UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
PRO REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
DEPARTAMENTO DE APOIO A PESQUISA
PROGRAMA INSTITUCIONAL DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA

SOLUÇÃO NUMÉRICA DO POTENCIAL DE UM ANEL CARREGADO FORA DO EIXO DE SIMETRIA

Bolsista: Thiago Gonçalves Rebêlo, CNPq

MANAUS
2010

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
PRO REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
DEPARTAMENTO DE APOIO A PESQUISA
PROGRAMA INSTITUCIONAL DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA

RELATÓRIO FINAL

PIB-E/0079/2009

SOLUÇÃO NUMÉRICA DO POTENCIAL DE UM ANEL CARREGADO FORA DO EIXO DE SIMETRIA

Bolsista: Thiago Gonçalves Rebêlo, CNPq
Orientador:Eduardo Adriano Cotta

MANAUS
2010

Resumo

O trabalho tem importância do ponto de vista computacional e físico, pois nos permite conhecer funções e técnicas relativas ao Fortran também torna-se uma alternativa ao lidarmos com problemas que não podem ser resolvidos analiticamente.

No estudo de física sempre encontramos problemas que nâo possuem solução analítica, um exemplo simples é dado pela oscilação por uma oscilação de um pêndulo simples, no problema que envolve oscilações de grande variação angular devido as altas amplitudes deste espécie de movimento, iremos encontrar uma solução que depende da resolução de uma integral elíptica, cuja resultado só pode ser obtido numericamente. Ao cursarmos a disciplina de física 3 correspondente ao estudo da eletrostática e magnetostática, e, mesmo grande parte dos problemas de eletromagnetismo leva-se em conta a simetria.

A proposta do projeto trabalha vem enriquecer e aprofundar o estudo desta classe de disciplina, abrindo um novo horizonte de conhecimento para os problemas sem simetria. Assim, o projeto propõe calcular as integrais elípticas encontradas em problemas sem dimetria.

Sumário

1 Introdução

Tradicionalmente calculamos o potencial escalar de um anel percorrido por uma corrente elétrica sobre o eixo de simetria, mas, quando calculamos o potencial vetor da mesma configuração, mas, fora do eixo de simetria obtemos integrais que não podem ser resolvidas analiticamente porque são integrais elípticas. Assim, nosso objetivo é calcular usando métodos numéricos o potencial de um anel carregado fora do eixo de simetria.

O trabalho consiste na resolução numérica de duas integrais que compõe o potencial vetor, ou seja, ao solucionarmos estas, podemos obter o valor em módulo do potencial vetor magnético que está na direção $\hat{\phi}$ em coordenadas esféricas. Assim, trata-se da construção de um algoritmo em linguagem Fortran 90 com características eficientes quanto a rapidez e precisão do resultado, para isso fora necessário estudarmos métodos de integração; comandos de entrada e saída: read, write e print; comandos de controle e de programação, e, alguns comandos de especificação.

A literatura que fundamentou esta etapa do trabalho está contida em Numerical analysis[6] e Teoria do Eletromagnetismo[9], no primeiro usamos a regra de simpson, e, no segundo retiramos as integrais e atribuímos valores as variáveis envolvidas, possibilitando a análise da influências destas variáveis no valor do potencial vetor magnético.

O trabalho tem importância do ponto de vista computacional e físico, pois nos permite conhecer funções e técnicas relativas ao Fortran 90 também torna-se uma alternativa ao lidarmos com problemas que não podem ser resolvidos analiticamente, o programa aqui desenlvolvido vai além, pois nos fornece uma precisão maior pois resolve as integrais com dupla precisão. É justo lembrar que o significado físico do potencial não fica evidente ao se estudar somente o eletromagnetismo clássico, mas, este trabalho nos permite perceber este fato, de modo, afirmamos que é uma contribuição importante uma vez que pesquisa-se ainda um significado físico para o potencial vetor magnético em eletromagnetismo, a prova são artigos com este objetivo os quais tivemos acesso. Portanto, acreditamos que a contribuição do presente trabalho está na interpretação das variáveis e suas influências no potencial vetor magnético, e, que essas interpretações podem ser somadas as idéias já existentes para revelar analogias entre grandezas magnéticas e elétricas, e deixa-nos sem dúvida a motivação para revelar o significado físico deste potencial uma vez que "muitos consideram o Eletromagnetismo Clássico como obra terminada. Isto seria literalmente verdadeiro se nada restasse para ser entendido."(Ferreira, 2004, p.4).

2 Revisão bibliográfica

Com o desenvolvimento do projeto tínhamos dois grandes desafios: compreender o potencial vetor e sua oriegem bem como o fundamento de seu estudo no projeto, e, compreensão das técnicas de integração numérica no fortran, para estas epatas utilizamos [4] com o intuito de aprender um pouco de magnetostática e diferencia-la da eletrostática, posteriormente estudamos técnicas de integração para tal utilizamos [6] e durante esta etapa também tomamos conhecimento de [5] que nos forneceu os fundamentos, diferenças e idéias a respeito que qual método de integração seria mais adequado para nosso projeto de pesquisa. Lembrando que a resolução analítica do potencial vetor magnético fora do eixo de simetria encontra-se em [9], e, os fundamentos para a resolução são encontrados em [8], entenda-se fundamentos como: função Delta de Dirac, expansão do harmônicos esféricos, polinômios de Legendre, etc. por estes fatos extremamente relevantes para o projeto [8] e [9] foram utilizados em todas as etapas do trabalho que envolviam ferramentas matemáticas e conhecimentos físicos específicos de eletromagnetismo.

De posse do conhecimento da parte física juntamente com a teoria da técnica a ser empregada no nosso estudo, iniciamos uma nova estapa que estava alicerçada nos livros de análise numérica, ou seja, estávamos interessada na parte mais técnica do projeto, tratava-se de aplicações do método de integração, e, nesta etapa também utilizamos [5] e [6]. Com a proximidade da apresentação fizemos uma revisão de todas as bilbiografias com que vínhamos usando são elas: [1], [2], [3], [7], [8] e [9].

Na etapa final do projeto usamos de forma intensiva [6] que nos reporta ao estudo específico do Método de integração de Simpson e a construção do algoritmo que calcula duas integrais elípticas para serem inseridas na fórmula do potencial vetor com o objetivo que obtermos uma expressão mais apropriada e acurada para o potencial fora do eixo de simetria.

3 Métodos utilizados

No intervalo dos meses de março a junho de 2010, foram estudados métodos de integração numérica e aplicações, com o intuito de familiarização com a idéia geral e específica do método, bem como a eleição do método que seria mais adequado para ser utilizado no projeto.

Durante os meses de maio e junho nos aprofundamos no estudo do livro [5] que nos proporcionou o conhecimento de métodos de integração como: a Regra do Trapézio, Integração Romberg, Regra de Simpson e Quadratura Gaussiana, deste modo, entendemos que que a Regra de Simpson podia ser estendida para integração ao longo de um intervalo (a,b), onde este intervalo é um número 2N (par) de subintervalos de h, que no algoritmo denominamos de n.

Posteriormente, apesar de estarmos construindo o algoritmo entre os meses de junho e julho voltamos a nossa atenção para um método possivelmente alternativo e procurávamos alternativas no programa maple porque verficamos que existe um cógigo no maple que coverte equações simples do maple diretamente para linguagem fortran, mas, isto ocorre apenas com expressões simples que podem ajudar no quesito eficiência, entretanto, nossa expressão era muito complexa para ser decodifica por este método diretamente para fortran.

Sob os conselhos do orintador a atividade foi novamente digida para a construção do algoritmo, porém, usando da literatura [6] que dantes iniciamos com o estudo de integração, mas, neste presente estapa teve papel fundamental no que tange ao método mais genérico conhecido como Método de Simpson, e, sob orientação direta e com ajuda do orienador conseguimos finalizar o algoritmo que calcula duas integrais elípticas completas que não podem ser resolvidas analiticamente.

4 Resultados e discussões

O potencial vetor magnético é descrito pela fórmula:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}}{\mid \vec{r} - \vec{r'} \mid} dV \tag{1}$$

como nesta equação está explícito a existência de uma densidade de corrente em função das coordenas esféricas, temos que explicitá-la para a sua posterior ultilização assim:

$$J_\phi \; = \frac{i}{R} \delta(r' - R)\delta(\cos\theta') \tag{2}$$

em seguida temos que a densidade de corrente é um vetor, e, está orientada na direção do fluxo de corrente. Portanto:

$$\vec{J} = \; J_\phi \; \hat{\phi} \tag{3}$$

, e, com as devidas manipulações

$$\hat{\phi} = -\sin\phi \hat{i} + \cos\phi \hat{j} \tag{4}$$

que substituída na densidade de corrente resultará:

$$\vec{J} = -_\phi \sin\phi' \hat{\imath} +_\phi \cos\phi' \hat{\jmath} \tag{5}$$

, lembrando que da configuração teremos que

$$|\vec{r} - \vec{r'}| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\gamma} \tag{6}$$

e fazendo outras modificações encontramos

$$\cos\gamma = \sin\theta \sin\theta' \cos(\phi - \phi') + \cos\theta \cos\theta' \tag{7}$$

.

Isto nos remete a seguinte expressão:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v \frac{\frac{-i}{R}\delta(r' - R)\delta(\cos\theta') \sin\phi' \hat{\imath} + \frac{i}{R}\delta(r' - R)\delta(\cos\theta') \cos\phi' \hat{\jmath}}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'(\sin\theta \sin\theta' \cos\phi' + \cos\theta \cos\theta')}} dv \tag{8}$$

que quando resolvida após algumas manipulações matemáticas chega-se a

$$\vec{A}(r, \theta, \phi) = \frac{\mu_0 i R \hat{\phi}}{\pi\sqrt{r^2 + R^2 + 2rR \sin\theta}} \left[\Big(\frac{2}{k^2} - 1) \; K(k) - \frac{2}{k^2} E(k) \right] \tag{9}$$

esta é apenas uma expressão aproximada para o potencial vetor pois $K(k)$ e $E(k)$ são as integrais elípticas que não podem ser resolvidas analiticamente, elas assumem a seguinte forma:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\gamma}{\sqrt{1 - K^2 \sin^2\gamma}} \tag{10}$$

e

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - K^2 \sin^2 \gamma} d\gamma \tag{11}$$

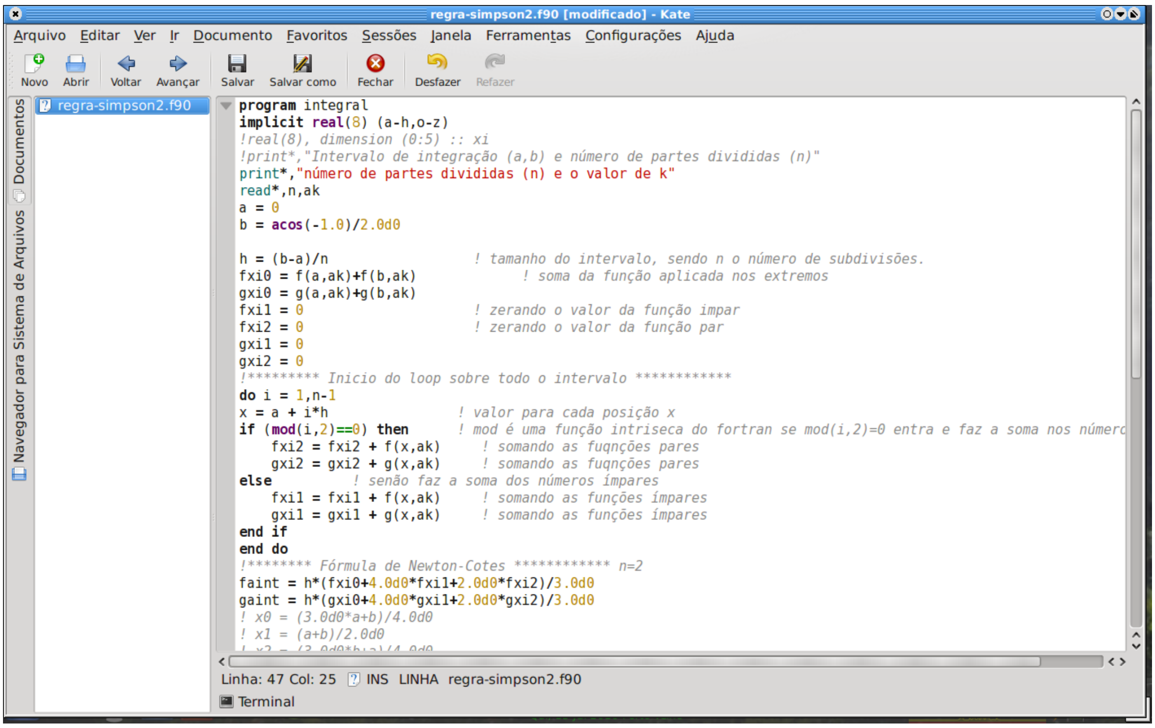
.

Agora iremos obter o valor destas integrais numericamente e calcular o potencial vetor em (9), assim, R é o raio do anel; θ é o que $\vec{r}$ faz com o eixo de simetria (azimutal) e r é a distância em módulo do centro do anel ao ponto em que desejamos calcular o potencial. Lembrando que, os resultados obtidos serão números que representam a magnitude do potencial vetor magnético na direção $\hat{\phi}$ em coordenadas esféricas porque o problema apresenta-se sob a forma desta simetria.

Calculamos os potenciais sob a condição $\theta = \pi/2$:

caso eletrostático	caso magnetostático
R= $4.10^{-2}m$	k= 0,9795918367
r= $3.10^{-2}m$	K(k)= 3,011
Q= $8.10^{-9}C$	E(k)= 1,05091110767427
x= $3.10^{-2}m$	R= $4.10^{-2}m$
a= $4.10^{-2}m$	r= $3.10^{-2}m$
v = 23,99786695	A= 2,55725633.10^{-7}

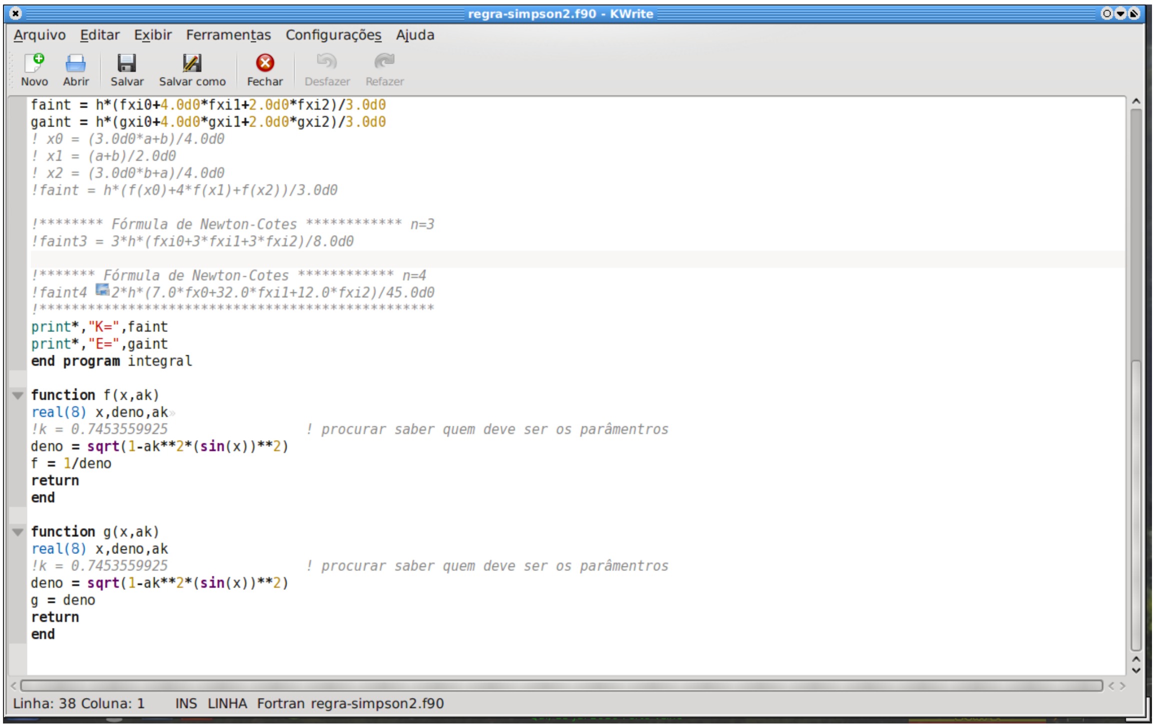
O algoritmo que calcula as integrais é mostrado a seguir:




```
program integral
implicit real(8) (a-h,o-z)
!real(8), dimension (0:5) :: xi
!print*,"Intervalo de integração (a,b) e número de partes divididas (n)"
print*,"número de partes divididas (n) e o valor de k"
read*,n,ak
a = 0
b = acos(-1.0)/2.0d0

h = (b-a)/n                    ! tamanho do intervalo, sendo n o número de subdivisões.
fxi0 = f(a,ak)+f(b,ak)               ! soma da função aplicada nos extremos
gxi0 = g(a,ak)+g(b,ak)
fxi1 = 0                       ! zerando o valor da função impar
fxi2 = 0                       ! zerando o valor da função par
gxi1 = 0
gxi2 = 0
!********* Inicio do loop sobre todo o intervalo ***********
do i = 1,n-1
x = a + i*h                  ! valor para cada posição x
if (mod(i,2)==0) then        ! mod é uma função intriseca do fortran se mod(i,2)=0 entra e faz a soma nos númerc
    fxi2 = fxi2 + f(x,ak)      ! somando as fuqnções pares
    gxi2 = gxi2 + g(x,ak)      ! somando as fuqnções pares
else             ! senão faz a soma dos números ímpares
    fxi1 = fxi1 + f(x,ak)      ! somando as funções ímpares
    gxi1 = gxi1 + g(x,ak)      ! somando as funções ímpares
end if
end do
!******** Fórmula de Newton-Cotes *********** n=2
faint = h*(fxi0+4.0d0*fxi1+2.0d0*fxi2)/3.0d0
gaint = h*(gxi0+4.0d0*gxi1+2.0d0*gxi2)/3.0d0
! x0 = (3.0d0*a+b)/4.0d0
! x1 = (a+b)/2.0d0
```

Figura 1: primeira parte



```
faint = h*(fxi0+4.0d0*fxi1+2.0d0*fxi2)/3.0d0
gaint = h*(gxi0+4.0d0*gxi1+2.0d0*gxi2)/3.0d0
! x0 = (3.0d0*a+b)/4.0d0
! x1 = (a+b)/2.0d0
! x2 = (3.0d0*b+a)/4.0d0
!faint = h*(f(x0)+4*f(x1)+f(x2))/3.0d0

!******** Fórmula de Newton-Cotes ************ n=3
!faint3 = 3*h*(fxi0+3*fxi1+3*fxi2)/8.0d0

!******* Fórmula de Newton-Cotes ************ n=4
!faint4 2*h*(7.0*fx0+32.0*fxi1+12.0*fxi2)/45.0d0
!**************************************************
print*,"K=",faint
print*,"E=",gaint
end program integral

function f(x,ak)
real(8) x,deno,ak
!k = 0.7453559925                  ! procurar saber quem deve ser os parâmentros
deno = sqrt(1-ak**2*(sin(x))**2)
f = 1/deno
return
end

function g(x,ak)
real(8) x,deno,ak
!k = 0.7453559925                  ! procurar saber quem deve ser os parâmentros
deno = sqrt(1-ak**2*(sin(x))**2)
g = deno
return
end
```


Figura 2: segunda parte

5 Conclusões

A maior desvantagem da Regra de Simpson é a necessidade da utilização de um intervalo (a,b) subdividido num número par de subintervalos, verificamos ainda que utililizando um número par de subintervalos na regra de Simpson nos permite obter um resultado mais apurado do que trabalhar com um número ímpar de subintervalos. Assim, tomamos conhecimento da Quadratura de Simpson que nos possibilita a integração de um intervalo gernérico (a,b).

Também nos foi possível observar durante a construção do algoritmo, a predição da literatura que devido ao aumento do número de subintervalos no método Simpson 3/2 implica no aumento dos coeficientes na fórmula (de simpson 3/2), assim verificamos e pudemos compreender este processo, mas, isso significou que estávamos obtendo resultados indesejáveis e sem nenhum significado físico, felizmente as fórmulas de Simpson são encontradas sob diferentes formas, e, quando utilizamos (a regra de simpson) esta se mostrou mais adequada para o estudo de nosso sistema físico porque nos permite aumentar consideravelmente os subintervalos de integração em relação a fórmula anterior. Portanto, (a regra de Simpson) é mais adequada que (a regra de simpson 3/2) para se estudar o potencial vetor magnético fora do eixo de simetria uma vez que nos possibilita verificar as influências de variações no ângulo e do raio do anel carregado e suas conseqüências exercidas no valor numérico do potencial vetor magnético.

Analisando a fórmula do potencial vetor observamos que o potencial é diretamente proporcional ao raio do anel de corrente, o que nos possibilita afirmar que quanto maior for o raio deste anel, maioe será o módulo do potencial, da mesma forma, para a corrente, ou seja, ao duplicarmos o valor da corrente também iremos aumentar em duas vezes o módulo do vetor potencial magnético.

6 Fontes e referências bibliográficas

[1] http://www.gnu.org/software/octave/doc/interpreter/.

[2] http://www.vivaolinux.com.br/artigo/Octave-Programacao-cientifica-no-Linux/.

[3] FARRER, Harry; FARIA, Eduardo Chaves; FILHO, Frederico Ferreira Campos,"Fortran estruturado", Editora: LTC (1992).

[4] JACKSON, John David, "Classical Electrodynamics", 3 º edition, John Wiley & Sons Inc. (1998).

[5] CONTE, S. D. Elementos de análise numérica. Trad. de Luiz Ignácio Pio de Almeida. Porto Alegre. Enciclopédia Técnica Universal Globo (1971).

[6] BURDEN, Richard L. ; FAIRES, J. Douglas. Numerical analysis. 7 º edition

[7] NUSSENZVEIG, Herch Moysés. Curso de Física básica-vol.3, 1º edição.São Paulo: Edgard Blucher (1997).

[8] MACHADO, Kleber Daum, "Teoria do Eletromagnetismo", 2ª edição, Vol. I, Editora: UEPG (2004).

[9] MACHADO, Kleber Daum, "Teoria do Eletromagnetismo", 2ª edição, Vol. II, Editora: UEPG (2004).

[10] Ferreira, Leal G. F., "Como o potencial vetor deve ser interpretado para revelar analogias entre grandezas magnéticas e elétricas ", Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 26, n. 4, p. 359 , SBF: 2004

7 Cronograma utilizado

7. Cronograma de Atividades

Nº	Descrição	Ago 2009	Set	Out	Nov	Dez	Jan 2010	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul
1	Levantamento bibliográfico	x	x										
2	Estudo de eletrodinâmica			x	x	x							
3	Cálculo numérico – soluções de integrais						x	x	x				
4	Fortran, maple e octave : aplicações									x	x	x	
5	Elaboração do Resumo e Relatório Final (atividade obrigatória)											x	
6	Preparação da Apresentação Final para o Congresso (atividade obrigatória)												x