Universidade Federal do Amazonas
Pró-reitoria de Pesquisa e Pós-graduação
Departamento de Apoio à Pesquisa
Programa de Bolsas de Iniciação Científica

Relatório Final

Projeto PIBIC: PIB - E/016/2010

Estudo de Funções Reais de Várias Variáveis

e Aplicação à Otimização Global

_____________	_____________
Orientador	*Bolsista*

Bolsista:	Suellen Brasil da Silva - CNPq
Orientador:	Professor Dr. Nilomar Vieira de Oliveira
Vigência da Bolsa:	01/08/2010 a 31/07/2011
Unidade Executora do Projeto:	Instituto de Ciências Exatas Departamento de Matemática

Manaus - 2011

Conteúdo

1 RESUMO **3**

2 INTRODUÇÃO **4**

3 OBJETIVOS **5**

3.1 Objetivo Geral 5

3.2 Objetivos Específicos 6

4 METODOLOGIA **7**

5 RESULTADOS **8**

5.1 Espaços Vetoriais 8

5.2 Transformações Lineares 8

5.3 Normas e Métricas 9

5.4 Vetores Ortogonais 10

5.5 Normas 11

5.6 Bolas 14

5.7 Conjunto Limitado 16

5.8 Conjunto Convexo 16

5.9 Conjunto Aberto 18

5.10 Conjuntos Fechados 21

5.11 Conjuntos Compactos 23

5.12 Aplicações Continuas 25

6 CONCLUSÃO **28**

7 CRONOGRAMA **29**

8 REFERÊNCIAS **30**

1 RESUMO

Este projeto trata do estudo da Análise Matemática no Espaço no $\mathbb{R}^n$, com um estudo inicial em Álgebra Linear com os seguintes tópicos: espaços vetoriais aspectos básicos das transformações lineares, normas e métricas, a desigualdade de Cauchy-Schwarz e aplicações, focalizando os pontos básicos que constituem o pré-requisito para a Análise Matemática, com o desenvolvimento dos seguintes tópicos: propriedades dos números reias, bolas abertas, conjuntos convexos, normas, conjuntos abertos, conjuntos fechados e sequências reais, conexão entre conjuntos fechados e sequências, generalização para sequências no $\mathbb{R}^n$. Sequências de Cauchy, compactividade e completeza dos números reais e, como consequência disso, a completeza do espaço $\mathbb{R}^n$. Além disso, faremos uma breve introdução às aplicações contínuas apresentando definições e exemplos, e alguns teoremas básicos sobre sequências e funções contínuas, e também sobre funções contínuas definidas em conjuntos compactos. Outros conteúdos importantes que abordaremos serão continuidade e imagem de abertos, continuidade uniforme. Tudo isso para preparar o caminho para o estudo de otimização de funções contínuas definidas em compactos, em particular, o Teorema de Weierstrass no espaço $\mathbb{R}^n$.

A metodologia utilizada consistiu primeiramente em pesquisa bibliográfica e estudo dirigido, embasando-se nos estudos sistemáticos e específicos em Álgebra Linear fundamentados para o amadurecimento de idéias afim de desenvolver uma linguagem matemática, conciliando a escrita, a descrição e o racioncínio lógico. Ao longo destes estudos dirigidos, foram realizados seminários onde os tópicos mencionados acima foram expostos e tanto o conteúdo quanto a didática e metodologia do ensino foram avaliados pelo orientador. Todos os resultados estudados foram demostrados com rigor científico que a pesquisa matemática impõe.

2 INTRODUÇÃO

Neste relatório, consta o resultado do projeto de Iniciação Científica em Matemática, onde o bolsista submeteu-se ao estudo de Álgebra Linear e Análise Real no $\mathbb{R}^n$, uma das grandes áreas da Matemática.

Os tópicos abordados no projeto, bem como seus teoremas, demonstrações e definições mais importantes estarão descritos aqui de forma clara e concisa, para um bom entendimento do leitor. Também consta no relatório o cronograma de execução, as atividades desenvolvidas e as obras consultadas para o estudo perante o curso.

A Iniciação Científica em Matemática Pura, ao contrário das outras ciências, não ensina o bolsista a fazer pesquisa matemática mas sim prepara o aluno para alcançar este nível. A Matemática requer um árduo trabalho de formação afim de que se possa usar seus conhecimentos para produzir pesquisa. Neste projeto, a bolsista recebe orientações e treinamento no amadurecimento da lógica matemática e da linguagem científica formal escrita e falada.

3 OBJETIVOS

3.1 Objetivo Geral

O projeto de Iniciação Científica em Matemática visa uma melhor qualificação dos profissionais formados nas áreas de exatas, possibilitando aos alunos um aprendizado mais profundo e rigoroso sobre os mais variados relacionados a área em questão, incentivando-os a buscarem sempre a aumentar o conhecimento, não só aquele referente ao projeto em si, mas também aquele adquirido fora dele, durante a sua graduação, e não deixá-lo estagnado. Tal projeto visa também gerar a possibilidade de que num futuro mais próximo os seus participantes tenham maturidade acadêmica suficiente para engajar-se num curso de pós-graduação e/ou uma carreira trabalhista na educação, no comércio ou na indústria como um profissional altamente qualificado.

O objetivo desta iniciação científica é abrir um espaço para que os alunos sejam orientados e formados em um nível bem superior a média nacional. Dado o grau de abertura deste projeto, uma vez que envolve indiscriminadamente os principais cursos de ciências exatas e tecnológicas, uma oportunidade dada aos alunos, professores e futuros pesquisadores para que aprendam e aperfeiçoem os seus conhecimentos matemáticos necessários para suas próprias atividade.

3.2 Objetivos Específicos

Neste projeto será estudado inicialmente alguns tópicos de Álgebra Linear visando introduzir conceitos necessários para a melhor visualização da Análise Matemática no $\mathbb{R}^n$ e para posteriormente o estudo de otimização de funções definidas em compactos, em particular o Teorema de Weierstrass no Espaço $\mathbb{R}^n$. Este estudo será feito através de teoremas, lemas e algumas definições clássicas, tais como definições e teoremas dos espaços vetoriais, transformações lineares, normas e métricas, produto interno, desigualdade de Cauchy-Schwarz e aplicações, desigualdade triangular e teorema de Pitágoras.

Quanto a Análise Matemática no $\mathbb{R}^n$ serão estudadas as propriedades dos números reais, bolas abertas, conjuntos convexos, norma para conjuntos abertos, conjuntos fechados, sequências reais, conexão entre conjuntos fechados e sequências, generalização e completeza dos números reais e, consequência do espaço $\mathbb{R}^n$. Além de introduzimos às aplicações contínuas com definições e exemplos. Estudaremos ainda alguns teoremas básicos das sequências e funções contínuas, das funções contínuas definidas em conjuntos compactos, da continuidade e imagem inversa de abertos e por fim continuidade uniforme.

4 METODOLOGIA

O projeto inicia-se com o estudo de espaços vetoriais e transformações lineares, normas e métricas, produto interno, desigualdade de triangular e teorema de Pitágoras. Para que estes tópicos, que embora básicos, são importantes fiquem claros para a bolsista, afim de que ajude-o a compreender os próximos tópicos, que serão de análise matemática no $\mathbb{R}^n$. Tais conhecimentos foram absorvidos através de estudos individuais, seminários e resoluções de exercícios. Depois do estudo desses tópicos de álgebra linear, o orientando passa a estudar tópicos de análise matemática na reta, tais como números reais, sequências e topologia na reta como estudo dirigido pelo orientador.

Em seguida, é feito o estudo dos tópicos de análise no $\mathbb{R}^n$, abordando O Espaço Euclidiano no $\mathbb{R}^n$ e suas propriedades, bolas, conjuntos limitados, conjuntos abertos, conjuntos convexos, conjuntos fechados, sequência no $\mathbb{R}^n$ e conjuntos compactos. Para alcançar êxito nos tópicos estudados, fez-se estudos individuais e depois discursões com o orientador para sua melhor compreensão e, em seguinda, espondo-o através de seminários, além de exercícios que propiciam um melhor entendimento.

5 RESULTADOS

5.1 Espaços Vetoriais

Definição

Um *espaço vetorial* real é um conjunto V, não vazio, com duas operações: soma $V \times V \xrightarrow{+} V$, e multiplicação por escalar, $V \times V \xrightarrow{\cdot} V$,tais que, para quaiquer $u, v, w \in V$ e $a, b \in \mathbb{R}$ obedecem as seguintes propriedades:

1) $(u+v)+w = u+(u+w)$, para todo $u, v, w \in V$ *(associativa)*;

2) $u+v = v+u$ u, $v \in V$ *(comutativa)*;

3) Existe um elemento $0 \in V$ tal que $u+0 = u$, onde 0 é chamado vetor nulo, para todo $u \in V$ *(existência de elemento neutro em relação a adição)*;

4) Existe $-u \in V$ tal que $u+(-u) = 0$ *(existência de simétrico aditivo)*;

5) $1u = u$, para todo $u \in V$ *(existência do elemento neutro em relação a multiplicação)*;

6) $(\alpha+\beta)\,u = \alpha\,u+\beta u$, para α, $\beta \in \mathbb{R}$ e para todo $u \in V$;

7) $\alpha\,(\beta u) = (\alpha\,\beta)\,u$, para todo α, $\beta \in \mathbb{R}$ e para todo $u \in V$;

8) $\alpha\,(u+v) = \alpha\,u+\alpha\,v$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e para todo u, $v \in V$;

5.2 Transformações Lineares

Definição

Sejam V e W dois espaços vetoriais. Uma *transformação linear* (aplicação linear) é uma função de V em W, $F : V \longrightarrow W$, que satisfaz as seguintes condições:

i) Quaisquer que sejam u e v em V tal que $F(u+v) = F(u)+F(v)$;

ii) Quaisquer que sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $v \in V$, $F(\alpha\,v) = \alpha\,F(v)$.

Exemplos

1) $T: U \longrightarrow V$ dada por $T(u) = 0$, para todo $u \in U$. T é chamada de transformação nula.

2) $T: U \longrightarrow U$ dada por $T(u) = u$, para todo $u \in U$. T é chamada de transformação identidade.

Contra-Exemplos

1) $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $T(x,y,z) = x+y+z+16$. Note que $T(0,0,0) = 16 \neq 0$. Logo não é uma Transformação Linear

2) $T: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $T(x) = x^2$. É transformação linear?

Demostração

Sejam $x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow T(x+y) = (x+y)^2 = x^2+2xy+y^2 \neq x^2+y^2 = T(x)+T(y)$

Portanto, $T(x+Y) \neq T(x)+T(y)$ e T não é transformação linear.

5.3 Normas e Métricas

Produto Interno Euclidiano

É uma operação que associa a cada par de vetores $x = (x_1, ..., y_n)$, $y = (y_1, ..., y_n)$ o número real.

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + ... + x_n y_n$$

Lê-se *produto interno* de x por y

Propriedades

Para $x,\ y,\ z \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ quaisquer, tem-se:

1) $\langle x, x \rangle > 0$ para todo $x \in V$ com $x \neq 0$;

2) $\langle x, y \rangle = \langle y,\ x \rangle$ para todo $x,\ y \in V$;

3) $\langle \alpha x,\ y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e todo $x,\ y \in V$;

4) $\langle (x+y),\ z \rangle = \langle x,\ z \rangle + \langle y,\ z \rangle$ para todo $x,\ y,\ z \in V$;

5.4 Vetores Ortogonais

Definição

Diz-se que os vetores $x,\ y \in \mathbb{R}^n$ são *ortogonais* $(x \perp y)$ quando o *produto interno* entre eles é igual a zero. Isto é,

$$x \perp y \Leftrightarrow \langle x,\, y\rangle = 0.$$

Exemplos

1) Sejam e_i, e_j elementos da base canônica do $\mathbb{R}^n$.

$e_i \perp e_j$ se $i \neq j$

Proposição 1

Seja $x \in \mathbb{R}^n$, não-nulo. Para todo $y \in \mathbb{R}^n$, o vetor $z = y - \dfrac{\langle x,\, y\rangle}{\langle x,\, x\rangle} \cdot x$ é ortogonal a x.

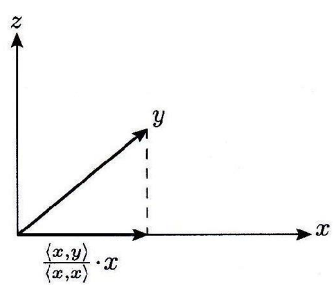

Figura 1: Projeção.

Demonstração

Consideremos $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$.Vamos achar o vetor p, projeção do vetor y sobre o vetor x.

Seja $z = y - p$.

Como $p \perp z$, então $\langle p,\, z\rangle = 0 \qquad (1)$

Agora, notemos que p é um múltiplo escalar de x , logo existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$p = \alpha x. \qquad (2)$$

Substituindo a expressão (2) em (1), obtemos:

$$\langle \alpha x, y - \alpha x \rangle = 0 \qquad (3)$$

Aplicando as propriedades de bilinearidade do produto interno a (3), obtemos:

$$\alpha = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle x, x \rangle} \qquad (4)$$

Portanto, o vetor p é dado por

$$p = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle x, x \rangle}\, x,$$

pela substituição de (4) em (2).

Podemos enuciar, portanto, a seguinte proposição:

Seja $x \in \mathbb{R}^n$, não-nulo. Para todo $y \in \mathbb{R}^n$, o vetor $z = y - \dfrac{\langle x, y \rangle}{\langle x, x \rangle} \cdot x$ é ortogonal a x.

5.5 Normas

Definição

O número não-negativo $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ chama-se a *norma* (ou comprimento) do vetor x. Se $x = (x_1, \ldots, x_n)$ então

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$$

A norma goza das seguintes propriedades:

1) $\|x\| \geq 0$, valendo somente quando $x = 0$;

2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$;

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(Desigualdade triangular).*

Proposição 1

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

(A soma de dois lados de um triângulo é sempre maior que o terceiro lado)

Demostração

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle \\
&= \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \\
&= \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \\
&\leq \langle x, x\rangle + 2|\langle x, y\rangle| + \langle y, y\rangle \\
&\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\| \\
&= (\|x\| + \|y\|)^2
\end{aligned}$$

Portanto, $\|x+y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2$ e como $\|x+y\| \geq 0$ e $(\|x\| + \|y\|) \geq 0$
Temos: $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, como queríamos.

Teorema

Teorema de Pitágoras

Se $x \perp y$ então $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

Demonstração

$$\begin{aligned}
&\text{Sejam } x, y \in \mathbb{R}^n, \text{ temos} \\
\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle \\
&= \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \\
&= \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \\
&\ \text{Como } x \perp y \text{ temos } \langle x, y\rangle = 0 \text{ assim,} \\
&= \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle \\
&= \|x\|^2 + \|y\|^2 \\
\text{Portanto } \|x+y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2.
\end{aligned}$$

Proposição 2

Desigualdade de Schuwarz

Para quaisquer $x,\ y \in \mathbb{R}$, tem-se $|\langle x,\ y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$, valendo a igualdade se, e somente se, um dos vetores $x,\ y$ é múltiplo do outro.

Demostração

Isto é obvio se $x = 0$. Supondo $x \neq$, podemos escrever $y = \alpha x + z$ com $z \perp x$ e $\alpha = \dfrac{\langle x,\ y\rangle}{\|x^2\|}$. Por Pitágoras, $|y^2| = \alpha^2|x|^2 + |z|^2$, logo $|y|^2 \geq \alpha^2|x|^2$, valendo a igualdade se, e somente se, $y = \alpha \cdot x$. Entrando com o valor de α, vem $|y|^2 \geq \dfrac{\langle x,\ y\rangle^2}{\|x^2\|}$, ou seja, $\langle x,\ y\rangle \leq |x|^2 \cdot |y|^2$, o que nos dá $|\langle x,\ y\rangle| \leq |x| \cdot |y|$, valendo a igualdade se, e somente se, $y = \alpha \cdot x$.

Alguns Tipos de Normas

1) $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ *(Norma Euclidiana)*;

2) $\|x\|_M = max\{\|x_1\| + \ldots + \|x_n\|\}$ *(Norma do Máximo)*;

3) $\|x\|_S = |x_1| + \ldots + |x_n|$ *Norma da Soma.*

Uma norma em $\mathbb{R}^n$ dá origem à noção de distância $d(x,\ y)$ entre dois pontos $x,\ y \in \mathbb{R}^n$. Para $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $(y_1, \ldots, y_n)$, então temos que:

$$d(x,y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$$

As propriedades que satisfazem as normas, implicam imediatamente que a distância goza das seguintes propriedades, para $x,\ y,\ z \in \mathbb{R}^n$ quaisquer.

1) $d(x,\ y) > 0$, com $d(x,\ y) = 0$ se, e somente se, $x = y$;

2) $d(x,\ y) = d(y,\ x)$;

3) $d(x,\ z) \leq d(x,\ y) + d(y,\ z)$ (desigualdade triangular;)

4) $d(x,\ x) = 0$

Proposição 3

Para toda norma , vale a desigualdade triangular.

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

Demonstração

Com efeito, de $x = (x - y) + y$, resulta que $\|x\| \leq \|x - y\| + \|y\|$, logo $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$.
Trocando os papéis de x e y, obtemos $\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\|$. Mas
$\|y - x\| = \|x - y\|$, logo $\|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|$.
Portanto,
$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$.

5.6 Bolas

Dado $a \in \mathbb{R}^n$ e r um ponto pertencente ao $\mathbb{R}^+$ temos que:

1) Bola Aberta

A bola aberta de centro a e raio r é o conjunto $B(a,\ r)$ dos pontos $x \in \mathbb{R}^n$ cuja distância ao ponto a é menor que r. Em símbolos:

$$B(a,\ r) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - a\| < r\}$$

2) Bola Fechada

A bola fechada de centro a e raio r é o conjunto B[a, r] dos pontos $x \in \mathbb{R}^n$ cuja distância ao ponto a é menor igual que r. Em símbolos:

$$B[a,\ r] = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - a\| \leq r\}$$

3) Esfera

A esfera de centro a e raio r é o conjunto B[a, r] dos pontos $x \in \mathbb{R}^n$ cuja distância ao ponto a é igual a r. Em símbolos:

$$S[a,\ r] = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - a\| = r\}$$

Observações importantes:

É fácil notar, $B[a,\ r] = B(a,\ r) \cup S[a,\ r]$.

A bola fechada $B[a,r] \subset \mathbb{R}^n$ também é chamada o *disco n-dimensional* de centro a e r. Em particular, o disco $B[0,1]$ de centro 0 e raio 1 é chamado o *disco unitário* de $\mathbb{R}^n$. Uma notação especial é reservada para a *esfera unitária* de dimensaõ $n-1$:

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x\| = 1\}$$

Assim, S^{n-1} é esfera de centro na origem 0 e raio 1. Quando $n = 2$, S^1 é a circunferência de centro 0 e raio 1.

Forma Geométrica das Bolas e Esferas em $\mathbb{R}^n$ em relação as normas adotadas:

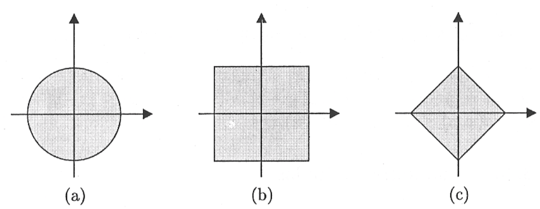

Figura 2: $x \in \mathbb{R}^2$ tais que $\|x\| \leq 1$, conforme a norma seja (a) a euclidiana, (b) do máximo ou, (c) da soma.

Indiquemos com notação B, B_M e B_S respectivamente as bolas de centro a e r em $\mathbb{R}^n$, relativamente às normas euclidiana, do máximo e da soma. Em relação a norma euclidiana, a esfera e a bola tem um aspecto geométrico de uma esfera mesmo e de uma bola.

Já a norma do máximo apresenta um aspecto geométrico de um quadrado de centro 0 e raio 1, cuja a distância do centro a origem é ≤ 1. Em relação a norma da soma temos a esfera e a bola com aspecto geométrico de um cubo com diagonais paralelas aos planos coordenados.

É interessante resaltar que em manipulações de desigualdades, igualdades e etc é conveniente trabalhar com a norma do máximo, pois lida com números sem a raiz quadrada.

5.7 Conjunto Limitado

Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é limitado quando está inteiramente contido em uma bola fechada $B[a,r]$.

$$B[a,r] \subset B[0,\ r_1 + \|a\|] \Leftrightarrow existe\ c > 0;\ x \in X \Rightarrow \|x\| \leq c$$

Um aplicação $F : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é *limitada* no conjunto $X \subset \mathbb{R}^m$ quando sua imagem $F(X) \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto limitado, isto é, quando existe $c > 0$ tal que $\|F(x)\| \leq c$ para todo $x \in X$.

Proposição 1

Todo *conjunto limitado* está inteiramente contido numa bola fechada $B[0,\ r + \|a\|]$.

Demostração

Vamos mostrar que toda bola está contida numa outra bola com centro na origem 0 e raio $r + \|a\|$.

$$B[a,\ r] \subset B[0,\ r + \|a\|],$$

notemos que $\|x - a\| \leq r$ logo temos,

$$\|x\| = \|x - a + a\| \leq \|x - a\| + \|a\| < r + \|a\|$$

Assim se $x \in B[a,\ r]$ temos que

$$x \in B[0,\ r + \|a\|]$$

Portanto $B[a,\ r] \subset B[0,\ r + \|a\|]$.

5.8 Conjunto Convexo

Definição

Dados $x, y \in X \subset \mathbb{R}^n$ se o segmento de reta $[x,\ y] = \{(1-t)x + ty;\ t \in [0,\ 1]\}$ estiver inteiramente contido em X dizemos que o conjunto é *convexo*.

Exemplos

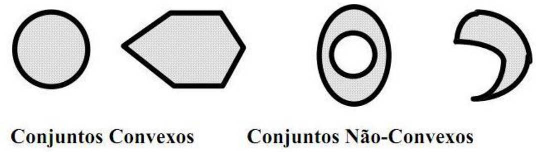

Figura 3: Conjuntos convexos e não-convexos.

Proposição 1

Em relação a qualquer *norma*, toda bola (aberta ou fechada) é um *conjunto convexo*.

Demostração

Seja $B[a,r]$ uma bola fechada e $x, y \in B[a,\ r]$.
Então $\|x-a\| \leq r$ e $\|y-a\| \leq r$
Então $t \in [0,\ 1]$, temos $a = ta + (1-t)a$

Vamos mostrar agora que o segmento de reta $[x,\ y] \subset B[a,\ r]$.

Assim:

$$\begin{aligned} t \in [0,1],\ \|tx+(1-t)y-at+(1-t)a\| &= \|t(x-a)+(1-t)(y-a)\| \\ &\leq t\|x-a\|+(1-t)\|y-a\| \\ &\leq tr+(1-t)r = r \end{aligned}$$

Logo o segmento de reta $tx+(1-t)y \in B[a,\ r]$.

Portanto, toda bola fechada $B[a,\ r]$ é um *conjunto convexo.*

Demostração análoga para as bolas abertas.

5.9 Conjunto Aberto

Ponto Interior

Definição

Seja $a \in S \subset \mathbb{R}^n$. Diz-se que o ponto a é ponto *interior* ao conjunto S quando, para algum $r > 0$, tem-se uma bola aberta $B(a,\ r) \subset S$. Isto significa que todos os pontos suficientemente próximos de a também pertencem a S. O conjunto $int.S$ do pontos interiores a S chama-se *interior* do conjunto S.

Definição de Conjunto Aberto

Dizemos que $S \subset \mathbb{R}^n$ é um *conjunto aberto* quando todos os seus pontos são interiores isto é

$$\forall a \in S \Rightarrow \text{existe } r \in \mathbb{R}^+;\ B(a,\ r) \subset S$$

.

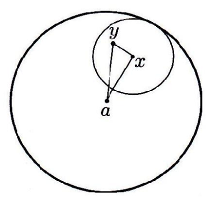

Figura 4: Conjunto aberto.

Exemplos

1) Seja $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ y \geq 0\}$ o semi-plano superior fechado. Se $p = (a,b)$ com $b > 0$, então $p \in intX$. Com efeito, afirmamos que $B = B(p,b) \subset X$. Isto é claro geométricamente.

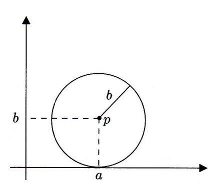

Figura 5:

Demostração

$$
\begin{aligned}
(x,y) \in B \ &\Rightarrow \ \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < b \Rightarrow (y-b)^2 < b^2 \\
&\Rightarrow \ y^2 - 2by + b^2 < b^2 \Rightarrow y^2 < 2by \Rightarrow y > 0 \ (pois \ b > 0)
\end{aligned}
$$

Portanto $(x,y) \in X$.

2) A reta real, isto é, o conjunto $\mathbb{R}$ é aberto.

Demostração

Para todo $x \in \mathbb{R}$, existe $\varepsilon > 0$ (de fato para todo $\varepsilon > 0$) tal que $x+\varepsilon \in \mathbb{R}$ e $x-\varepsilon \in \mathbb{R}$, isto é $(x-\varepsilon,\ x+\varepsilon) \subset \mathbb{R}$.

Contra-exemplos

1) Temos que *int* $\mathbb{Z} = \emptyset$ e *int* $\mathbb{Q} = \emptyset$, logo os conjuntos $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ não são abertos.

Demostração

Seja $m \in \mathbb{Z}$, existe $\varepsilon > 0$, tal que

$$\text{o intervalo}(m-\varepsilon,\ m+\varepsilon)$$

não possui ponto algum de $\mathbb{R}$, diferente de m, logo $m \notin int\mathbb{Z}$.

Portanto, não é aberto.

2) O conjunto $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 \leq 1\}$ não é um conjunto aberto.

Teoremas Importantes

1) Se S_1 e S_2 são *conjuntos abertos* em $\mathbb{R}^n$ então $S_1 \cap S_2$ é aberta.

Demostração

Como S_1 e S_2 são conjuntos abertos vamos mostrar que a interserção $S_1 \cap S_2$ é aberta também.

Tome $a \in S_1 \cup S_2$ logo existe $s_1,\ s_2 > 0$ tal que

$B(a,\ s_1) \subset S_1$ e $B(a,\ s_2) \subset S_2$

Assim se tomando $S = min(s_1, s_2)$

teremos $B(a,\ s) \subset S_1 \cap S_2$ logo,

a é ponto interior $S_1 \cap S_2$

Portanto, $S_1 \cap S_2$ é aberta.

Observação

A interseção $S_1 \cap S_2$ de conjuntos infinitos podem não ser conjuntos abertos.

2) Se $(S_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma família arbritária de conjuntos $S_\lambda \subset \mathbb{R}^n$, então a reunião $S = \bigcup_{\lambda \in L} S_\lambda$ é um conjunto aberto.

Demostração

Queremos mostrar que se:

a família $(S_\lambda)_{\lambda \in L}$ é aberta então a união $S = \bigcup_{\lambda \in L} S_\lambda$ é aberta.

Tome $a \in S$, logo existe $\lambda \in L$ tal que $a \in S_\lambda$

assim temos $s \in \mathbb{R}^+$ tal que $B(a, s) \subset S_\lambda \subset \bigcup_{\lambda \in L} S_\lambda = S$

Logo existe $B(a, r) \subset S$, mas se isso ocorre temos que

a é ponto interior de S

Portanto $S = \bigcup_{\lambda \in L} S_\lambda$ é *conjunto aberto.*

5.10 Conjuntos Fechados

Definição

Um conjunto *fechado* F de espaço métrico E é fechado se seu complementar F^c (isto é, todos em E que não estão em F) é aberto.

Teorema

Em qualquer espaço métrico, uma bola fechada é um conjunto fechado.

Demostração

Sejam $\overline{B}$ uma bola fechada de centro $P_0 \in E$, raio r e seja $p \in \overline{B}^c$.

Então $\|p - p_0\| > r$, de forma que $\|p - p_0\| - r > 0$, e podemos considerar a bola aberta de centro p e raio $\|p - p_0\| - r$.Para qualquer ponto q nessa íltima bola fechada referida temos

$$\|p-q\| < \|p-p_0\| - r$$

de forma que

$$\|q-p_0\| = \underbrace{\|q-p_0\| + \|p-q\|} - \|p-q\| \geq \|p-p_0\| - \|p-q\| > r$$

Assim, a bola aberta de centro p e raio $\|p - p_0\| - r$ está simultaneamente contida em $\overline{B}^c$, de forma que $\overline{B}^c$ é *aberto*.

Logo $\overline{B}$ é *fechado*.

Revisão de conjuntos

Proposição 1

Se $X, Y \subset A$, então $C_A X \cap C_A Y = C_A(X \cup Y)$.

Demostração

Vamos mostar que $C_A X \cap C_A Y$ e $C_A(X \cup Y)$ têm os mesmos elementos.

$(\subset)$ Se $x \in C_A X \cap C_A Y$, então $x \in C_A X$ e $x \in C_A Y$. Isto significa que $x \in A$, $x \notin X$, $y \notin Y$. Como $x \notin$, sabemos que $x \in X \cup Y$. Portanto, $x \in C_A(X \cup Y)$.

$(\supset)$ Se $x \in C_A(X \cup Y)$, então $x \in A$ e $x \notin X \cup Y$. Portanto, $x \in X$ e $x \in Y$. Assim, $x \in C_A X$ e $x \in C_A Y$, de forma que $x \in C_A X \cap C_A Y$.

Proposição 2

Se I e A são conjuntos e se para cada $i \in I$ temos $X_i \subset A$, então $C_A(\bigcap_{i \in I} X_i) = \bigcup_{i \in I}(C_A X_i)$.

Demostração

$(\subset)$ Se $x \in C_A(\bigcap_{i \in I} X_i)$, então $x \in A$ e $x \notin \bigcap_{i \in I} X_i$. Portanto, $x \in X_j$ para ao menos $j \in I$. Assim $x \in C_A X_j$, de forma que $x \in \bigcup_{i \in I}(C_A X_i)$.

$(\supset)$ Se $x \in \bigcup_{i \in I}(C_A X_i)$, então existe $j \in I$ tal que $x \in C_A X_j$. Assim, $x \in A$ e $x \notin X_j$. Como $x \notin X_j$ então $x \notin \bigcap_{i \in I}(X_i)$. Portanto, $x \in C_A \bigcap_{i \in I}(C_A X_i)$

Teoremas Importantes

1) Para qualquer espaço métrico E, a interseção de qualquer coleção de conjuntos fechados de E é fechado.

Demostração

Sejam $F_i, i \in I$, uma família de conjuntos fechados. Então $(F_i^c = A_i)$ é uma família de conjuntos abertos , donde

$$A = \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} F_i^c$$

é um conjunto aberto. Consequentemente $C_A = \big(\bigcap_{i \in I} A_i\big)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c = \bigcap_{i \in I} F_i = F$ é fechado.

2) Para qualquer espaço métrico E a união de um número finito de subconjuntos fechados E é fechado.

Demostração

Se $F_1, F_2, ..., F_n$ são conjuntos fechados então $A_1, A_2, ..., A_n$ são abertos, onde $A_i = F_i^c$.

Então $\bigcap_{i \in 1}^{n} A_i = \bigcap_{i \in 1}^{n} F_i^c$

é um *conjunto aberto*. Mas

$\big(\bigcap_{i \in I}^{n} F_i^c\big) = \bigcap_{i \in 1}^{n} A_i^c = \bigcap_{i \in 1}^{n} F_i$

é um conjunto fechado.

5.11 Conjuntos Compactos

Definição

Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ chama-se *compacto* quando é limitado e fechado.

Exemplos

1) Toda bola fechada B[a,r] é compacta.

2) Toda esfera $S[a, r]$ é compacta.

Contra-exemplos

1) O conjunto $\mathbb{Z}^n$ é fechado mas não é limitado, logo não é compacto.

2) O conjunto (a,b) é limitado mas não é fechado, logo não é compacto.

Teoremas Importantes

Teorema 1

$(\mathbf{1})$ Um conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ é *compacto* se, e somente se $(\mathbf{2})$ toda sequência de pontos em k possui uma subsequência que converge para um ponto de K.

Demostração

$(\mathbf{1}) \Rightarrow (\mathbf{2})$

Se K é compacto então toda sequência de pontos $x_k \in K$ é limitada, pois K é limitado.

Assim, pelo teorema de Bolzano Weierstrass, uma subsequência $(x_k)_{k\in\mathbb{N}'}$ converge para um ponto $a = lim\, x_k$ com $k \in \mathbb{N}'$. Como K é fechado, tem-se $a \in K$.

Logo, $(\mathbf{1}) \Rightarrow (\mathbf{2})$.

$(\mathbf{2}) \Rightarrow (\mathbf{1})$

De maneira semelhante , se vale $(\mathbf{2})$ então K é limitado pois caso contrario existiria, para cada $k \in \mathbb{N}$, um ponto $x_k \in K$ tal que $|x_k| > k$.

Assim, a sequência (x_k) obtida não teria subsequência limitada, logo não teríamos nenhuma de suas subsequências convergentes. Além do mais, temos que K é fechado pois $a = \lim\, x_k$ com $x_k \in K$ para todo $k \in \mathbb{N}$ então, por $(\mathbf{2})$, uma subsequência de (x_k) covergiria para um ponto de K.

Mas toda subsequência de (x_k) converge para a.

Logo $a \in K$ e $(\mathbf{2}) \Rightarrow (\mathbf{1})$.

Portanto $(\mathbf{1}) \Leftrightarrow (\mathbf{2})$.

5.12 Aplicações Continuas

Definição

Uma aplicação $f : X \to \mathbb{R}^n,\ X \subset \mathbb{R}^m$ é contínua no ponto $a \in X$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in X,\quad \|x-a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon.$$

A aplicação f é contínua em X quando é contínua em todos os pontos de X.

Exemplos

1) Dada $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2$ é continua em todo $x \in \mathbb{R}$.

2) Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida assim: para $x \geq 5$, $f(x) = x+1$. Se $x \leq 5$, então $f(x) = 16-2x$. Então f é contínua em todo ponto $a > 5$ pois coincide com função continua $g(x) = x+1$ no intervalo aberto $(5,\ \infty)$, o qual contém a. Por motivo análogo, f é contínua em todo ponto $a < 5$. Também no ponto 5, f é contínua, pois $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = 6 = f(5)$.

Uma plicação $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$, definida num conjunto $X \subset \mathbb{R}^m$, chama-se *lipstziana* quando existe $c > 0$ tal que $\|f(x) - f(y)\| \leq c\|x-y\|$ quaisquer $x,\ y \in X$. O número c é chamado uma *constante de lipschitz* de f. Toda aplicação lipschitziana é unifomente contínua:

dado $\varepsilon > 0$, basta tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$. A função $f : [0,\ 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sqrt{x}$, é uniformente contínua mas não é lipschiziana.
Basta ver que

$$\|\sqrt{x} - \sqrt{y}\| = \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}\|x-y\|$$

e que, com $x, y \in [0,1]$ pode-se tomar $\sqrt{x} - \sqrt{y}$ tão pequeno, (logo $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^{-1}$) tão grande) quanto se queira.

Contra-Exemplos

1) Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 0$ para x racional e $f(x) = 1$ quando x é irracional. Então todo número real é ponto de descontinuidade de f, pois não existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, seja qual for $a \in X$.

2) Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ para $x \neq 0$. Seja qual for o valor atribuído a $f(0)$, o ponto 0 será uma descontinuídade para f, pois não existe $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ nem $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.

Teorema 1

(1) A aplicação $f : X \to \mathbb{R}^n$ é contínua no ponto $a \in X$ se, e somente se, para toda sequência de pontos (x_k) pertencente a X com $\lim x_k = a$, tem-se que $\lim f(x_k) = f(a)$.

(2) A aplicação $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua no ponto $a \in X$ se, e somente se, sua funções coordenadas $f_1, ..., f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ são contínuas nesse ponto.

Demostração

Vamos mostrar que $(1) \Rightarrow (2)$

(1) Seja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ contínuas no ponto a. Dada a sequência de pontos $x_k \in K$ com $\lim\, x_k = a$, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $f(B(a;\, \delta)) \subset B(f(a);\, \varepsilon)$. Correspondente a δ, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k > k_0 \Rightarrow x_k \in B(a;\, \delta)$, logo $k > k_0 \Rightarrow x_k \in B(a;\, \delta)$, logo $k > k_0 \Rightarrow f(x_k) \in B(f(a);\, \varepsilon)$. Isto mostra que $\lim\, f(x_k) = f(a)$.

De maneira semelhante, suponhamos, por absurdo, que $lim\, x_k = a$ implica $\lim\, f(x_k) = f(a)$, porém f seja descontínua no ponto a.Então existe $\varepsilon > 0$ com a seguinte propriedade: para todo $k \in \mathbb{N}$, podemos encontrar $x_k \in X$ com $|x_k - a| < \frac{1}{k}$ e $|f(x_k) - f(a)| \geq \varepsilon$. Assim, temos $\lim\, x_k = a$ mas não temos $\lim\, f(x_k) = f(a)$, uma contradição.

(2) Decorre imediatamente do teorema 2, juntamente com a parte (1) acima.

Teorema 2

A imagem $f(K)$ do conjunto compacto $K \subset X$ pela aplicação contínua $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é também um conjunto compacto.

Demonstração

Seja (y_k) uma sequência de pontos em $f(k)$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $x_k \in K$ tal que $f(x_k) = y_k$

Como K é compacto, uma subsequência $(x_{k \in \mathbb{N}'})$ converge para um ponto $a \in K$. Sendo f contínua nesse ponto a, de $\lim\, x_k = a, k \in \mathbb{N}'$ resulta pelo teorema 1, que $\lim\, f(x_k) = f(a)$, com $k \in \mathbb{N}'$.

Logo toda sequência de pontos $y_k = f(x_k) \in f(k)$ possui uma subsequência $(y_k)_{k \in \mathbb{N}'}$ convergente para um ponto $f(a) \in f(k)$.

Noutras palavras: $f(K)$ é compacto.

Teorema 3

Toda função real contínua $f : K \to \mathbb{R}$ definida num conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^n$, atinge seu máximo e seu mínimo em K, isto é, existem $x_1, x_2 \in K$ tais que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$, para qualquer $x \in K$.

Demostração

Como $f(K)$ é compacto pelo teorema 2 anterior

$f(K)$ é compacto de $\mathbb{R}$,

$\Rightarrow$ que existem $y_1, y_2 \in f(K)$ extremos minímos e máximos

$\Rightarrow$ que existem $x_1 \in K$ e $x_2 \in K$ tal que

$f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$

$\Rightarrow$ $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$, qualquer $x \in K$.

6 CONCLUSÃO

Diante dos resultados obtidos acima, que foram devidamente selecionados e estudados por métodos didáticos, seminários e aulas especiais de esclarecimento com professor orientador, o orientando conseguiu formular uma generalização que os descreva do modo mais simples e claro possível, de modo que suas dificuldades que estavam aparecendo, conforme às apresentações foram se tornando mais clara e sempre ciente de que todas as soluções dependiam de seu próprio desempenho.

O projeto em si está trazendo muitos benefícios diante das deficiências que tinha, fazendo com que enxergasse suas aptidões e seus erros e, que ao longo desta trajetória foi desenvolvido uma linguagem mais sucinta conciliando a escrita, a descrição e o raciocínio lógico dos resultados, tendendo para um encadeamento lógico das proposições e na análise das propriedades mais relevantes dos objetos que foram estudados.

A escolha dos tópicos visou um equilíbrio entre a estrutura lógica do assunto e a utilidade em possíveis aplicações relacionadas com o projeto, visto que sua existência neste, é de fundamental importância dentro do corpo do projeto.

7 CRONOGRAMA

O desenvolvimento do projeto obedece o seguinte cronograma:

Atividades	Ago	Set	Out	Nov	Dez	Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul
Revisão de Álgebra Linear	X											
Revisão de Análise na Reta: propriedades dos números		X										
Conjuntos Abertos			X									
Conjuntos Fechados				X								
Conjuntos Compactos					X	X						
Funções Contínuas							X	X				
Funçõe Contínuas Definidas em Compactos									X	X		
Continuidade Uniforme										X	X	X
Elaboração do Resumo e Relatório Final									X	X	X	
Preparação da Apresentação Final para o Congresso										X	X	X

8 REFERÊNCIAS

Referências

[1] E. L. Lima, Álgebra Linear(Quarta edição).Coleção Matemática Universitária, IMPA, CNPq, 2000. C

[2] J.K. Martins, Notas de um Curso de Álgebra Linear. Universidade Federal do Amazonas

[3] Elon Lages, 1929- Curso de Análise, Vol. 1. 10.ª edição. Rio de Janeiro: IMPA

[4] K. Hoffman, Álgebra Linear. Rio de Janeiro:LTC, 1976