UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
PRO REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
DEPARTAMENTO DE APOIO A PESQUISA
PROGRAMA INSTITUCIONAL DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA

# MOVIMENTO DE PROJÉTIL SOB AÇÃO DA RESISTÊNCIA DO AR

Bolsista: Patrícia Paula Fernandes Oliveira, CNPq

MANAUS
2010

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
PRO REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
DEPARTAMENTO DE APOIO A PESQUISA
PROGRAMA INSTITUCIONAL DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA

# RELATÓRIO PARCIAL
PIB – E – 0087/2009
# MOVIMENTO DE PROJÉTIL SOB AÇÃO DA RESISTÊNCIA DO AR

Bolsista: Patrícia Paula Fernandes Oliveira
Orientador: Dr. José Ricardo de Sousa

MANAUS
2010

**SUMÁRIO**

INTRODUÇÃO_____4
FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA_____5
1. MOVIMENTO DE UM PROJÉTIL_____5
2. RESISTÊNCIA DO AR_____9
3. LANÇAMENTO OBLÍQUO COM RESISTÊNCIA DO AR_____13
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS_____16

## INTRODUÇÃO

Na ausência da gravidade, você poderia atirar uma pedra para o céu com um certo ângulo e ela seguiria uma trajetória retilínea. Por causa da gravidade, entretanto, a trajetória se curva. Uma pedra arremessada, uma bala de canhão disparada ou qualquer objeto lançado por algum meio e que se segue em movimento por sua própria inércia é chamado de um projétil. Para os canhoneiros dos séculos anteriores, a trajetória curva dos projéteis parecia muito complicada. Hoje percebemos que essas trajetórias são surpreendentemente simples quando observamos separadamente as componentes horizontal e vertical da velocidade.

O estudante do curso de Física, em particular, e mesmo no ensino médio, estuda como sistema simples e de certa forma realista para certas classes de objetos o movimento de um projétil. Trata-se de um problema trivial que tem como meta calcular, por exemplo, o tempo total de percurso (T), altura máxima (H) e alcance (R).

No problema real, na natureza, o movimento de um projétil é influenciado pela resistência do ar, que o cálculo aerodinâmico mostra que a força de resistência de arraste(contrária ao movimento) é proporcional a velocidade elevada a uma certa potência n $(F = k\,v^n)$. É devido a esta força que o movimento de um pára-quedista, por exemplo, proporciona a ele descer com certa velocidade constante e moderada a fim de não ocorrer nenhuma fratura.

O presente projeto visa estudar o movimento de um projétil sob a ação da resistência do ar na sua forma generalizada $F = k.v^n$, para n>2 e introduzir efeitos não lineares, a fim de analisar possíveis movimentos caóticos.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

1.Movimento de um projétil.

Um projétil é qualquer corpo lançado com uma velocidade inicial e que segue uma trajetória determinada exclusivamente pela aceleração da gravidade e pela resistência do ar. Uma bola de beisebol batida, uma bola de futebol chutada, um pacote largado de um avião e uma bala atirada por uma arma de fogo são exemplos de projéteis. A curva descrita pelo projétil é a sua trajetória.

Uma aplicação importante é ao movimento dos projéteis na vizinhança da superfície da Terra. Na balística usual, podemos considerar a Terra como plana e a aceleração da gravidade como uma constante $g \approx 9{,}8\ m/s^2$. Pela convenção temos de tomar o eixo *Oy* segundo a vertical. Vamos orientá-lo apontando para cima de modo que em (1) a = - g,

$$\begin{cases} \vec{a} = a\,\vec{j} \\ \vec{v}_0 = v_0 x\vec{i} + v_0\ y\vec{j} \\ \vec{r}_0 = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} \end{cases} \quad (1)$$

Logo, $\vec{a} = -g\,\vec{j}$ (2)

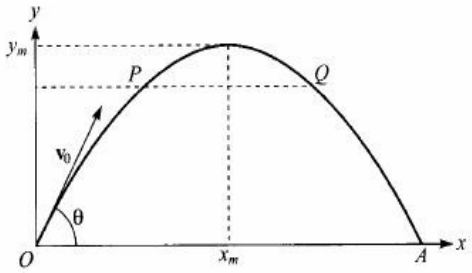


Figura 1

Vamos nos limitar também ao caso em que $x_0 = y_0 = 0$, tomando a posição inicial na origem, e vamos tomar $t_0 = 0$. Seja θ o ângulo entre $\vec{v}_0$ e Ox (figura acima), de modo que,

$$v_{0x} = v_0\ cos\theta, \quad v_{0y} = v_0\ sen\theta. \quad (3)$$

As equações (4) e (5)

$$\begin{cases} v_y(t) = v_{0y} + a(t - t_0), \\ v_x(t) = v_{0x} \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} y(t) = y_0 + v_{0y}(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 \\ x(t) = x_0 + v_{0x}(t - t_0) \end{cases} \quad (5)$$

Ficam,

$$v_y = v_0 \ sen\theta - gt \ ; \ v_x = v_0 \ cos\theta \qquad (6)$$

$$\begin{cases} y = v_0 \ sen\theta t - \frac{1}{2}gt^2 \\ x = v_0 \ cos\theta t \end{cases} \quad (7)$$

e a equação da trajetória,

$$y - y_0 = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}(x - x_0) + \frac{a}{2v^2{}_{0x}}(x - x_0)^2 \quad (8)$$

Fica,

$$y = \tan\theta \ x - \frac{g}{2v^2{}_0 cos\theta}x^2 \quad (9)$$

Conforme mostra a figura 1, a altura máxima $y_m$ atingida pelo projétil corresponde ao instante $t_m$ em que $v_y$ se anula, ou seja, pela (6),

$$t_m = \frac{v_0 \ sen\theta}{g} \quad (10)$$

e o valor correspondente de y é dado pela equação (7):

$$y_m = v_0 sen\theta \ . \frac{v_0 \ sen\theta}{g} - \frac{1}{2}g \ \frac{v^2{}_0 sen^2\theta}{g^2} \quad (11)$$

Depois de algumas manipulações algébricas obtemos a altura máxima

$$y_m - \frac{v^2{}_0 sen^2\theta}{2g} \quad (12)$$

Quanto tempo o projétil leva para atingir o solo no ponto $x = A$? Fazendo y = 0 na primeira das equações (7), obtemos uma equação do segundo grau em t, em que uma das raízes é t = 0, correspondendo ao ponto de lançamento, e a outra é

$$t = t_A = \frac{2v_0\, sen\theta}{g} = 2t_m \quad (13)$$

Ou seja, é o dobro do tempo que leva para atingir a altura máxima, o que poderíamos ter inferido pela simetria da trajetória com respeito a $x = x_m$.

Com que velocidade o projétil atinge o solo? Basta fazermos $t = t_A$ na equação (6):

$$|\vec{v}(t_A)| = |\vec{v_0}| \begin{cases} v_y(t_A) = v_0 sen\theta - gt_A = -v_0 sen\theta \\ v_x(t_A) = v_0 \cos\theta \end{cases} \quad (14)$$

Logo, ao atingir o solo, a velocidade do projétil só difere da velocidade inicial $\vec{v_0}$ pela inversão da componente vertical ($v_y \rightarrow -v_y$), e tem o mesmo módulo. Como $y = 0$ é um plano arbitrário, o mesmo vale em qualquer plano horizontal ($y = constante$), ou seja, também se aplica às velocidades nos dois pontos P e Q (na Fig.1) em que a parábola corta um dado plano horizontal.

Podemos exprimir as componentes da velocidade diretamente em função da altura y com auxílio da expressão (15)

$$v^2 = v^2{}_0 + 2a(x - x_0) \quad (15)$$

Encontramos,

$$v_y = \pm\sqrt{v^2{}_0 sen^2\theta - 2gy}, \quad v_x = v_0 \cos\theta \quad (16)$$

Onde o sinal é + ou – conforme o projétil esteja subindo ou descendo.

A distância $x = A$ entre o ponto de lançamento e o ponto em que o projétil volta a passar pelo plano y = 0 chama-se alcance do projétil, e se obtém substituindo a equação (13) na segunda (7):

$$A = v_0 \cos\theta \, . \frac{2v_0 \, sen\theta}{g} = \frac{v^2{}_0 sen(2\theta)}{g} \quad (18)$$

Onde usamos a bem conhecida relação trigonométrica: $sen(2\theta) - 2sen\theta \cos\theta$. Uma conseqüência imediata da equação (18) é que o alcance é máximo quando o "ângulo de elevação" θ vale 45º.

Precursores de Galileu acreditavam que uma bala de canhão se move em linha reta até esgotar seu impulso, e depois cai verticalmente. Galileu foi o primeiro a demonstrar que a trajetória é uma parábola. Além disso, obteve vários resultados discutidos acima, inclusive que o alcance é máximo para $\theta = 45$º, enunciando ainda o seguinte resultado:

"As amplitudes das parábolas descritas por projéteis disparados com a mesma velocidade, mas em ângulos de elevação acima e abaixo de 45º e eqüidistantes de 45º, são iguais entre si".

Galileu também observou o fato de que todos estes resultados sobre o movimento de projéteis são bastante idealizados, uma vez que não foi levado em conta o efeito da resistência do ar, que tende a diminuir o alcance e alterar o caráter do movimento. Este efeito é bastante complicado, porque a resistência do ar depende da forma do projétil e do módulo da velocidade instantânea, de forma que acopla os movimentos horizontais e verticais, que não podem mais ser considerados independentes. Entretanto, para projéteis de forma aerodinâmica (como balas de armas de fogo) e lançados com velocidades iniciais elevadas, os resultados acima constituem geralmente uma boa aproximação.

2.Resistência do ar.

Quando um objeto é abandonado de uma determinada altura, adquire um movimento acelerado pela ação da força peso. Além dessa força, atua no objeto uma outra de mesma direção e sentido contrário, devido à resistência do ar. Essa segunda força é variável e depende da velocidade do objeto.

Por exemplo, para gotas de chuva que têm uma velocidade da ordem de 2m/s, a força de resistência do ar é proporcional a essa velocidade.

$$F = k\,.v \quad (19)$$

Essa expressão empírica pode ser aplicada nos cálculos de resistências viscosas sobre um corpo em meios como o ar, água e óleo. Ela mostra que a força viscosa é variável, aumentando com a velocidade do corpo ( relativo ou fluido), em cada instante de tempo.

Assim, quanto maior a velocidade de queda do corpo, maior a força de resistência do fluido. Quando andamos praticamente não sentimos a resistência do ar. A partir do momento que começamos a correr podemos sentir o ar exercendo uma força sobre o nosso corpo.

Quando por descuido colocamos a mão para fora de um automóvel em movimento acelerado, podemos perceber como a força de resistência do ar aumenta com o aumento da velocidade do automóvel.

Experimentalmente constatamos que para corpos que se deslocam com velocidades relativas ao ar na faixa de 24m/s (86,4km/h) à 330m/s (1188km/h), a intensidade da força de resistência do ar é diretamente proporcional ao quadrado da velocidade do corpo em relação ao ar, sendo expressa por:

$$F = k.v^2 \quad (20)$$

- ✓ Onde $F$ é a intensidade da força de viscosidade ou resistência que o ar exerce sobre os corpos que se encontram em movimento relativo ao ar;
- ✓ $v$ é a intensidade da velocidade do corpo em relação ao ar;
- ✓ $k$ é o coeficiente que depende basicamente da densidade do ar, forma do corpo e da área transversal perpendicular à direção do movimento.

Existem várias situações em que podemos analisar a força de resistência do ar:

Esquiar

Para minimizar o efeito da viscosidade do ar e assim aumentar sua velocidade ele se agacha, diminuindo a área efetiva de contato transversal com o ar.

Dragster (carro foguete)

Estes carros atingem a velocidade de 120km/h, partindo do repouso em 0,05s (menos do que o piscar dos olhos). Para facilitar sua parada, é acionado um pára-quedas na traseira do carro, fazendo com que a área efetiva de resistência aumente e conseqüentemente a força de resistência do ar.

## Chuva

Graças à resistência do ar, as gotas de chuva chegam à superfície da terra com velocidades terminais que variam de alguns milímetros por segundo a alguns metros por segundo, dependendo do volume da gota. Uma gota d'água de 1,5mm de raio, atinge a velocidade limite de 25km/h (7m/s). Caso não existisse a viscosidade do ar, essas mesmas gotas inofensivas atingiriam o solo com velocidades fantásticas.

## O movimento de um Pára-quedista

Quando um pára-quedista salta de um avião sua velocidade vertical inicialmente é nula. A velocidade horizontal no indivíduo (a mesma do avião) diminui gradativamente pela ação da resistência do ar em sentido contrário.

A velocidade de queda do pára-quedista aumenta, pois o movimento é acelerado. Esse aumento de velocidade causa, por outro lado, um aumento da

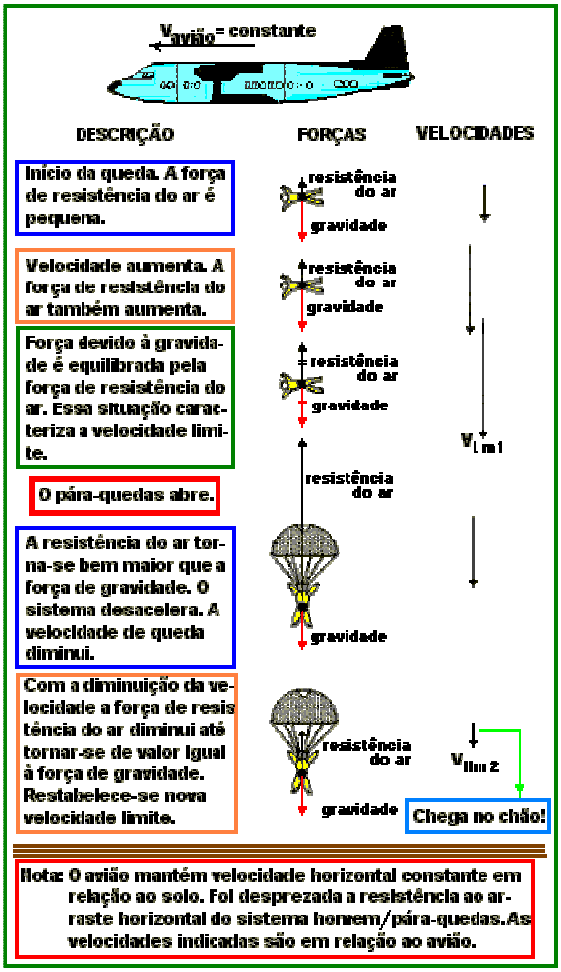
força de resistência do ar que, neste caso, pode ser considerado proporcional ao quadrado dessa velocidade.

Essa força de resistência do ar cresce até atingir o valor da força-peso que atua no pára-quedista. A partir daí, o movimento deixa de ser acelerado, processando-se com velocidade constante, porém muito grande.

No instante em que o pára-quedas é aberto, a força de resistência do ar aumenta muito, provocando no pára-quedista uma aceleração contrária ao movimento. A velocidade diminui bastante, até que o movimento se torne uniforme novamente.

A velocidade do pára-quedista no instante da abertura do pára-quedas é de cerca de 50m/s (o movimento só é acelerado aproximadamente nos primeiros 10 segundos, atingindo esta velocidade).

Depois de aberto o pára-quedas, a velocidade cai rapidamente até atingir cerca de 5m/s e permanece constante até alcançar o solo.



3. Lançamento oblíquo com resistência do ar.

O movimento de uma partícula em duas dimensões pode ser observado, como descrito no diagrama abaixo, por intermédio de um lançamento oblíquo.

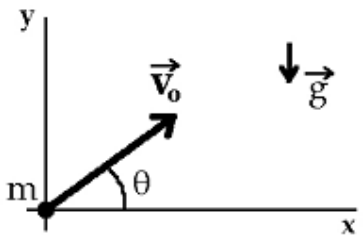



Figura 2 – trajetória obtidas com as equações (27) e (28)

Os componentes do movimento são:

$$eixo\ x:\ \ F = ma_x = 0 \quad (21)$$

$$eixo\ y:\ F = ma_y = -mg \quad (22)$$

Cuja solução é:

$$eixo\ x:\ \ x - Ut \quad (23)$$

$$eixo\ y:\ \ y = -\frac{gt^2}{2} + Vt \quad (24)$$

Em que, $U = v_{ox}\cos\theta$ e $V = v_{0y}\sin\theta$ são as velocidades iniciais, respectivamente, na direção $x$ e $y$, e $\theta$ é o ângulo entre a velocidade inicial $v_0$ e o eixo horizontal.

Para a resolução do problema de um lançamento oblíquo com resistência do ar adotaremos as seguintes equações, para o movimento horizontal e vertical respectivamente:

$$eixo\ x:\ F = ma = -kmv_x \quad (25)$$

$$eixo\ y:\ F - ma = -kmv_y - mg \quad (26)$$

Em que $k$ representa o coeficiente de resistência ou constante de retardamento. As soluções para as posições são:

$$eixo\ x:\ x = \frac{U}{k}(1 - e^{-kt}) \quad (27)$$

$$eixo\ y:\ y = -\frac{gt}{k} + \frac{kV + g}{k^2}(1 - e^{-kt}) \quad (28)$$

Na ultima equação, (28), foi utilizado $h = 0$ porque a partícula parte do solo. Estas duas equações fornecem um par ordenado $(x, y)$, que descreverá a trajetória da partícula, como mostra a figura 3, para $v_0 = 600{,}0\ m/s$ e ângulo de 60º. Observe que as trajetórias com alguma resistência do ar $(k = 0.005\ s^{-1}\ e\ k = 0.02\ s^{-1})$ não descrevem uma parábola, como ocorre no lançamento sem resistência do ar. A unidade $k$ será $(unidade\ de\ tempo)^{-1}$. Adotando o Sistema Internacional de unidades (SI), o tempo é dado em segundos, então a unidade de $k$ será $s^{-1}$.

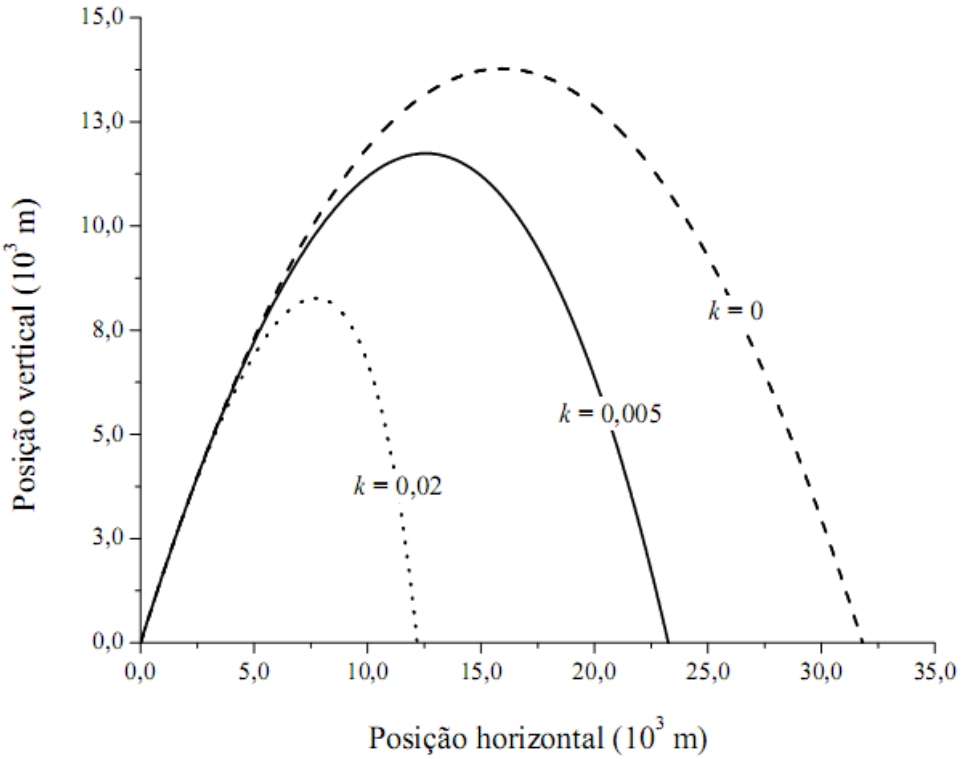



Figura 3 – Trajetórias obtidas com as equações (27) e (28), para $k = 0.005\ s^{-1}$ e $k = 0.02\ s^{-1}$, e com (23) e (24), para $k = 0$.

Para obtermos o alcance, que chamaremos de R', faremos $y = 0$ e teremos o tempo necessário (T) para a partícula retornar ao solo. Assim a equação (28),

$$y(t = T) = 0 = -\frac{gT}{k} + \frac{kV + g}{k^2}(1 - e^{-kt})$$

Obtemos:

$$T = \frac{kV + g}{gk}(1 - e^{-kt}) \quad (29)$$

Que é uma equação transcendental, e a sua solução analítica não pode ser obtida diretamente.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS


- HALLIDAY, David; WALKER, Jearl; RESNICK, Robert. Fundamentos de Física: Mecânica. 4.ed. Rio de Janeiro,1996. v.1.
- YOUNG, Hugh; FREEDMAN, Roger. Física I: Mecânica. 12º edicão, São Paulo, 2008.
- GREF. Física I: Mecânica. São Paulo, 1990.
- NUSSENZVEIG, Moisés. Curso de Física Básica I: Mecânica. 2º edição, São Paulo.
- HEWITT, Paul. Física Conceitual. 9º edição. Porto Alegre, 2002.