experimento.

Construção das pirâmides

ETAPA 1

Nesta etapa, os grupos devem construir os modelos de pirâmides e depois comparar seus volumes.

A construção
Peça para que cada grupo escolha a base que desejar e a reproduza no papelão como molde da base da sua pirâmide, seguindo os passos:

1. Recortar a base de papelão;
2. Perfurar o papelão num local qualquer da base e nele fixar o canudo com a fita adesiva de modo que este fique ortogonal à base;
3. Planificar a pirâmide marcando os pontos que correspondem aos seus vértices, conforme a FIGURA 2:

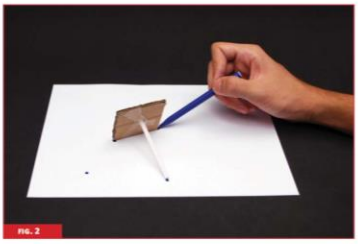


FIG. 2

4. Ligar todos os pontos marcados na folha e desenhar uma aba para facilitar a montagem, conforme a FIGURA 3:

FIG. 5

Comparações

ETAPA 2

Comparações entre os grupos
Ao fim das construções, cada grupo deve preencher a sua pirâmide com areia e despejá-la no copo descartável, marcando o nível, como na FIGURA 6. É importante que esse nível seja comparado com o de outros grupos, para que todos percebam que o volume é o mesmo.

FIG. 6

Volume de pirâmides

Fechamento

Quando os alunos terminarem de responder às perguntas da FOLHA DO ALUNO, peça as conclusões que obtiveram do experimento, discutindo os resultados alcançados e as suas implicações. Este é o momento de formalizar os resultados atingidos experimentalmente pelos alunos. Porém, vamos antes tratar da primeira questão proposta aos grupos:

Questão para os alunos

Qual das pirâmides possui o maior volume?
O que podemos concluir desse fato?

Ao recolher as respostas dos grupos, esperamos que os alunos percebam que os volumes são iguais. Devem ser discutidas, então, quais conclusões podem ser obtidas desse fato, perguntando, por exemplo, quais são as diferenças entre as pirâmides e quais características elas têm em comum. Dessa forma, contamos com que todos percebam inicialmente que todas as pirâmides têm a mesma altura, que é determinada pelo comprimento do canudo, independentemente do local onde este tenha sido fixado (o local escolhido para fixar o canudo determina a posição do vértice superior da pirâmide).

Agora, discuta com os alunos as respostas obtidas para a segunda questão:

Questão para os alunos

Qual das bases das pirâmides possui a maior área? Como podemos relacionar esse fato com a comparação dos volumes?

Ajude os alunos que tiverem eventuais dificuldades no cálculo das áreas das bases, recordando com eles as fórmulas necessárias. Em seguida, enfatize que todas as pirâmides construídas têm bases diferentes, mas áreas iguais. O que poderia acontecer, então, caso as áreas das bases mudassem?

Neste momento, convém apresentar uma pirâmide que tenha área da base diferente e mesma altura que as pirâmides construídas, e mostrar que seu volume é diferente do volume das pirâmides construídas pelos grupos. Além disso, mostre uma pirâmide que possui a área da base igual à área da base das pirâmides com que os alunos trabalharam, mas com altura diferente. A idéia é enfatizar que, apesar da localização do canudo, que determina a altura, não importar, a sua medida importa. Assim, podemos concluir que *o volume de uma pirâmide pode ser determinado conhecendo-se a área da sua base e altura*. Este é o momento em que poderá ser apresentado o Princípio de Cavalieri como justificativa para esse fato:

Se dois sólidos têm a mesma altura e as suas secções planas de mesma altura têm a mesma área, então esses dois sólidos têm o mesmo volume.

A compreensão de que o princípio é satisfeito pelas pirâmides de mesma base e mesma altura demandará uma explicação adicional que está detalhada no Guia do Professor. Também consta no guia a demonstração de que o volume de uma pirâmide é igual a um terço da área da base vezes a altura. A verificação experimental deste fato está sugerida como uma variação deste experimento.

Ficha técnica

Matemática Multimídia

Autoras
Claudina Izepe Rodrigues
e Sueli I. R. Costa

Coordenação de redação
Leonardo Barrichelo

Redação
Kauan Pastini Paula Leite

Revisores
Matemática
Sueli Irene Rodrigues Costa
Língua Portuguesa
Carolina Bonturi
Pedagogia
Ângela Soligo

Projeto gráfico
Preface Design

Ilustrador
Lucas Ogasawara de Oliveira

Fotógrafo
Augusto Fidalgo Yamamoto

UNICAMP

Universidade Estadual de Campinas
Reitor
Fernando Ferreira Costa
Vice-Reitor
Edgar Salvadori de Decca
Pró-Reitor de Pós-Graduação
Euclides de Mesquita Neto

Matemática Multimídia
Coordenador Geral
Samuel Rocha de Oliveira
Coordenador de Experimentos
Leonardo Barichello

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC – UNICAMP)
Diretor
Jayme Vaz Jr.
Vice-Diretor
Edmundo Capelas de Oliveira

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL

ANEXO B-GUIA DO PROFESSOR

Matemática Multimídia

GEOMETRIA
E MEDIDAS

GUIA DO PROFESSOR

Experimento

Volume de pirâmides

Objetivos da unidade

1. Constatar experimentalmente que o volume de uma pirâmide com base poligonal depende apenas da área de sua base e da sua altura.
2. Motivar para a compreensão do Princípio de Cavalieri para volumes de sólidos.

UNICAMP

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL

Volume de pirâmides

GUIA DO PROFESSOR

Sinopse

Nesta atividade propomos inicialmente a construção de algumas pirâmides, todas com a mesma altura e bases poligonais diferentes – as medidas dos lados serão diferentes, mas a área das bases será a mesma. A seguir, solicitamos aos alunos a comparação experimental dos volumes das pirâmides construídas. A constatação da igualdade dos volumes será usada como introdução para o Princípio de Cavalieri, sendo uma explicação para o resultado experimental.

Conteúdo

- Geometria Espacial: Volume de Pirâmides, Princípio de Cavalieri.

Objetivos da unidade

1. Constatar experimentalmente que o volume de uma pirâmide com base poligonal depende apenas da área de sua base e da sua altura.
2. Motivar para a compreensão do Princípio de Cavalieri para volumes de sólidos.

Duração

Uma aula dupla.

Material relacionado

- Experimento "Comparação de Volumes": neste experimento, também associado ao Princípio de Cavalieri, são comparados os volumes de uma semiesfera, de um cilindro e de um cone, ambos de mesma base e mesma altura;
- Programa de vídeo sobre o Princípio de Cavalieri: "Pela trilha de Arquimedes", editora Unicamp.

Matemática Multimídia

Introdução

Neste experimento é explorada a construção de pirâmides de mesma altura com bases poligonais, embora diferentes, de mesma área. Partimos de polígonos com áreas iguais para a base, sendo que o vértice superior é determinado pela fixação do canudo perpendicular à base. As pirâmides são construídas, então, a partir de suas planificações. O objetivo inicial é a comparação experimental dos volumes das diferentes pirâmides.

A constatação da igualdade dos volumes das pirâmides poderá motivar o professor para a introdução do Princípio de Cavalieri, como explicação para os resultados experimentais. No fechamento deste guia são apresentados esse princípio e uma demonstração da expressão para o cálculo do volume de pirâmides.

Duas variações e sequências naturais deste experimento, sugeridas no final deste guia, ilustram o resultado de que o volume de uma pirâmide é um terço do volume do prisma correspondente.

Motivação

Acreditamos que este experimento desperte fortemente a percepção geométrica do aluno. O desafio da construção de pirâmides de diferentes formatos, todas com altura e área da base iguais, e a constatação dos volumes iguais possibilitarão o desenvolvimento da percepção dos elementos essenciais no cálculo do volume de uma pirâmide e a comparação deste com o volume do prisma correspondente.

Motivação

Etapa 1 **Construção das pirâmides**

Nesta etapa, cada grupo de alunos deve construir o modelo de uma pirâmide para ser utilizado na etapa seguinte. Cada sugestão de polígonos de mesma área anexada no final do experimento pode ser utilizada por dois grupos distintos, sendo que cada um deles escolherá uma posição para fixar o canudo na base. Esta atividade é uma interessante exploração da planificação de superfícies de sólidos.

Etapa 2 **Comparações**

O objetivo inicial desta etapa é verificar experimentalmente o volume da pirâmide construída pelo grupo. Este volume deve ser comparado com o das pirâmides de outros grupos, assim como devem ser comparadas as alturas e as áreas das bases. Cada grupo deve anotar suas observações e conclusões.

Fechamento

O fato fundamental associado a este experimento é que o volume de uma pirâmide depende apenas da área de sua base e de sua altura, sendo um terço do produto de ambos. A demonstração deste fato pode ser feita a partir do Princípio de Cavalieri e trata-se de uma oportunidade para abordar outros resultados como, por exemplo, a relação entre os volumes da esfera, do cone e do cilindro (ver o experimento "Comparação de Volumes" desta série).

O Princípio de Cavalieri

FIG. 1 *Boaventura Cavalieri – 1598-1647 – Profesor da Universidade de Bolonha*

O resultado conhecido como Princípio de Cavalieri está nas origens do chamado Cálculo Infinitesimal e já era utilizado por Arquimedes no século III a.C. como método para a descoberta de alguns resultados, como, por exemplo, o da relação entre os volumes de uma semiesfera, de um cone e de um cilindro de mesma base e mesma altura [Costa]. A denominação "de Cavalieri" é uma homenagem a Boaventura Cavalieri (1598-1647) que foi discípulo de Galileu e um dos precursores do advento do Cálculo Integral no século XVI. Este princípio é de certa forma intuitivo, tem muitas aplicações e costuma ser assumido como um axioma para se apresentar com certo rigor o cálculo de áreas e volumes sem o formalismo do Cálculo Integral.

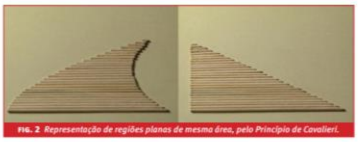


FIG. 2 *Representação de regiões planas de mesma área, pelo Princípio de Cavalieri.*

Para figuras planas, este princípio estabelece que figuras têm a mesma área quando apresentam a mesma altura e segmentos de mesmo tamanho em cada nível correspondente. A figura acima ilustra um triângulo e uma deformação deste, sendo que ambos têm a mesma área, segundo o Princípio de Cavalieri para regiões planas.

FIG. 3 *Representação de sólidos de mesmo volume, pelo Princípio de Cavalieri.*

De forma análoga, sólidos no espaço possuem o mesmo volume quando tiverem alturas iguais e as seções planas correspondentes a cada nível com a mesma área, como ilustrado na figura acima; ou, dito de outra forma:

Princípio de Cavalieri para sólidos

Se todas as seções de dois sólidos por planos paralelos a um plano dado tiverem a mesma área, então os dois sólidos terão o mesmo volume.

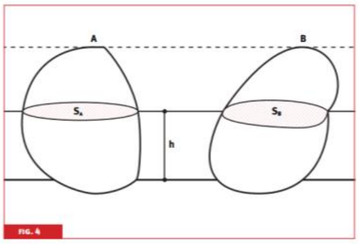


FIG. 4

Na BIBLIOGRAFIA constam, além das referências utilizadas, sugestões para leitura sobre o princípio de Cavalieri.

O volume de uma pirâmide

Considere uma pirâmide de base triangular ABC e vértice V. Seja $A'B'C'$ a seção desta pirâmide determinada por um plano paralelo à base, como na figura ao lado. Na face lateral VAB da pirâmide, os triângulos $VA'B'$ e VAB são semelhantes. O mesmo ocorre com os pares de triângulos nas outras duas faces, ou seja, o triângulo $VA'C'$ é semelhante ao triângulo VAC, assim como o triângulo $VB'C'$ é semelhante ao triângulo VBC. Além disso, a razão de semelhança entre os três pares de triângulos é a mesma. Com isso, podemos concluir que a base ABC e a seção $A'B'C'$ são triângulos semelhantes.

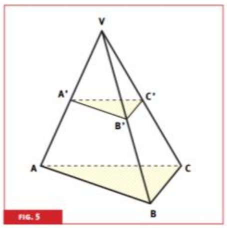


FIG. 5

Sendo VD a altura da pirâmide $VABC$ e VD' a altura da pirâmide $VA'B'C'$, os triângulos retângulos $VD'A'$ e VDA são semelhantes e a razão de semelhança é VD'/VD. Assim, podemos concluir que a razão de semelhança dos triângulos $A'B'C'$ e ABC também é VD'/VD, o que implica que a razão entre as áreas desses triângulos é o quadrado da razão entre as alturas das pirâmides.

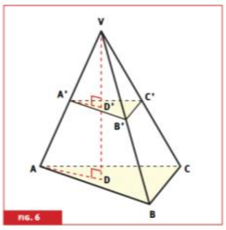


FIG. 6

Agora, considere duas pirâmides triangulares, $V_1A_1B_1C_1$ e $V_2A_2B_2C_2$, de alturas iguais e com bases de áreas iguais, como na figura. Sejam S_1 e S_2 as áreas das seções nas pirâmides $V_1A_1B_1C_1$ e $V_2A_2B_2C_2$, respectivamente, determinadas por um mesmo plano paralelo às bases $A_1B_1C_1$ e $A_2B_2C_2$ e a uma distância h dos vértices das pirâmides. Sendo S a área das bases $A_1B_1C_1$ e $A_2B_2C_2$, respectivamente, então, $S_1/S = (h/H)^2 = S_2/S$. Assim, $S_1 = S_2$. E, pelo Princípio de Cavalieri, os volumes das pirâmides são iguais.

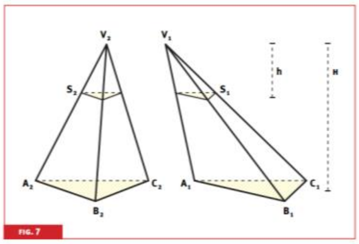


FIG. 7

Definição

Duas pirâmides triangulares de mesma altura e com bases de áreas iguais têm o mesmo volume.

A seguir, comparamos o volume de uma pirâmide com o volume de um prisma de mesma base e mesma altura.

Consideremos uma pirâmide triangular com base ABC e vértice V e um prisma com as bases triangulares ABC e $VB'C'$ com a mesma altura da pirâmide, como na FIGURA 8. Dividimos o prisma em três pirâmides $VABC$, $B'VBC$ e $CVB'C'$.

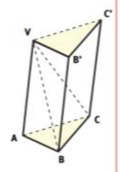


FIG. 8

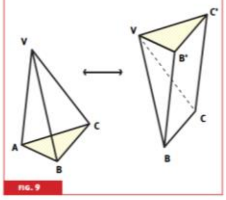


FIG. 9

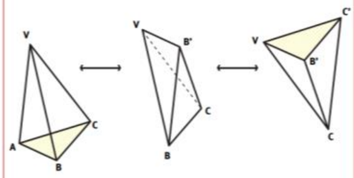


FIG. 10

Sejam V_1, V_2 e V_3, respectivamente, os volumes das três pirâmides. O volume do prisma será, portanto, a soma destes três volumes.

Temos que $V_1 = V_2$, pois as pirâmides $VABC$ e $B'VBC$ têm as respectivas bases VAB e $VB'B$ congruentes, já que VB é diagonal do paralelogramo $VABB'$, e possuem a mesma altura. Da mesma forma, $V_1 = V_3$, pois as pirâmides $VABC$ e $CVB'C'$ têm as respectivas bases ABC e $VB'C'$ congruentes e a mesma altura, que é igual à altura do prisma. Logo, o volume do prisma é três vezes o volume da pirâmide $VABC$. Sabendo que o volume de um prisma é dado pelo produto da área da sua base por sua altura, concluímos que:

Definição

O volume de uma pirâmide triangular é igual a um terço do produto da área de sua base por sua altura.

O mesmo resultado vale para pirâmides que têm por base um polígono com qualquer número de lados. Podemos demonstrar este fato simplesmente particionando o polígono da base em triângulos a partir de um de seus vértices. O volume da pirâmide de base poligonal será a soma dos volumes das pirâmides triangulares assim construídas. Donde segue o resultado:

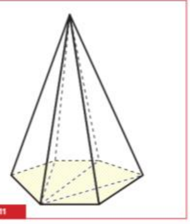


FIG. 11

Definição

O volume de uma pirâmide de base poligonal é igual a um terço do produto da área de sua base por sua altura

Observamos que uma circunferência pode ser aproximada por polígonos regulares com um número cada vez maior de lados. Podemos, assim, por um processo de limite, demonstrar que:

Definição

O volume de um cone circular é igual a um terço do produto da área de sua base por sua altura.

Este processo de aproximação de curvas fechadas por polígonos é o que permite a generalização da expressão para o cálculo de volumes de cones com base de qualquer formato.

Variações

Primeira sugestão

Uma sequência natural deste experimento que recomendamos fortemente é a construção dos prismas retos com bases iguais às bases das pirâmides propostas, utilizando materiais e procedimentos semelhantes. O objetivo é a constatação experimental de que o volume de uma pirâmide de base poligonal qualquer é um terço do volume do prisma de mesma base e mesma altura.

Segunda sugestão

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN*), a composição e a decomposição de figuras devem ser utilizadas para o cálculo de volumes relacionados a figuras espaciais. Neste sentido, propomos a seguir outro experimento que auxilia a compreensão da comparação do volume de uma pirâmide triangular com o do prisma correspondente. Essa sugestão pode ser preparada pelo professor ou proposta aos alunos.

A partir de um prisma de base triangular feito em espuma floral por meio de dois cortes, podem ser obtidas três pirâmides, como nas figuras abaixo. Observamos que os cortes ilustrados abaixo reproduzem o esquema da demonstração da seção anterior.

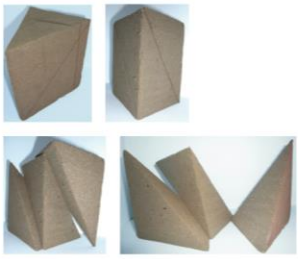


FIG. 12

O objetivo é constatar que os volumes das pirâmides são iguais e, além disso, que o volume de uma pirâmide é igual a um terço do volume do prisma triangular. Esse resultado já está provado neste guia.

Por meio de manipulações, observações e medições, como é sugerido na demonstração da seção anterior, os alunos poderão constatar a igualdade entre os volumes das pirâmides e a relação entre o volume de cada pirâmide e o prisma.

Bibliografia

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **A Matemática do Ensino Médio**, Vol 2, Coleção do Professor de Matemática, (3ª Edição). Rio de Janeiro: SBM, 2000.

LIMA, Elon Lages. **Medida e Forma em Geometria**, Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. 4ª. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

COSTA, Sueli I. R. **"O Método" de Arquimedes em História e Tecnologia no Ensino da Matemática** – Volume II, p. 61-76. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2008.

Ficha técnica

Matemática Multimídia

AUTORAS
Claudina Izepe Rodrigues
e Sueli I. R. Costa

REVISORES
Matemática
Sueli Irene Rodrigues Costa
Língua Portuguesa
Carolina Bonturi
Pedagogia
Ângela Soligo

PROJETO GRÁFICO E ILUSTRAÇÕES TÉCNICAS
Preface Design

FOTÓGRAFIAS
Claudina Izepe Rodrigues
e Sueli I. R. Costa

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Reitor
Fernando Ferreira Costa
Vice-Reitor
Edgar Salvadori de Decca
Pró-Reitor de Pós-Graduação
Euclides de Mesquita Neto

MATEMÁTICA MULTIMÍDIA
Coordenador Geral
Samuel Rocha de Oliveira
Coordenador de Experimentos
Leonardo Barichello

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA (IMECC – UNICAMP)
Diretor
Jayme Vaz Jr.
Vice-Diretor
Edmundo Capelas de Oliveira

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

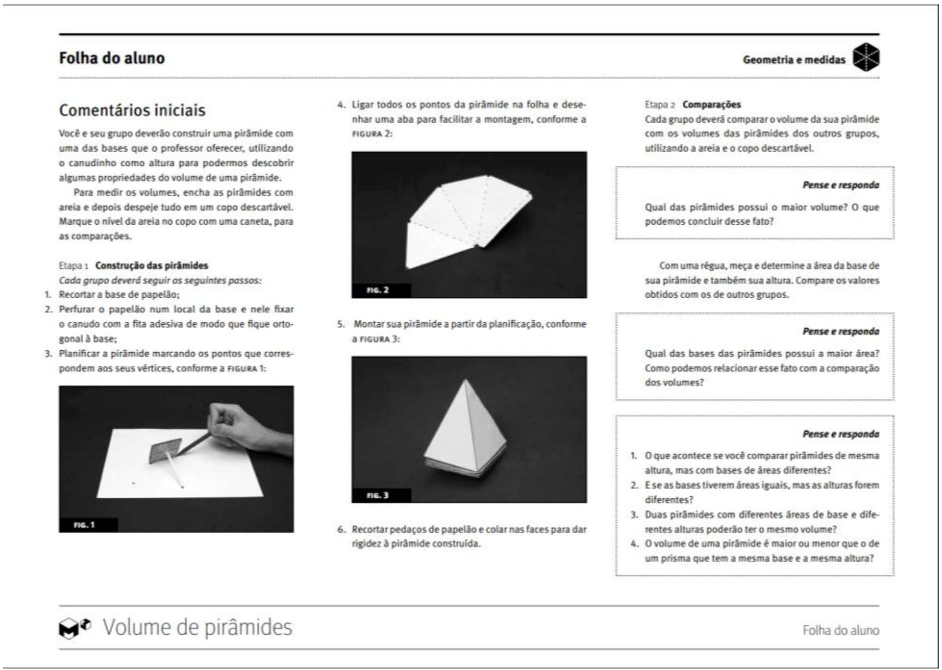
Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL

ANEXO C- FOLHA DO ALUNO



Folha do aluno

Geometria e medidas

Comentários iniciais

Você e seu grupo deverão construir uma pirâmide com uma das bases que o professor oferecer, utilizando o canudinho como altura para podermos descobrir algumas propriedades do volume de uma pirâmide.

Para medir os volumes, encha as pirâmides com areia e depois despeje tudo em um copo descartável. Marque o nível da areia no copo com uma caneta, para as comparações.

Etapa 1 **Construção das pirâmides**

Cada grupo deverá seguir os seguintes passos:

1. Recortar a base de papelão;
2. Perfurar o papelão num local da base e nele fixar o canudo com a fita adesiva de modo que fique ortogonal à base;
3. Planificar a pirâmide marcando os pontos que correspondem aos seus vértices, conforme a FIGURA 1:

FIG. 1

4. Ligar todos os pontos da pirâmide na folha e desenhar uma aba para facilitar a montagem, conforme a FIGURA 2:

FIG. 2

5. Montar sua pirâmide a partir da planificação, conforme a FIGURA 3:

FIG. 3

6. Recortar pedaços de papelão e colar nas faces para dar rigidez à pirâmide construída.

Etapa 2 **Comparações**

Cada grupo deverá comparar o volume da sua pirâmide com os volumes das pirâmides dos outros grupos, utilizando a areia e o copo descartável.

Pense e responda

Qual das pirâmides possui o maior volume? O que podemos concluir desse fato?

Com uma régua, meça e determine a área da base de sua pirâmide e também sua altura. Compare os valores obtidos com os de outros grupos.

Pense e responda

Qual das bases das pirâmides possui a maior área? Como podemos relacionar esse fato com a comparação dos volumes?

Pense e responda

1. O que acontece se você comparar pirâmides de mesma altura, mas com bases de áreas diferentes?
2. E se as bases tiverem áreas iguais, mas as alturas forem diferentes?
3. Duas pirâmides com diferentes áreas de base e diferentes alturas poderão ter o mesmo volume?
4. O volume de uma pirâmide é maior ou menor que o de um prisma que tem a mesma base e a mesma altura?

Volume de pirâmides

Folha do aluno