UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS

PRÓ REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

DEPARTAMENTO DE APOIO A PESQUISA

PROGRAMA INSTITUCIONAL DE BOLSAS DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA

APLICAÇÕES NÃO-CONVENCIONAIS DA LEI DE GAUSS DO ELETROMAGNETISMO

Bolsista: Henrique Pecinatto, CNPq

MANAUS

2012

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS

PRÓ REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

DEPARTAMENTO DE APOIO A PESQUISA

PROGRAMA INSTITUCIONAL DE BOLSAS DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA

RELATÓRIO FINAL

PIB-E/0022/2011

APLICAÇÕES NÃO-CONVENCIONAIS DA LEI DE GAUSS DO ELETROMAGNETISMO

Bolsista: Henrique Pecinatto, CNPq

Orientador: Prof.Dr.Igor Tavares Padilha

MANAUS

2012

Resumo

Uma carga estacionária livre no espaço gera um campo elétrico que decai com o inverso do quadrado da distância (Lei de Coulomb). Ao colocarmos outra carga no espaço, esta sentirá a presença da primeira devido ao campo elétrico e interagirão entre si, havendo uma força elétrica ao longo da reta que une estas cargas, podendo ser de repulsão ou atração, dependo do sinal das cargas.

Uma vez que se está interessado no comportamento do campo elétrico dessas cargas, uma pergunta pertinente seria como determinar o campo em um ponto no espaço se há um número muito grande de cargas? Neste caso o campo será a superposição das contribuições dos campos produzidos por cada uma das cargas individuais do sistema, onde estas podem estar distribuídas continua ou discretamente.

Dependendo de como estas cargas se distribuem, ou seja, da simetria envolvida, podemos encontrar o campo elétrico utilizando a ideia de fluxo, tal possibilidade é garantida pela chamada Lei de Gauss, que diz que o fluxo do campo elétrico através de uma superfície fechada é proporcional a carga liquida em seu interior. Portanto pode-se, sem perda de generalidade, escolher uma superfície que explore a simetria da distribuição de carga permitindo calcular o campo a partir do fluxo.

Este projeto tem como objetivo inicial verificar a partir dos elementos de simetrias envolvidos se é possível um elipsoide ser considerado uma superfície gaussiana para um fio finito de densidade linear de cargas constante.

Com o intuito de realizar tais comparações, encontrou-se o campo produzido por uma casca elipsoidal prolata considerando todos os elementos de simetria necessários para a utilização da Lei de Gauss. A fim de confirmar o resultado obtido analisou-se o problema do ponto de vista da Lei de Coulomb (que é geral, desde que se conheça a posição das cargas) para o cálculo do campo.

O cálculo do campo produzido pela casca elipsoidal prolata ao longo do seu semieixo maior na Lei de Coulomb resultou em uma integral de difícil solução analítica, sendo necessário o recurso do cálculo número para resolvê-la. Conhecida a forma do campo do elipsoide comparou-se com o campo produzido por uma esfera de mesma quantidade de carga e verificou-se que o campo produzido pelo elipsoide prolato decai mais suavemente, possui módulo do campo maior em comparação com a esfera ao longo da direção escolhida, podendo sua geometria ser explorada em futuras aplicações.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 Introdução

Fenômenos elétricos (e magnéticos) vem sendo observados pela humanidade deste o tempo do antigo Egito quando utilizavam o peixe-elétrico na esperança de curar dores de cabeça. Outros povos do mediterrâneo e oriente médio já sabiam que ao atritar alguns materiais, estes eram capazes de atrair objetos de corpos pequenos, como palha, sementes, etc e um desses materiais, o âmbar, deu origem a palavra eletricidade, onde “elektron” em grego significa âmbar.

Por trás do fenômeno de eletrização (em geral) existe um conceito mais fundamental, o de carga elétrica, que ao se transferir de um corpo para outro causa um desbalanço entre as cargas positivas e negativas resultando em um corpo eletrizado. As interações entre as cargas elétricas ou interações coulombianas (nome devido ao cientista Charles Augustin de Coulomb que utilizando um pêndulo de torção mostrou a similaridade entre a força elétrica e a força gravitacional) assim como as interações gravitacionais, podem ser expressa em função do campo que as partículas geram no espaço, ou seja, região de influência de cada partícula, nos remetendo a ideia de ação a distância.

Um dos modos de encontrar o campo elétrico produzido por uma distribuição de cargas é utilizando a Lei de Gauss, que relaciona o fluxo elétrico que atravessa uma superfície fechada com a quantidade de carga elétrica existente dentro desse volume limitado por esta superfície. Porém sua aplicabilidade prática exige que as distribuições de cargas tenham elementos de simetria, de maneira que o fluxo atravesse essa superfície de forma homogênea e possamos obter em virtude dessa simetria o campo elétrico constante em todos os pontos da superfície, chamada gaussiana. Deste modo, inicialmente a Lei de Gauss, que é uma das quatro equações de Maxwell que proporcionaram praticamente toda a base para o avanço tecnológico do século XX, limita-se a distribuições com simetrias mais simples (esféricas, cilíndricas, etc.), pois normalmente são as que vemos durante os cursos graduação.

Este projeto tem como objetivo estudar sistemas de coordenadas ortogonais generalizadas não convencionais como as esferoidais, elipsoidais, toroidais, por exemplo, e adequá-las a problemas de simetrias não comumente vistas e obter assim através da Lei de Gauss o campo elétrico produzido por estas distribuições.

2 Revisão bibliográfica

Segundo a Lei de Gauss, carga elétrica gera campo elétrico e sabe-se que cargas em movimento geram corrente elétrica.

Se a Lei de Gauss é equivalente a Lei de Coulomb na eletrostática, por que não utilizá-la uma vez que ela simplifica o cálculo do campo elétrico? Para uma melhor resposta a esta pergunta, introduz-se o conceito de linhas de força a fim de levar a um entendimento mais claro no que se fundamenta a Lei de Gauss.

Linha de força ou linha de campo é uma representação criada para permitir à visualização de uma maneira mais concreta a forma de um campo elétrico, e apresenta algumas propriedades, em geral de caráter qualitativo, que as tornam bastante úteis, como a densidade de linhas, que é proporcional ao valor da carga, além de terem mesma direção e sentido do campo elétrico resultante em cada ponto do espaço.

Em um exemplo prático, para uma carga puntiforme, onde se pode interpretá-la como sendo uma esfera cujo raio é praticamente nulo, observa-se que o campo é central, ou seja, apresenta direção radial e é constante em todos os pontos do espaço a uma distancia r da carga. Portanto uma carga puntiforme apresenta simetria esférica, assim de maneira semelhante observando os elementos de simetria de uma distribuição de cargas podemos prever a forma de linhas de força. No caso de um plano uniformemente carregado, este possui simetria plana, ou para um fio infinito uniformemente carregado, que possui simetria cilíndrica em torno no eixo do fio.

Define-se o número de linhas de campo que atravessam uma superfície, como fluxo elétrico, e o fluxo resultante através de uma superfície fechada limitando um volume qualquer *V*, é dada pela integral de superfície.

$$\Phi_E = \oint \vec{E}.d\vec{A} \qquad \text{(definição de fluxo elétrico)} \qquad (1)$$

Analisando uma distribuição qualquer de carga envolta por uma superfície fechada, encontra-se que o fluxo elétrico do campo elétrico é proporcional a carga interna a superfície. A igualdade é obtida ao considerar as propriedades do meio, no caso do vácuo temos ε_0.

$$\Phi_E = \frac{Q_{dentro}}{\varepsilon_0} \qquad \text{(Fluxo elétrico)} \qquad (2)$$

A superfície que possui a mesma simetria da distribuição de cargas nela encerrada é denominada de superfície gaussiana, tal superfície permite explorar as próprias características da distribuição levando a obtenção do campo elétrico em questão de uma maneira simples e elegante. Essa é a ideia a ser abordada neste projeto.

Comparando a definição de fluxo elétrico com o fluxo resultante de uma carga pontual (o resultado é válido para demais cargas desde que estejam dentro da superfície gaussiana), obtemos uma dedução matemática para a Lei de Gauss.

$$\Phi_E = \oint \vec{E}.d\vec{A} = \frac{Q_{dentro}}{\varepsilon_0} \qquad (3)$$

Fundamentando teoricamente a ferramenta que sustenta esse trabalho.

3 Métodos utilizados

Como este projeto visa utilizar ferramentas mais sofisticadas de física-matemática para aplicações em uma gama maior de problemas envolvendo distribuições de cargas elétricas que tenham uma simetria não convencional, tornou-se necessário o estudo de assuntos referentes a sistemas de coordenadas generalizadas ortogonais, cônicas (elipses), elipsoides (prolato e oblato), sólidos de revolução (área e volume), transformação de coordenas.

Lembrando-se da Lei de Gauss, eq.(3), considerando a simetria do problema pode-se imaginar uma gaussiana de geometria semelhante à distribuição porém ajustada às linhas de campo, de modo que o campo elétrico tenha módulo constante em todos os pontos da superfície e mesma direção da normal à superfície (condição suficiente para utilização da Lei de Gauss), onde pode-se expressar este campo em função da carga dentro do volume limitado pela superfície, a constante de permissividade do meio invariante, inicialmente o vácuo e a área da superfície gaussiana. Por sua aparente simplicidade vê-se que uma grande utilidade da Lei de Gauss, é facilitar o cálculo do campo bastando apenas encontrar a área da superfície gaussiana. O intuito deste trabalho é apresentar distribuições não convencionais de cargas, ou seja, cujos elementos de simetria podem não estar bem definidos, impondo a necessidade de determina-los se estes existirem.

Partindo da escolha da distribuição de cargas, observa-se a simetria do campo elétrico envolvido analisando as linhas de forças, pois possuem mesma direção que o campo elétrico, para enfim escolher uma superfície que melhor represente o campo elétrico produzido pela distribuição. Desta forma, devido a simetria do problema, tem-se o módulo do campo elétrico constante em todos os pontos da superfície onde pode-se calcular o campo elétrico produzido pelo objeto carregado uniformemente através da Lei de Gauss bastando apenas encontrar a área da superfície gaussiana de mesma simetria da distribuição.

4 Resultados

A ideia inicial para resoluções de problemas envolvendo uma distribuição de cargas é analisar as linhas de campo e definir a partir deste ponto qual a simetria envolvida.

O problema proposto inicialmente foi analisar o comportamento do campo elétrico produzido por um fio uniformemente carregado, sendo esse fio finito, utilizando a Lei de Gauss, ou seja, explorando a aparente simetria que a distribuição apresenta. Como se trata de um fio finito não apenas temos as contribuições das laterais para o campo, mas também devem ser consideradas que as bordas são fontes de campo, não sendo válida para este caso que a distribuição apresente uma simetria cilíndrica, pois foi visto, a Lei de Gauss considera cargas internas a superfície gaussiana e um cilindro não se adequa ao caso.

Partindo do fato que todas as partes do fio são fontes de campo elétrico, uma superfície que aparentemente representa essa simetria seria um elipsoide, portanto toda a análise do campo elétrico produzido pelo fio finito será a partir desta hipótese de simetria, sendo está verificada somente quando comparada com o resultado a partir da Lei de Coulomb.

A representação ilustrativa de um elipsoide comumente vista é de aproximadamente uma bola de futebol americano, onde nenhum comprimento de seus semieixos são iguais, porém se dois dos seus semieixos são iguais, o elipsoide é dito de revolução, pois ao se rotacionar uma elipse por exemplo em torno do seu semieixo maior obtêm-se um elipsoide prolato, ou esferoide prolato e se assemelha a um charuto dependendo da forma da elipse. Ao rotacionar a elipse em torno de seu semieixo menor, obter-se-á um elipsoide oblato, ou esferoide oblato que por ter um formato semelhante ao planeta Terra é normalmente usado nas áreas de cartografia como sistemas de referencias para descrever posições de objetos com relação à superfície da Terra.

Dentro da perspectiva da distribuição de cargas proposta neste trabalho, um fio finito uniformemente carregado, viu-se por uma simples análise dos tipos de elipsoides o que possui maior grau de simetria para com a distribuição é o elipsoide prolato. Com a definição do tipo de elipsoide estabelecida é possível encontrar a área da superfície em questão e a partir desta informação calcular o campo elétrico produzido pela mesma.

Para o cálculo da área de um elipsoide prolato fez-se a consideração do fato de ser oriunda da rotação de meia elipse em torno do seu semieixo maior, possibilitando assim utilizar uma maneira alternativa para o cálculo áreas, as chamadas áreas de superfícies de revolução, dada pela equação

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \left|\frac{d\vec{r}}{dx}\right| dx \qquad (4)$$

Sendo a equação da elipse dada pela equação (5), pode-se obter sua forma funcional isolando-se uma de suas variáveis e a partir desta calcular sua derivada (equação (7)) e expressar a equação da área de superfície de revolução em função da excentricidade da elipse (equação (9)). Como a distribuição apresenta simetria elipsoidal prolatada, deve-se rotacioná-la em torno do eixo x a fim de obter uma superfície que apresente as mesmas propriedades da distribuição, uma vez que se tem $a > b$ como segue

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (5)$$

Isolando-se y

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \qquad (6)$$

Pode-se obter a variação de y em função de x

$$y' = \frac{-b^2}{a^2}\frac{x}{y} \qquad (7)$$

E o módulo da variação do vetor posição em relação a x

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dx}\right| = \sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{\frac{a^2 - \epsilon^2 x^2}{(a^2 - x^2)}} \qquad (8)$$

Substituindo as equações (8) e (6) em (4), obtêm-se

$$A = 2\pi \int_{-a}^{a} \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\sqrt{\frac{a^2 - \epsilon^2 x^2}{(a^2 - x^2)}}\,dx \qquad (9)$$

Assim

$$A = 4\pi ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos\theta\, \sqrt{1 - \epsilon^2 sen^2\theta}\, d\theta \qquad (10)$$

A resolução da integral contida na equação (10) dar-se-á através de uma expansão binomial, haja visto que o produto no radicando é muito menor que 1, ou seja, o resultado da integral não é fechada de maneira que a área do elipsoide também não será.

$$A \approx 4\pi ab\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos\theta d\theta - \frac{\epsilon^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos\theta sen^2\theta d\theta - \frac{\epsilon^4}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos\theta sen^4\theta d\theta - \cdots\right] \qquad (11)$$

Desta forma

$$A \approx 4\pi ab\left(1 - \frac{\epsilon^2}{6} - \frac{\epsilon^4}{40} - \cdots\right) \qquad (12)$$

Este é o valor aproximado para a área do elipsoide prolato e a partir dele pode-se calcular o valor do campo elétrico produzido por uma fina casca elipsoidal prolata carregada com carga total Q utilizando a Lei de Gauss. Analisando a simetria envolvida no problema, a escolha de uma superfície gaussiana adequada de maneira a explorar todos os elementos de simetria é de um elipsoide prolato, onde o campo elétrico é dado por:

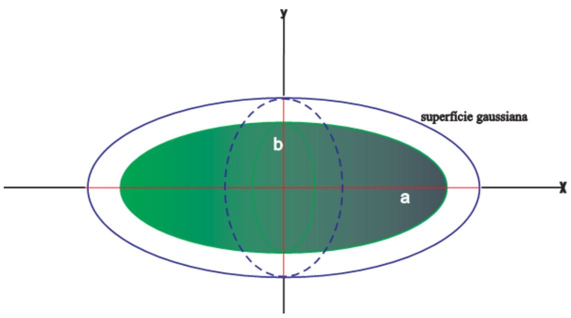

Figura 1: superfície gaussiana para uma casca elipsoidal prolata.

$$\Phi_E = \oint \vec{E}.d\vec{A} = \frac{Q_{dentro}}{\varepsilon_0} \quad (13)$$

Para a superfície gaussiana encontrada anteriormente, tem-se

$$EA = \frac{Q_{dentro}}{\varepsilon_0} \quad (14)$$

Substituindo a equação (12) em (14), fica

$$E4\pi ab\left(1 - \frac{\epsilon^2}{6} - \frac{\epsilon^4}{40} - \cdots\right) = \frac{Q_{dentro}}{\varepsilon_0} \quad (15)$$

Resultando em

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\ \frac{Q_{dentro}}{ab\left(1 - \frac{\epsilon^2}{6} - \frac{\epsilon^4}{40} - \cdots\right)} \quad (16)$$

A equação (16) é o campo elétrico produzido pela fina casca elipsoidal prolata, onde pode-se perceber que se a excentricidade é nula, ou seja, no caso de uma esfera, o resultado se mostra idêntico ao caso de uma fina casca esférica de carga Q, pois a e b são os semieixos da gaussiana e não do elipsoide original que gera o campo.

Como devemos comparar o resultado dado pela equação (16) com o campo produzido pelo fio finito (17), escolhemos um ponto ao longo do eixo do fio que será usado como ponto de comparação, ou seja, o valor de ambos (elipsoide e fio) deverá ser igual neste ponto. O campo encontrado utilizando a Lei de Coulomb para um fio de comprimento L é dado por:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\frac{L}{(4x^2+L^2)}\hat{\imath} \quad (17)$$

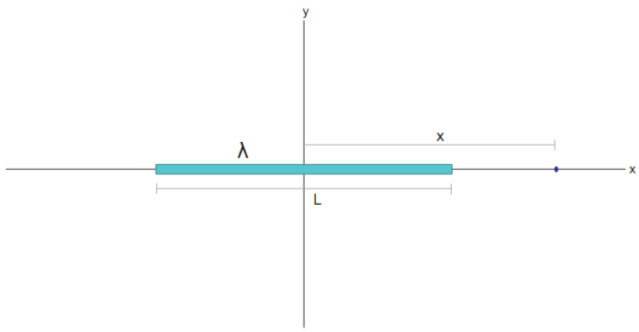

Figura 2: campo elétrico produzido por um fio finito em um ponto ao longo do eixo x.

Atribuindo-se um valor para x, obteve-se o resultado do campo para o fio finito onde foi constatado que para o valor do campo gerado pela casca elipsoidal no mesmo ponto (x) encontra-se que o elipsoide deva ter excentricidade negativa, algo que não condiz com a realidade, tornando necessária a análise por Lei de Coulomb.

Fazendo a análise do problema por Lei de Coulomb tem-se que adotado como sistema de posicionamento as coordenadas esferoidais prolatas, sua parametrização é dada por:

$$x = c.\cosh(u)\cos(v) \qquad 0 \leq u \leq \infty$$

$$y = c.senh(u)sen(v)\cos(\varphi) \qquad 0 \leq v \leq \pi$$

$$z = c.senh(u)sen(v)sen(\varphi) \qquad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

É possível observar que estas satisfazem a equação de um elipsoide prolato, uma vez que:

$$\frac{x^2}{c^2.cosh^2(u)} + \frac{(y^2 + z^2)}{c^2.senh^2(u)} = cos^2(v) + sen^2(v) = 1 \qquad (18)$$

Sendo $\mathrm{a} = \mathrm{c.cosh(u)}, \mathrm{b} = \mathrm{c.senh(u)}\ e\ u = \mathrm{arctgh}\left(\frac{b}{a}\right)$.

Através da Lei de Coulomb, pode-se calcular a soma dos campos produzidos por cada elemento infinitesimal de superfície com densidade constante do elipsoide em um ponto na mesma direção de seu semieixo maior, neste caso o eixo x. Desta forma o campo do elipsoide é dado pela seguinte equação

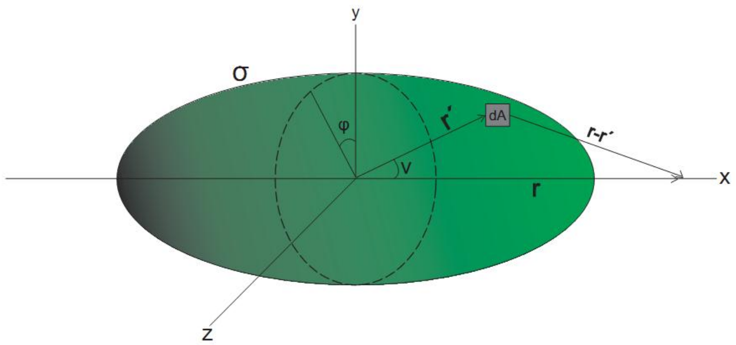

Figura 3: campo elétrico elipsoide em coordenadas elipsoidais prolatas utilizando Lei de Coulomb.

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} h_v\, h_\varphi \frac{(\vec{r}-\vec{r\prime})}{|\vec{r}-\vec{r\prime}|^3} dvd\varphi \qquad (19)$$

Onde os “h’s” são denominados fatores de escala e nos representa a maneira como se da a métrica em um sistema de coordenadas. Para o sistema de coordenadas esferoidal prolato, tem-se que os fatores de escala são dados por:

$$h_v = c.\sqrt{senh^2(u) + sen^2(v)}$$
$$h_\varphi = c.senh(u)sen(v)$$

Lembrando que:

$$dA = h_v h_\varphi dv d\varphi, \vec{r} = x\hat{\imath},$$

$$\overrightarrow{r'} = c.\cosh(u)\cos(v)\,\hat{\imath} + c.senh(u)sen(v)\cos(\varphi)\,\hat{\jmath} + c.senh(u)sen(v)sen(\varphi)\hat{k}$$

Substituindo esses valores na equação (19) e realizando algumas simplificações, é possível encontrar que o campo é dado pela integral

$$\vec{E} = \frac{\sigma.c^2}{2\varepsilon_0}\left[senh(u)\int_0^\pi \frac{\sqrt{senh^2(u)+sen^2(v)}.sen(v).(x-c.\cosh(u)\cos(v))}{(x^2-2xc.\cosh(u)\cos(v)+c^2.cosh^2(u)-c^2.sen^2(v))^{\frac{3}{2}}}dv\right]\hat{\imath} \qquad (20)$$

Cuja solução somente pode ser encontrada por meio de cálculo numérico, escolheu-se para isto o método da quadratura para resoluções de integrais numéricas, porém sua explicação foge do escopo deste trabalho.

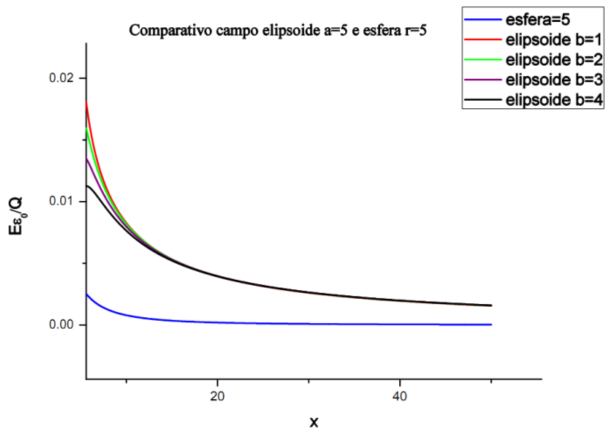

Figura 4: gráfico comparativo campo elétrico produzido por elipsoides prolatos e esfera de mesma carga.

O gráfico acima é o resultado da comparação do comportamento do campo elétrico produzido por elipsoides de mesmo semieixo maior, com uma esfera de raio idêntico ao semieixo maior do elipsoide, conforme visto nas conclusões.

5 Conclusão

Um trabalho envolvendo conceitos relativamente simples como a Lei de Gauss é de fácil assimilação quando trata-se de problemas cuja simetria já está bem definida como no caso da esfera, porém quando as distribuições de cargas não são convencionais requer-se um estudo sobre coordenadas generalizadas ortogonais, pois tratando de geometrias não comumente vistas nos cursos de graduação e necessitando encontrar superfícies com alto grau de simetria para a utilização da Lei de Gauss, percebeu-se ser uma ferramenta indispensável neste trabalho, assim como todo o embasamento teórico sobre campos elétricos, fundamentando este projeto.

Com relação aos resultados obtidos, verificou-se que a adesão de uma superfície elipsoidal não se adequa ao problema envolvendo um fio finito, devido sua simetria ser muito especifica, entretanto mostrou-se interessante a análise qualitativa do campo da superfície elipsoidal como continuação do projeto.

Mantendo uma carga fixa, a comparação do campo elétrico produzido pelos elipsoides com a esfera revelou-se condizente com o esperado teoricamente, uma vez que o campo elétrico do elipsoide esteja tendendo para o da esfera na medida que o semieixo menor tenda ao maior, onde o valor mais alto do campo para um elipsoide é totalmente justificado ao fato de que possuindo uma carga fixa em ambos e distribuindo-se em áreas menores, ocorra um fluxo maior e portanto um campo maior.

Este projeto de iniciação cientifica cumpriu com sua proposta de apresentar métodos matemáticos mais sofisticados para resoluções de campos elétricos envolvendo simetrias não convencionais além de sugerir possíveis aplicações da geometria estudada, o elipsoide prolato.

6 Referências bibliográficas

MACHADO, Kleber Daum. Teoria do eletromagnetismo. 1.ed. Ponta Grossa: UEPG, 2000. V.1.

TIPLER, Paul A; MOSCA, Gene. Física para cientistas e engenheiro. 6.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009. V.2.

NUSSENZVEIG, Herch Moysés. Curso de Física básica. 1.ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1997. V.3.

STEWART, James. Cálculo. 5.ed. São Paulo: Thomson Learning, 2007. V.2.

FEYNMAN, Richard P; LEIGHTON, Robert B; SANDS, Matthew. Edição definitiva. Porto Alegre: Bookman, 2008. V.2.

7 Cronograma executado

Nº	Descrição	Ago 2010	Set	Out	Nov	Dez	Jan 2011	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul
	Estudo de sistemas de coordenadas ortogonais generalizadas.	x	x	x									
	Análise de problemas com transformações de coordenadas ortogonais.				x	x	x						
	Cursar a disciplina Física-Matematica I (Bacharelado em Física).	x	x	x	x								
	Estudo aprofundado da lei de Gauss do Eletromagnetismo.							x					
	Aplicação em distribuições de cargas elétricas com essas simetrias não-convencionais.								x	x	x	x	
	Cursar a disciplina Física-Matematica II (Bacharelado em Física).								x	x	x	x	
	- - Elaboração do Resumo e Relatório Final (atividade obrigatória) - Preparação da Apresentação Final para o Congresso (atividade obrigatória)												X

Figura 5: cronograma executado