

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
PRO REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
DEPARTAMENTO DE APOIO A PESQUISA
PROGRAMA INSTITUCIONAL DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA

INFLUÊNCIA DA RESISTÊNCIA DO AR NO MOVIMENTO
ANÔMALO DE UM PROJÉTIL

Bolsista: Patrícia Paula Fernandes Oliveira, CNPq

MANAUS
2009

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
PRO REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
DEPARTAMENTO DE APOIO A PESQUISA
PROGRAMA INSTITUCIONAL DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA

RELATÓRIO FINAL
PIB – E – 064/2008
INFLUÊNCIA DA RESISTÊNCIA DO AR NO MOVIMENTO
ANÔMALO DE UM PROJÉTIL

Bolsista: Patrícia Paula Fernandes Oliveira
Orientador: Dr. José Ricardo de Sousa

MANAUS
2009

RESUMO

O estudante do curso de física, em particular, e mesmo no ensino médio, estuda como sistema simples e de certa forma realista para certas classes de objetos o movimento de um projétil. Trata-se de um problema trivial que tem como meta calcular, por exemplo, o tempo total de percurso (T), altura máxima (H) e alcance (R). Por outro lado, anos atrás Walker estudou este problema e verificou que o módulo do vetor deslocamento em função da coordenada x , isto é, $r(x)$, é função crescente e atinge o seu valor máximo $r(x=A)=A$. Para certos valores do ângulo de lançamento observou-se que $r(x)$ cresce, atingindo um máximo local no certo valor de $x < x_c$, decrescendo ligeiramente atingindo também um mínimo local e depois cresce monotonicamente até atingir o seu valor máximo global em $x=A$. A este fenômeno, Walker denominou de **INDO E VINDO**, e podemos interpretar fisicamente, colocando o referencial em cima da partícula em deslocamento e tem-se a impressão real para este valor particular do ângulo, que estamos inicialmente se afastando da origem ao longo do vetor deslocamento, depois voltamos para a origem e finalmente se afastamos atingindo o seu valor máximo em $x=A$. No problema real, na natureza, o movimento de um projétil é influenciado pela resistência do ar, que cálculo aerodinâmico mostra que a força de arraste (contrária ao movimento) é proporcional a velocidade elevada a certa potência n (i.e., $F_r = AV^n$). Devido a esta força que o movimento de um pára-quedista, por exemplo, proporciona a ele descer com certa velocidade constante e moderada a fim de não ocorrer nenhuma fratura. Assim sendo, investigaremos neste trabalho o fenômeno anômalo do movimento do projétil como uma função dos parâmetros envolvidos no problema.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	5
1- FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	6
POSIÇÃO E DESLOCAMENTO.....	6
VELOCIDADE.....	6
ACELERAÇÃO	7
2- MOVIMENTO DE PROJÉTIS.....	9
3- ANOMALIA NO MOVIMENTO DO PROJÉTIL.....	11
ÂNGULO CRÍTICO.....	14
4- LANÇAMENTO DE PROJÉTIS COM RESISTÊNCIA DO AR.....	15
MÉTODOS UTILIZADOS.....	18
RESULTADOS.....	19
CONCLUSÃO.....	23
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	24
CRONOGRAMA.....	25

INTRODUÇÃO

No nosso cotidiano, o movimento dos projéteis (caneta, bola, bala de fuzil ou canhão, etc.) não ocorre da forma como idealizada no vácuo, ou seja, o alcance real (R) difere do valor ideal, a altura máxima (H) difere do valor ideal, etc [1]. O principal fator que interfere nos valores de R , H e T é a força de resistência do ar (F_a), que se opõe ao movimento dos projéteis. Veremos que muitas vezes esse tipo de resistência é fundamental para ocorrência de situações específicas como a queda de um páraquedista, o surgimento da força de sustentação de aviões ou a minimização dos efeitos catastróficos da entrada de meteoros em nossa atmosfera.

Graças à resistência do ar, as gotas de chuva chegam à superfície da Terra com velocidades terminais que variam de alguns milímetros por segundo a alguns metros por segundo, dependendo do volume da gota. Um páraquedista ao saltar de um avião (velocidade inicial nula), devido à força peso (atração gravitacional entre Terra-homem) ele desce, tendo a sua velocidade na vertical incrementada rapidamente. Durante a queda, devido ao movimento relativo do páraquedista em relação ao ar, surge a força de resistência do ar em sentido contrário ao peso do páraquedista. Como essa velocidade ainda é muito grande para que o pára-quedista chegue ao solo com segurança, deve-se diminuir sua intensidade, aplicando uma desaceleração. A forma mais simples de realizar esse procedimento é aumentando a superfície de contato com o ar, através da abertura de um páraquedas.

Anos atrás, Walker [2] publicou um trabalho sobre lançamento de projétil no vácuo, onde verificou que dependendo do ângulo θ de lançamento, o módulo do vetor posição $r(x) = (x^2 + y^2)^{1/2}$ apresenta um comportamento anômalo. Isto é, para $70^\circ \leq \theta < 90^\circ$ $r(x)$ cresce monotonicamente até um certo valor $X_0 \leq R_0$, e depois decresce até atingir o valor do alcance. Neste projeto, investigaremos como a resistência do ar influencia neste comportamento anômalo, onde utilizaremos uma força de arraste generalizada do tipo KV.

1- FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.

POSIÇÃO E DESLOCAMENTO

A localização de uma partícula é dada através do vetor posição \mathbf{r} , um vetor que vai de um ponto de referência (geralmente a origem de um sistema de coordenadas) até a partícula. Usando uma notação de vetores unitários ortogonais podemos escrever \mathbf{r} como

$$\mathbf{r} = xi + yj + zk,$$

onde x , y e z são as componentes de \mathbf{r} , \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} são os respectivos vetores unitários.

Quando um objeto está em movimento, seu vetor posição varia, ligando sempre a origem ao objeto. Se o vetor posição no instante t_1 é \mathbf{r}_1 e no instante $t_1 + \Delta t$ seguinte é \mathbf{r}_2 , então seu deslocamento $\Delta\mathbf{r}$ durante o intervalo Δt é definido por

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$$

VELOCIDADE

Se uma partícula sofre um deslocamento $\Delta\mathbf{r}$, durante um intervalo de tempo Δt , então, sua velocidade média é definida por

$$\mathbf{v}' = \Delta\mathbf{r}/\Delta t$$

que pode ser escrita por extenso como

$$\mathbf{v}' = V'_x\mathbf{i} + V'_y\mathbf{j} + V'_z\mathbf{k},$$

onde $\mathbf{v}'_x = \Delta x/\Delta t$, $\mathbf{v}'_y = \Delta y/\Delta t$ e $\mathbf{v}'_z = \Delta z/\Delta t$.

A velocidade instantânea \mathbf{v} é o limite de \mathbf{v}' , quando Δt tende a zero. No cálculo diferencial, lembramos que este limite é a derivada de \mathbf{r} em relação a t , ou seja,

$$\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt.$$

Substituindo \mathbf{r} obtemos $(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$, teremos:

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}.$$

onde $v_x = dx/dt$, $v_y = dy/dt$ e $v_z = dz/dt$ são as componentes do vetor velocidade.

ACELERAÇÃO

Quando a velocidade de uma partícula varia de \mathbf{v}_1 para \mathbf{v}_2 , no intervalo de tempo Δt , sua aceleração média \mathbf{a}' , durante esse intervalo de tempo, é definida por

$$\mathbf{a}' = (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) / \Delta t = \Delta\mathbf{v}/\Delta t.$$

A aceleração (instantânea) \mathbf{a} é o limite de \mathbf{a}' , quando fazemos Δt tender a zero, ou seja,

$$\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt = \mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$$

onde $a_x = dx/dt$, $a_y = dy/dt$ e $a_z = dz/dt$ são as componentes do vetor aceleração.

A fim de obter a equação horária do movimento $\mathbf{r}(t)$, e conseqüentemente a trajetória da partícula, usamos a 2ª lei de Newton $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$ (onde \mathbf{F} é a força de resultante da partícula e m a sua massa inercial) e por integração encontramos $\mathbf{r}(t)$, ou seja,

$$\mathbf{a} = \mathbf{F}/m \rightarrow \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(0) + \int \mathbf{a}(t) dt \rightarrow \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(0) + \int \mathbf{v}(t) dt. \quad (1)$$

O processo metodológico acima, não é tão trivial como parece, uma vez que conhecida a força resultante sobre a partícula devemos fazer integrações que nem sempre apresenta uma solução analítica exata. Casos similares obtêm - se $\mathbf{r}(t)$ de forma exata, como por exemplo, a força constante $\mathbf{F}(t) = \mathbf{F}_0$, que após algumas manipulações algébricas encontramos

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(0) + \mathbf{v}(0)t + (\mathbf{F}_0/2m)t^2, \quad (2)$$

sendo $\mathbf{a}_0 = \mathbf{F}_0/m$ a aceleração da partícula constante, reescrevemos o vetor posição $\mathbf{r}(t)$ por

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(0) + \mathbf{v}(0)t + (\mathbf{a}_0/2)t^2 \quad (3)$$

2 – MOVIMENTO DE PROJÉTEIS

Como não existe força na direção horizontal ($a_x = 0$), a componente da velocidade permanece constante durante o movimento. Desta maneira, a componente horizontal do vetor posição é dada por

$$\mathbf{X(t) = v_0 \cos \theta_0 t} \quad (4)$$

onde θ_0 é o ângulo da velocidade inicial $\mathbf{v_0}$ com o eixo x (horizontal).

Por outro lado, o movimento na vertical é descrito como uma partícula em queda livre, ou seja, a partícula sofre ação da força peso para baixo $F_x = -mg$, onde g representa a aceleração da gravidade. A aceleração g é independente da massa, densidade, ou forma do objeto. Próximo da superfície terrestre consideramos $g = 10\text{m/s}^2$ praticamente constante.

No instante do lançamento temos $v_{0y} = v_0 \sin \theta$, assim sendo, a equação horária da componente vertical do vetor posição é dada por

$$\mathbf{Y(t) = v_0 \sin \theta t - gt^2/2}, \quad (5)$$

e a velocidade (componente vertical) varia segundo a equação horária.

$$\mathbf{Y_y(t) = v_0 \sin \theta t - gt} \quad (6)$$

Das equações acima podemos obter alguns resultados importantes, por exemplo, quanto tempo o projétil ficou no ar (T_0). Fazendo $Y(T_0) = 0$, partícula retornando ao solo (horizontal), da equação (5) obtemos

$$\mathbf{T_0 = 2v_0 \sin \theta / g}, \quad (7)$$

Note que temos também a solução trivial $T_0 = 0$ que corresponde o instante de lançamento a equação (5) é a solução desejada. Substituindo a equação (7) em (4), obtemos o alcance A_0 da partícula por

$$A_0 = v_0^2 \sin 2\theta / g, \quad (8)$$

E, finalmente, usando simetria temos que o tempo de subida (até o ponto máximo da trajetória parabólica) é igual ao tempo de descida e, portanto, deve corresponder a metade do valor T_0 , ou seja, $t_s = T_0/2 = v_0 \sin \theta / g$. Este resultado pode ser obtido de outra maneira. No ponto máximo da componente $Y(t_s) = H_0$, temos $v_x = v_{0x}$ e $v_y(t_s) = 0$, assim sendo, da equação (6) obtemos o mesmo resultado $t_s = T_0/2$. Portanto, substituindo t_s na equação (5), encontramos a altura máxima H_0 por

$$H_0 = v_0^2 \sin^2 \theta / 2g \quad (9)$$

Vamos a seguir mostrar o formato da trajetória da partícula no plano xy , isto é, como $y(x)$ varia com a variável x . Eliminando o tempo (t) na equação (4) e substituindo na equação (5) encontraremos,

$$Y(t) = \tan \theta x - g \sec^2 \theta x^2 / 2v_0^2, \quad (10)$$

onde a equação (10) representa o comportamento de uma parábola com cavidade voltada para baixo. O ponto máximo representa no problema a altura máxima do projétil alcançada em relação ao solo.

3 - ANOMALIA NO MOVIMENTO DO PROJÉTIL.

Considere, por exemplo, os projéteis que movem-se com uma aceleração da gravidade para baixo de $g = 9,8\text{m/s}^2$. A figura 1 mostra tais projéteis, ambos lançados da origem com uma velocidade inicial $v_0 = 10\text{m/s}$. Os movimentos são similares, contudo o projétil lançado com $\theta_0 = 75^\circ$ tem uma propriedade não compartilhada por esse com $\theta_0 = 65^\circ$. Que propriedade é esta? O projétil com $\theta_0 = 65^\circ$ oscila no sentido radial; primeiramente move-se para longe da origem, a seguir move-se mais perto da origem, e move-se finalmente afastado outra vez. Este fenômeno que estamos denotando de anômalo, foi previsto anos atrás por Walker [2].

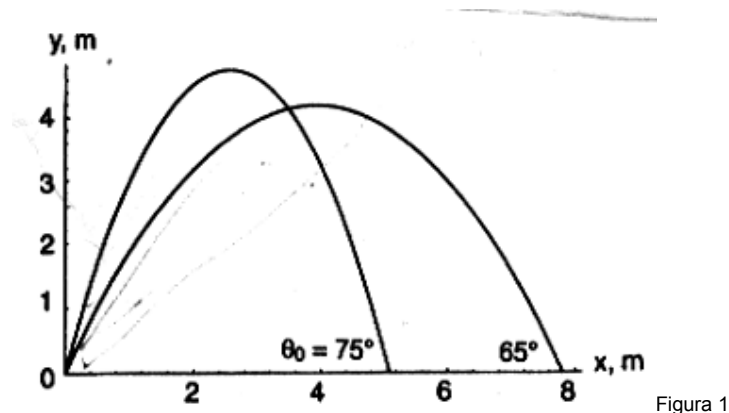


Figura 1- Comportamento da coordenada y como uma função da variável x do movimento de um projétil no vácuo para ângulos de lançamento $\theta_0 = 65^\circ$ e 75° .

Para investigar esta anomalia, começamos com a equação (10) que descreve o movimento de um projétil. Em todos os resultados usaremos $v_0 = 10\text{m/s}$ e $g = 9,81\text{m/s}^2$. A distância radial da origem ao projétil é dada por

$$r(x) = (x^2 + y(x)^2)^{1/2} \quad (11)$$

Substituindo v_0 , g e $Y(x)$ [equação (10)] na equação (11), obtemos o comportamento de $r(x)$ como uma função de x para um dado valor do ângulo de lançamento θ . A componente x varia da origem até o seu alcance $x = A_0 = v_0^2 \sin 2\theta / g$. Variando o ângulo θ_0 teremos várias curvas $r(x)$. Na figura 2

mostramos o comportamento de $r(x)$ versus x para θ_0 entre 65° e 85° . Para um projétil lançado em 65° a distância radial aumenta monoticamente durante vôo. Por outro lado, o projétil lançado com $\theta_0 = 75^\circ$ tem $r(x)$ aumentando gradualmente até certo valor de $x_0 \leq A_0$, depois decresce até x_1 e finalmente cresce até atingir $x = A_0$. Podemos interpretar este movimento como indo e vindo, foi assim Walker [2] denominou no seu artigo. Este comportamento começa a partir do ângulo crítico e continua para todos os projéteis lançados com ângulos entre θ_c e 90° . Estes resultados indicam uma beleza graciosa e inesperada de um sistema extremamente simples com resultado complexo.

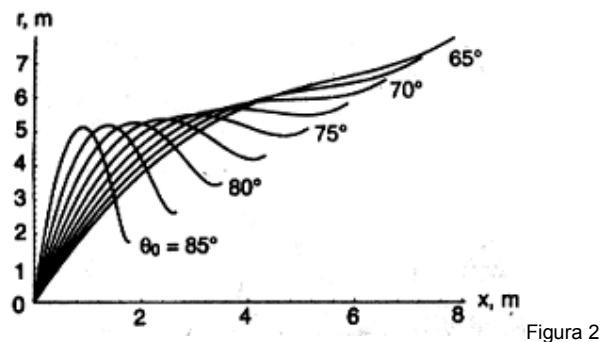


Figura 2

Figura 2 – Comportamento da distância radial r como uma função da coordenada x para diversos ângulos de lançamento θ_0 indicados na figura do movimento de um projétil no vácuo.

Outra maneira de investigar o movimento é analisar o comportamento de $r(t)$ como função do tempo (t). Assim sendo, usando as equações (4) e (5) encontramos a equação horária $r(t)$ por

$$r(t) = [(g/2)t^4 - v_0 g \sin\theta t^3 + v_0^2 t^2]^{1/2} \quad (12)$$

Na figura 3 mostramos o gráfico de $r(t)$ versus t para diversos ângulos de lançamento.

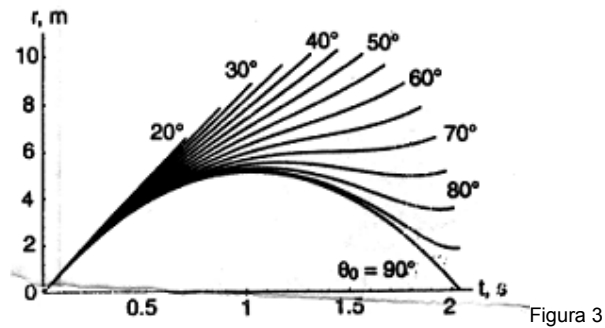


Figura 3 – Comportamento da distância radial r como uma função do tempo t para diversos ângulos de lançamento θ_0 indicados na figura do movimento de um projétil no vácuo.

Talvez a melhor maneira de ilustrar a oscilação radial é descrever o movimento do projétil e compará-lo com um arco circular. Isto é feito na figura 4, onde nós vemos um projétil lançado com $\theta_0 = 75^\circ$ e um arco circular, mostrado pela linha tracejada, com um raio de 5m. O projétil oscila claramente de um lado do arco ao outro, cruzando-o três vezes.

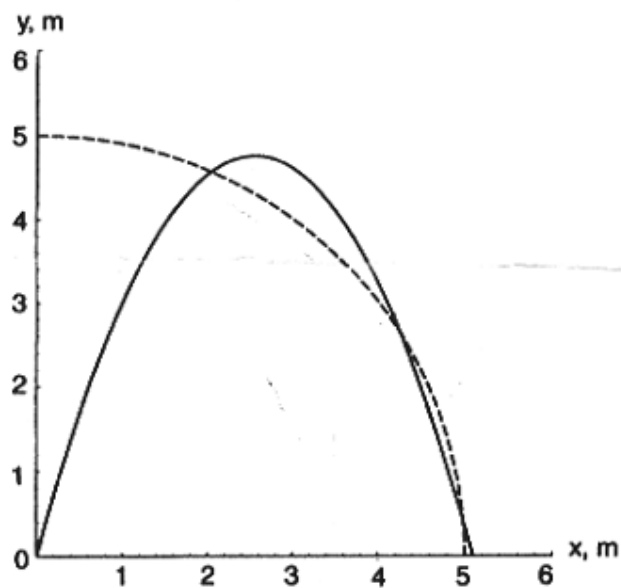


Figura 4

A figura 4 mostra a trajetória de um projétil com $v_0 = 10\text{m/s}$ e $\theta_0 = 75^\circ$ comparado com arco circular de raio de 5m. Note que o projétil oscila de um lado do arco circular ao outro.

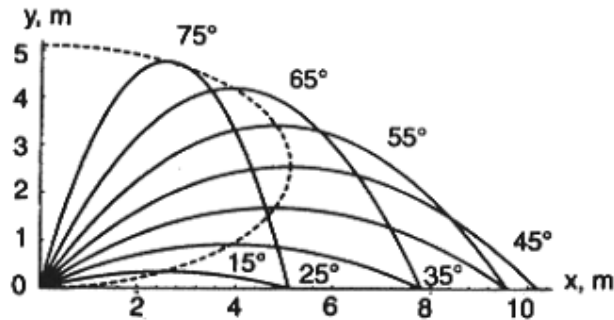


Figura 5

A figura 5 mostra as trajetórias dos projéteis com $v_0 = 10\text{m/s}$ e θ_0 entre 15° e 75° comparados com a elipse do retorno. Os projéteis que movem-se em direção a Terra dentro da elipse, tal como o projétil com $\theta_0 = 75^\circ$, estão movendo-se igualmente para a origem. Todos os projéteis cruzam a elipse do retorno em seu ponto mais elevado.

ÂNGULO CRÍTICO

Em que ângulo θ_c a oscilação radial começa? Para responder a esta pergunta, começamos ajustando à velocidade radial igual a zero, isto é,

$$dr/dt = [(g/2)t^4 - v_0 g \sin\theta t^3 + v_0^2 t^2]^{1/2} \cdot (2gt^3 - 3v_0 g \sin\theta t^2 + 2v_0^2 t) = 0$$

obtendo então a solução não trivial para o tempo t

$$t = (3v_0(\sin\theta_0 \pm (\sin^2\theta_0 - 8/9)^{1/2}))/2g \quad (13)$$

Para ângulos pequenos, as soluções são imaginárias, significando que o projétil se move firmemente longe da origem. As soluções reais começam no ângulo onde os iguais da raiz quadrada é zero, isso corresponde $\sin^2\theta_c = 8/9$ ou $\cos^2\theta_c = 1/9$. Assim, o ângulo crítico para oscilação radial é,

$$\theta_c = \cos^{-1}(1/3) = 70.5288...^\circ \quad (14)$$

4 – EFEITO DA RESISTÊNCIA DO AR

Consideremos agora da força gravitacional da Terra sobre o corpo de massa m , a resistência do ar sobre o mesmo. Esta resistência será modelada fisicamente por $-bdr/dt$, onde b é uma constante positiva. Escolhendo o sistema de coordenadas cuja origem coincide com o ponto de lançamento e denotando a posição do corpo no instante t por $\mathbf{r}(t) = (x(t),y(t))$, então a segunda lei de Newton nos diz:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = m\mathbf{g} - b \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad (15)$$

Em função das coordenadas teremos,

$$\ddot{x}(t) + \frac{b}{m} \dot{x}(t) = 0, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0 \cos \theta \quad (16)$$

$$\ddot{y}(t) + \frac{b}{m} \dot{y}(t) = -g, \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = v_0 \sin \theta \quad (17)$$

Partindo da equação homogênea da expressão (17), sendo $y(t) = e^{\lambda t}$, temos

$$\lambda^2 + \frac{b}{m} \lambda = 0,$$

cujas soluções $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = -\frac{b}{m}$, portanto,

$$y_h = A + B e^{-\frac{bt}{m}}$$

Agora calculando a equação particular para a mesma expressão, temos

$$Y_p = kt + C$$

Da equação (17) temos,

$$0 + \frac{b}{m}k = -g$$

ou

$$k = -\frac{mg}{b}$$

Logo a solução geral será escrita na forma

$$y = A + B e^{-\frac{b}{m}t} - \frac{mgt}{b} + C,$$

onde A, B e C são constantes a serem determinadas pelas condições iniciais. Derivando a equação acima, obtemos a componente vertical da velocidade, ou seja,

$$\dot{y} = -\frac{Bb}{m} e^{-\frac{b}{m}t} - \frac{mg}{b}$$

Aplicando a condição inicial ($t = 0$) obtemos,

$$y(0) = D + B = 0$$

$$D = -B$$

onde $D = A + C$

No caso da componente vertical da velocidade teremos,

$$\dot{y}(0) = -\frac{Bb}{m} - \frac{mg}{b} = v_0 \sin \theta$$

sendo

$$B = -\frac{g}{k} - \frac{v_0 \sin \theta}{k}$$

onde $k = \frac{b}{m}$.

Substituindo as constantes A, B e C na solução geral de $y(t)$, obtemos

$$Y_g = \left(\frac{g}{k^2} + \frac{v_0 \sin \theta}{k} \right) - (1 - e^{-kt}) - \frac{gt}{k} \quad (18)$$

No caso da coordenada $x(t)$, temos a solução geral

$$X = A + Be^{-kt}$$

Usando as condições de contorno $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = v_0 \cos \theta$, a equação horária $x(t)$ será dada por

$$X = \frac{v_0 \cos \theta}{k} (1 - e^{-kt}) \quad (19)$$

Isolando t na equação (19) e substituindo na equação (18), obtemos

$$y = \left(\tan \theta + \frac{g}{kv_0} \sec \theta \right) x + \frac{g}{k^2} \ln \left(1 - \frac{kx}{v_0} \sec \theta \right) \quad (20)$$

Para $k \neq 0$ (presença da resistência do ar), a equação (17) não corresponde mais a uma parábola. No limite $k \rightarrow 0$ reproduzimos o resultado da parábola dada pela equação (10). Nosso objetivo a seguir, será investigar como o parâmetro k influenciará no comportamento anômalo de $r(x)$, assim como foi observado por Walker [2] no limite do vácuo ($k = 0$).

MÉTODOS UTILIZADOS

Para resolver este problema do lançamento de projéteis sob a ação da resistência do ar do tipo $F_a = kv$, usamos como ferramenta a segunda lei de Newton, onde as únicas forças presentes no sistema são F_a e a força gravitacional (peso). Inicialmente, revisamos o limite trivial ($k = 0$) que é o projétil lançado no vácuo, assunto este abordado na disciplina do ciclo básico no primeiro período do curso de Física. Através desse estudo reproduzimos os resultados de Walker [2] do movimento anômalo do projétil para o ângulo de lançamento superior ao valor crítico $\theta > \theta_c = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) \cong 70.5288..^\circ$.

Calculamos numericamente o módulo do vetor posição r como uma função do ângulo de lançamento e dos parâmetros envolvidos na força de resistência do ar e analisamos este fenômeno anômalo. Calculamos no MAPLE os valores de x , y , r e A . Através das informações encontradas criamos um programa em FORTRAN para a construção dos gráficos e a análise mais concreta do fenômeno observado.

RESULTADOS

Partindo dos dados obtidos na elaboração dos cálculos no programa MAPLE, criamos um programa em FORTRAN. Neste inserimos os dados, como o ângulo (dando início com o ângulo de 65° , pois é a partir dele que percebemos a anomalia, e variando de cinco em cinco até chegar ao ângulo de 85°), a resistência do ar (k) que no decorrer do programa irá admitir 5 valores (0.001; 0.25; 0.5; 1.0; 2.0), o alcance respectivo para cada ângulo. Depois de acrescentar todas as informações para o funcionamento do programa, o mesmo gera os gráficos e finalmente podemos chegar as nossas conclusões a respeito do trabalho.

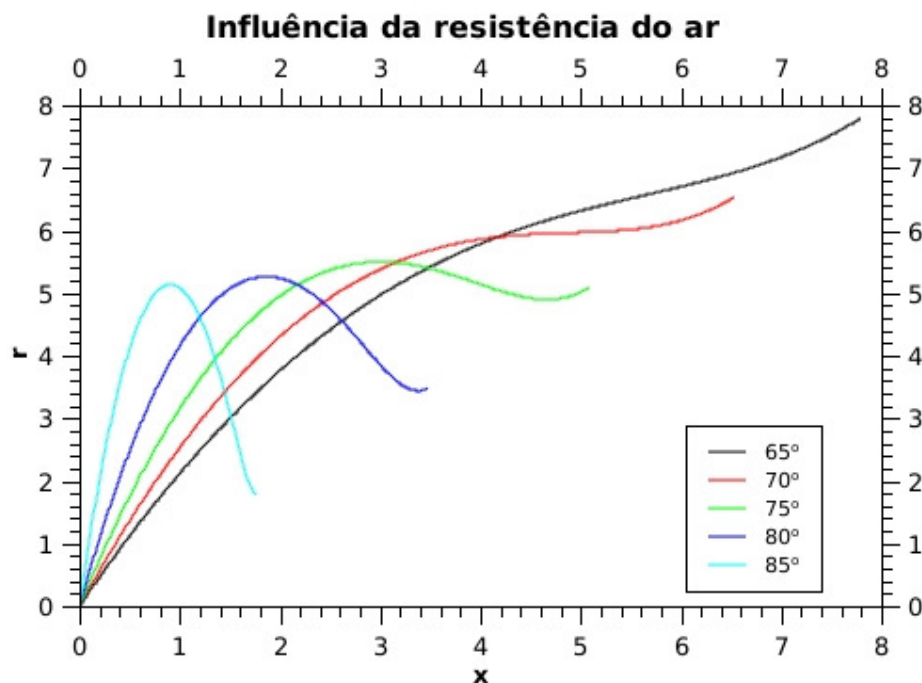


Figura 6 – Comportamento da distância radial r como uma função da coordenada x do movimento do projétil sob a ação de uma resistência do com o parâmetro $k = b/m = 0.001$ para diversos valores dos ângulos de lançamento θ indicados na figura. Usamos $v_0 = 10 \text{ m/s}$ e $g = 10 \text{ m/s}^2$ na equação (10).

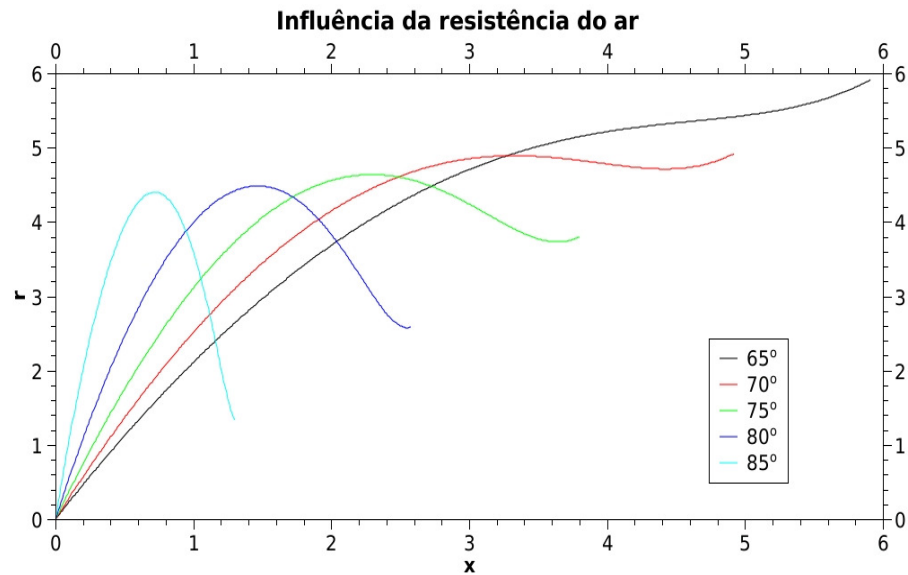


Figura 7 – Comportamento da distância radial r como uma função da coordenada x do movimento do projétil sob a ação de uma resistência do com o parâmetro $k = b/m = 0.25$ para diversos valores dos ângulos de lançamento θ indicados na figura. Usamos $v_0 = 10 \text{ m/s}$ e $g = 10 \text{ m/s}^2$ na equação (10).

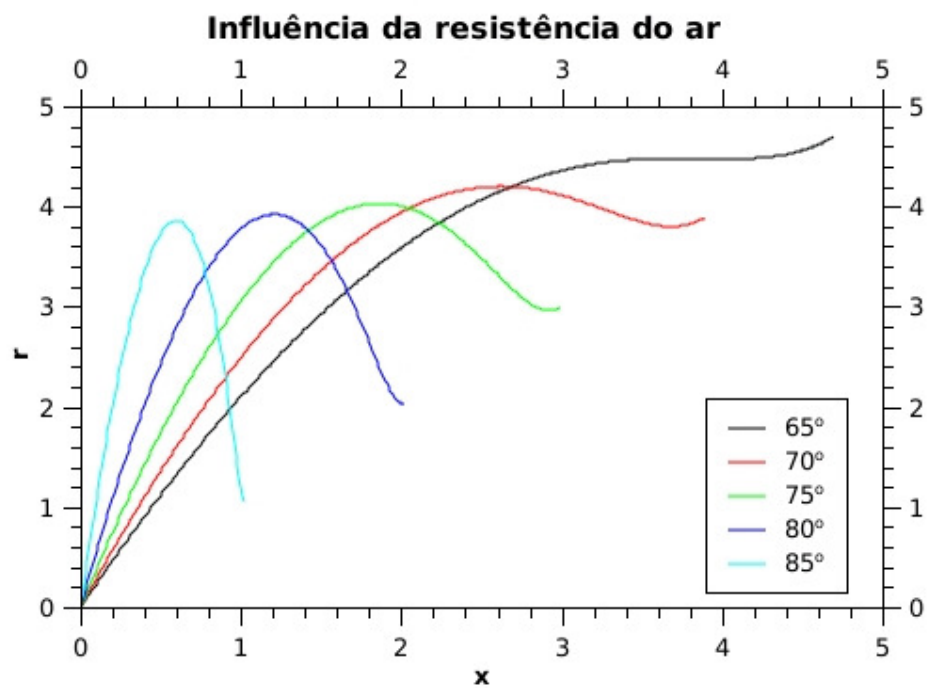


Figura 8 – Comportamento da distância radial r como uma função da coordenada x do movimento do projétil sob a ação de uma resistência do com o parâmetro $k = b/m = 0.5$ para diversos valores dos ângulos de lançamento θ indicados na figura. Usamos $v_0 = 10$ m/s e $g = 10\text{m/s}^2$ na equação (10).

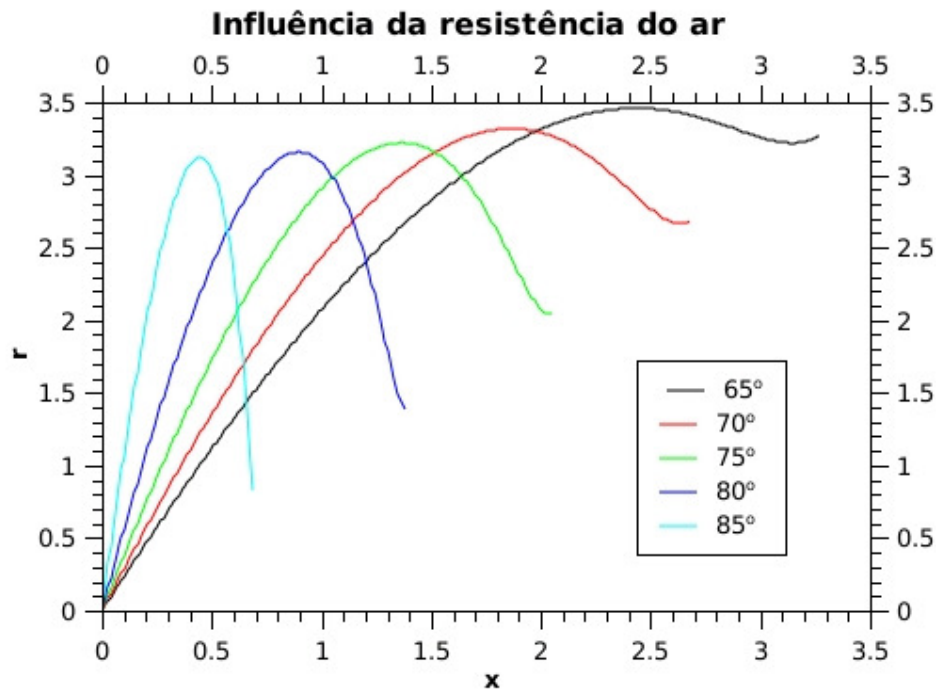


Figura 9 – Comportamento da distância radial r como uma função da coordenada x do movimento do projétil sob a ação de uma resistência do com o parâmetro $k = b/m = 1.0$ para diversos valores dos ângulos de lançamento θ indicados na figura. Usamos $v_0 = 10$ m/s e $g = 10\text{m/s}^2$ na equação (10).

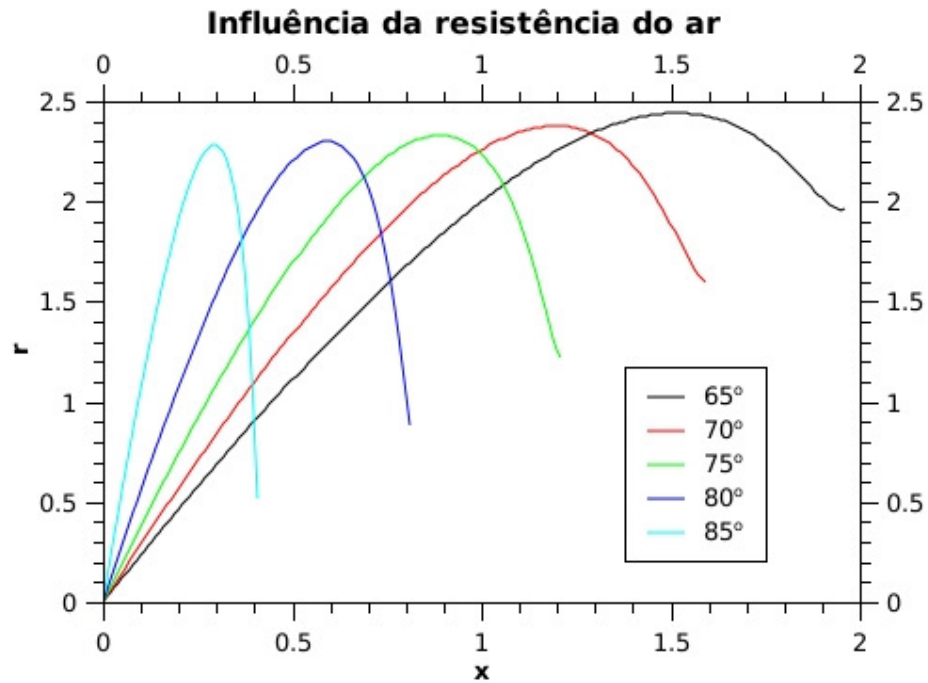


Figura 10 – Comportamento da distância radial r como uma função da coordenada x do movimento do projétil sob a ação de uma resistência do com o parâmetro $k = b/m = 2.0$ para diversos valores dos ângulos de lançamento θ indicados na figura. Usamos $v_0 = 10 \text{ m/s}$ e $g = 10 \text{ m/s}^2$ na equação (10).

CONCLUSÃO

O assunto “lançamento de projéteis” é bastante rico, tanto do ponto de vista do ensino como da pesquisa, pois nos leva a uma série de situações práticas.

Do ponto de pesquisa, o projeto foi de grande importância para a iniciação científica, um problema muito interessante, em que foi possível amadurecer os conceitos da mecânica clássica em particular o assunto relacionado com o movimento de projéteis, absorvendo os conceitos desconhecidos e ao mesmo tempo esclarecendo dúvidas.

O estudo da influência da resistência do ar na sua forma linear $F_a = kv$ do movimento anômalo de um projétil (Indo e Vindo), previsto por Walker [2] no vácuo, teve como função a ampliação dos conceitos físicos e a oportunidade de análise de um problema mais complexo do que os estudados no decorrer da vida acadêmica. Não podemos esquecer também do papel que a resistência do ar desempenha em algumas situações específicas.

A partir dos resultados das figuras 6,7, 8 e 9, onde variamos o parâmetro da resistência do ar k , percebemos que o aumento de k destrói o comportamento anômalo para $\theta = 70^\circ$, por exemplo, ocorrendo assim o fenômeno para ângulos maiores que $\theta_c(k = 0) \simeq 70^\circ$.

A criação dos programas em FORTRAN E MAPLE e a utilização do editor gráfico Qtiplot, serviram para a familiarização das linguagens computacionais e a resolução dos cálculos integrais e raízes de equações não lineares.

A intenção deste trabalho foi abordar a influência que a resistência do ar no movimento anômalo de um projétil, partindo das observações de Walker [2] no vácuo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] HALLIDAY, David; WALKER, Jearl; RESNICK, Robert. Fundamentos de Física: Mecânica. 4.ed. Rio de Janeiro, 1996. v.1.
- [2] WALKER, James. The Physics teacher: "Projectiles: Are they coming or going?" Maio, 1996. v.33.

