UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
DEPARTAMENTO DE APOIO À PESQUISA
PROGRAMA INSTITUCIONAL DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA

FUNDAMENTOS TEÓRICOS EM BIOMATEMÁTICA - Aplicação em Modelos Contínuos.

Bolsista: Tiago Silva da Silva - FAPEAM

Manaus
2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
DEPARTAMENTO DE APOIO À PESQUISA
PROGRAMA INSTITUCIONAL DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA

RELATÓRIO FINAL
PIBIC - E/0041/2012-2013
FUNDAMENTOS TEÓRICOS EM BIOMATEMÁTICA - Aplicação em Modelos Contínuos.
Método de Liapunov Para Análise de Estabilidade de Sistemas Não-lineares no Contexto da Biomatemática.

Bolsista: Tiago Silva da Silva - FAPEAM

Orientador: Profª Karla Christina Tribuzy Bandeira

Manaus
2013

Sumário

Introdução

Os modelos bimatemáticos contínuos são representações matemáticas que sintetizam através de equações diferenciais as diversas hipóteses advindas do estudo quantitativo e qualitativo dos sistemas biológicos contínuos. Desta maneira é importante o conhecimento matemático que está diretamente relacionado às propriedades qualitativas desses sistemas.

Uma das propriedades qualitativas dos sistemas biológicos contínuos é o estado de estabilidade quando estes encontram-se próximos ao equilíbrio e de alguma maneira sofrem pequenas pertubações. Esta questão pode ser analisada através do método de Liapunov.

Alexander M. Liapunov (1857-1918), foi um aluno de Chebyshev em São Petersburgo e ensinou na Universidade de Kharkov de 1885 a 1901, quando se tornou acadêmico em matemática aplicada na Academia de Ciências de São Petersburgo. Sua pesquisa em estabilidade incluiu tanto a análise teórica quanto aplicações a diversos problemas físicos.

Liapunov e outros pesquisadores, propuseram dois resultados de suma importância para a análise de estabilidade de sistemas dinâmicos. O primeiro resultado, chamado de método indireto, consiste na linearização do sistema em torno dos seus pontos de equilíbrio e análise local da estabilidade dos mesmos. Apesar de contribuir para o entendimento do comportamento dinâmico do sistema, esse método é restritivo e investiga apenas informações locais a respeito dos sistemas. O segundo método, chamado de método direto, está inserido no trabalho mais fluente de Liapunov, General Problem of Stability of Motion (Problema Geral de Estabilidade do Movimento), publicado em 1892. O método direto consiste na investigação de uma função escalar que descreva a configuração do sistema em torno de um determinado ponto de equilíbrio.

Ainda não menos importante é investigar a existência de ciclos estáveis nos sistemas biológicos contínuos, chamados ciclos limites. Isto é feito à luz da teoria qualitativa de Poincaré-Bendixon.

Neste trabalho será desenvolvida a teoria necessária para entender, do ponto de vista matemático, a dinâmica de sistemas biológicos contínuos. Além disso, este trabalho propôe-se a investigar a estabilidade dos pontos de equilíbrio e a existência de ciclos limites para os sistemas presa-predador.

Objetivos

Este trabalho tem por objetivo o estudo da teoria matemática necessária a modelagem de fenômenos biológicos expressos por sistemas não lineares contínuos. Analisamos a estabilidade e linearização local destes sistemas através do método de Liapunov. Assim como, aplicamos o método na solução de modelos de dinâmica populacional do tipo presa-predador.

Capítulo 1

Fundamentação Teórica

Neste capítulo serão definidos os conceitos necessários para o entendimento do método de Liapunov, assim como as proposições inerentes.

1.1 Campos Vetoriais

Nesta seção serão enunciadas algumas definições preliminares importantes que serão posteriormente usadas ao longo do texto.

Definição 1.1.1 (Campo Vetorial) Um campo vetorial é uma aplicação $f : U \to \mathbb{R}^n$, definida e contínua num aberto $U \subseteq \mathbb{R}^n$.

Definição 1.1.2 (Equação Diferencial Autônoma) Dado o campo vetorial $f : U \to \mathbb{R}^n$, dizemos que

$$x' = f(x)$$

é a equação diferencial autônoma definida pelo campo vetorial f.

Com essas definições podemos observar que em cada ponto de seu domínio o campo determina um vetor tangente a uma curva solução da equação diferencial autônoma. Desta maneira, podemos representar o campo por um número suficiente de vetores tangentes, refletindo dessa forma a direção do campo vetorial. Esse conjunto de vetores pelo qual podemos representar um campo vetorial é chamado de campo direcional.

Exemplo 1.1.1 (Campos Lineares)

Consideremos a equação diferencial autônoma $x' = Ax$, determinada pelo campo linear $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = Ax$ onde $A \in M(n)$ é uma matriz invertível.

Dependendo dos autovalores dessa matriz, podemos ter diferentes tipos de comportamento dinâmico do campo direcional do campo linear: sela, foco, espiral ou centro.

No caso particular em que $n = 2$, teremos:

1. Autovalores reais :

   1.a) Sela: autovalores de sinais diferentes.

   1.b) Foco instável: ambos autovalores positivos.

   1.c) Foco estável: ambos autovalores negativos.

Podemos observar o comportamento do campo direcional desses três casos através da figura 1.1.

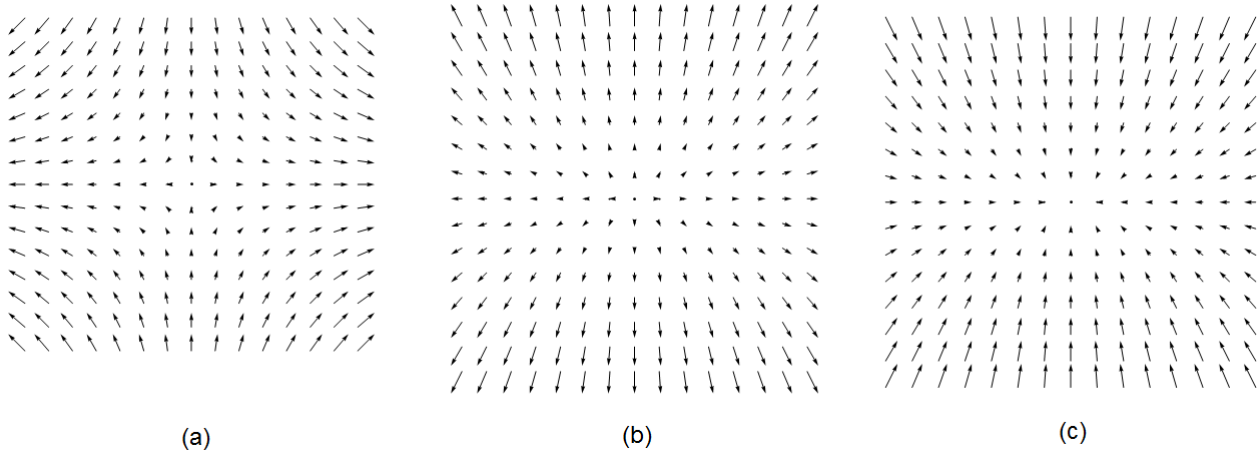

Figura 1.1: (a) Sela; (b) foco instável; e (c) foco estável.

2. Autovalores complexos conjugados:

   2.a) Espiral estável: autovalores com parte real positiva.

   2.b) Espiral instável: autovalores com parte real negativa.

   2.c) Centro: Autovalores com parte real nula.

   Podemos observar o comportamento do campo direcional desses três casos através da figura 1.2.

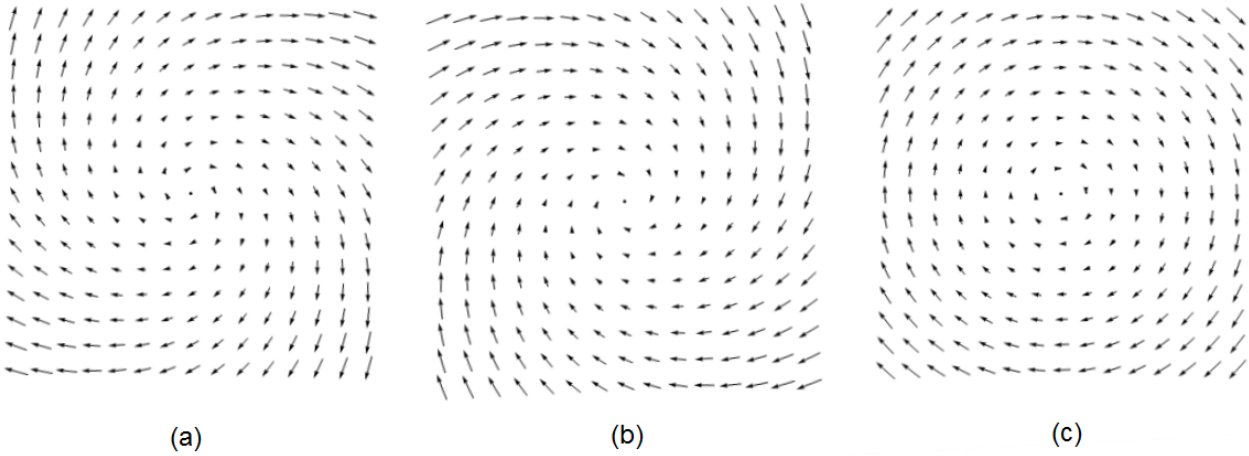

Figura 1.2: (a) Espiral instável; (b) espiral estável; e (c) centro.

Para contrastar com o comportamento dinâmico dos campos lineares apresentaremos no próximo exemplo o camportamento dinânmico de alguns campos não-lineares.

Exemplo 1.1.2 (Campos não-lineares) Consideremos a equação diferencial autônoma $x' = f(x)$, determinada pelo campo $f : U \to \mathbb{R}^n$ no aberto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ onde $f(x)$ é uma

relação não linear. Em particular para $n = 2$ e $U \subseteq \mathbb{R}^2$, os campos não-lineares planares apresentam um comportamento dinâmico mais rico e complexo em relação aos campo lineares planares. Exibiremos abaixo alguns desses campos:

Campo 1: $f : (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (\sin x, \cos y)$.

Campo 2: $f : (-1, 2) \times (-1, 1) \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (-2x(x-1)(2x-1), -2y)$.

Campo 3: $f : (-30, 30) \times (-30, 30) \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (-2x - y^2, -y - x^2)$.

Podemos observar o comportamento do campo direcional desses três casos através da figura 1.3.

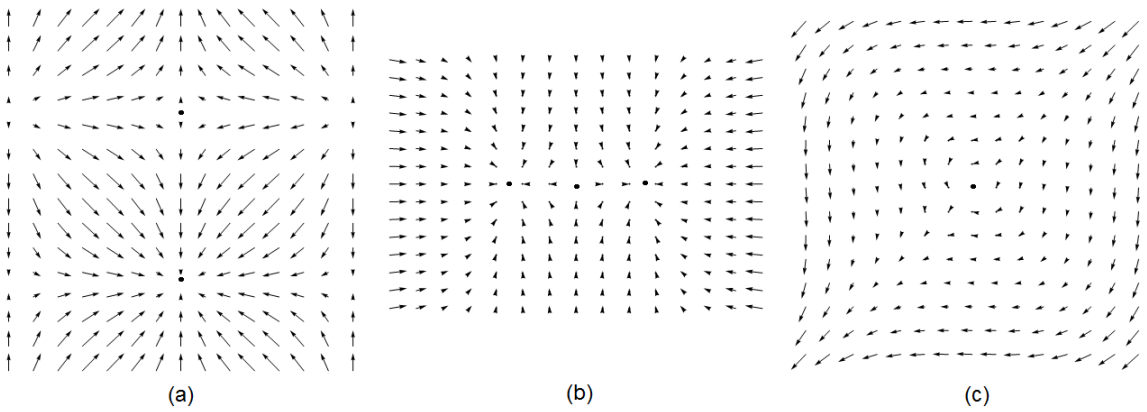

Figura 1.3: (a) Campo 1; (b) campo 2; e (c) campo 3.

Com esses exemplos podemos notar algumas diferenças importantes entre o comportamento dinâmico de campos lineares e não-lineares. Essas diferenças vão ser elucidadas mais posteriormente, no entanto podemos observar que nos campos não-lineares tratados existem pontos em torno dos quais, em escala local, o sistema se comporta aproximadamente como um campo linear. Além disso, podemos notar a existência de múltiplos pontos desta natureza nesses campos, não ocorrendo o mesmo em campos lineares.

Neste trabalho estudaremos propriedades importantes inerentes a campos vetoriais não-lineares, e para tal, é necessário estabelecer as definições e resultados essenciais para ententer a dinâmica desses campos.

Definição 1.1.3 (Solução) Dado o campo vetorial $f : U \to \mathbb{R}^n$, dizemos que uma solução para a equação diferencial autônoma $x' = f(x)$ é um caminho $x : I \to \mathbb{R}^n$, definido e derivável num intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, tal que para cada $t \in I$:

1. $x(t) \in U$; e

2. $x'(t) = f(x(t))$

Definição 1.1.4 (Problema de Valor Inicial - PVI) Dados uma solução $x : I \to \mathbb{R}^n$ da equação diferencial $x' = f(x)$, definida pelo campo vetorial $f : U \to \mathbb{R}^n$, e um ponto inicial $x_0 \in U$. Se $t_0 \in I$ e também $x(t_0) = x_0$, dizemos que essa solução satisfaz o problema de valor inicial

$$x' = f(x), x(t_0) = x_0.$$

Exemplo 1.1.3 Seja $(x', y') = f(x, y)$ a equação diferencial definida pelo campo vetorial $f : (0, 6) \times (0, 6) \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (0.9x - 0.8xy, -0.4y + 0.8xy)$. Resolvendo o P.V.I.

$$(x', y') = f(x, y),\ (x(0), y(0)) = (3, 3),$$

encontraremos uma curva, que projetada sobre o plano xy, pode ser visualizada junto com campo direcional na figura 1.4:

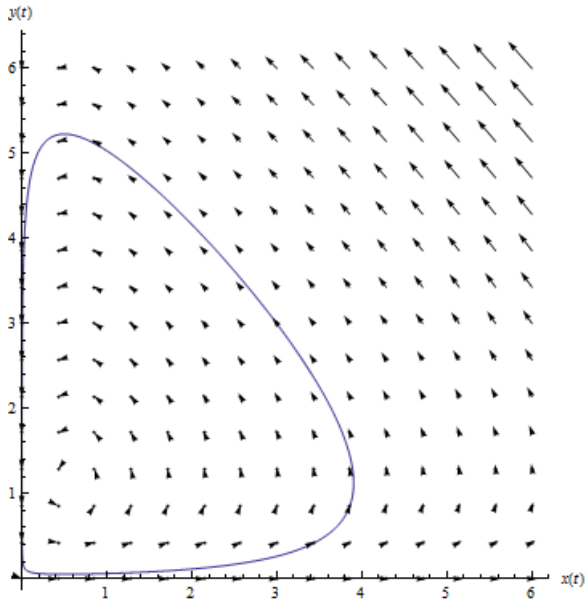

Figura 1.4: Curva solução.

Este exemplo é um caso particular que veremos nas aplicações. Trata-se do modelo clássico presa-predador, proposto por Lotka-Volterra.

A solução de um determinado problema de valor inicial pode ser trivial ou regular, nunca podendo ser os dois ao mesmo tempo se a equação diferencial autônoma for definida por um campo vetorial de classe C^1. Este fato é garantido pelo teorema da existência e unicidade exposto mais adiante.

Dado o campo vetorial $f : U \to \mathbb{R}^n$, se $f(x_0) = 0$, para algum $x_0 \in U$, dizemos que o caminho $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ definido por $x(t) = x_0$, para todo $t \in \mathbb{R}$, é solução trivial de

$x' = f(x)$. Por outro lado, uma solução $x : I \to \mathbb{R}^n$ de $x' = f(x)$ é regular se $f(x(t)) \neq 0$ para todo $t \in I$.

A existência de solução para um determinado P.V.I. é garantida pela continuidade do campo vetorial, no entanto, para garantir a unicidade dessa solução, somente a continuidade do campo vetorial não é condição suficiente.

O teorema abaixo expõe a condição necessária e suficiente para a existência e unicidade local da solução de um determinado problema de valor inicial.

Teorema 1.1.1 (Existência e Unicidade) Se o campo $f : E \to \mathbb{R}^n$ é de classe C^1 no aberto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ então, dados $t_0 \in \mathbb{R}$ e $x_0 \in E$ quaisquer, existe uma única solução do problema de valor inicial $x' = f(x)$, $x(t_0) = x_0$, definida num intervalo aberto $(t_0 - \alpha, t_0 - \alpha)$, para certo $\alpha = \alpha(t_0, x_0) > 0$.

Para a demonstração deste teorema veja [2] e [5].

Exemplo 1.1.4 Considere o campo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^{2/3}$. Resolvendo o P.V.I.

$$x' = f(x),\ x(0) = 0,$$

Encontraremos dois caminhos soluções distintos passando por $x(0) = 0$:

1. A função idendicamente nula $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x(t) = 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$; e
2. A função polinomial $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x(t) = t^3$.

Além dessas soluções existem infinitas soluções passando pelo eixo das abscissas.

Podemos visualizar isso na figura 1.5:

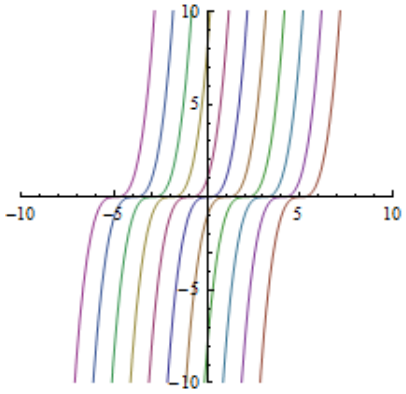

Figura 1.5: Curvas soluções.

O problema desse campo é que é somente contínuo, condição suficiente apenas para a existência de soluções.

Esse exemplo motiva alguns casos que não podem acontecer num campo de classe C^1:

1. Duas soluções distintas da equação diferencial definida pelo campo vetorial considerado não podem se crusar transversalmente, pois então teríamos duas velocidades distintitas nesse ponto de interseção, comprometendo a continuidade do campo. Podemos observar esse fato na figura 1.6.

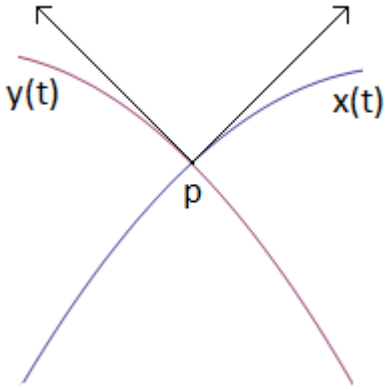

Figura 1.6: Ponto de interseção transversal.

2. Duas soluções não podem ter um ponto de interseção tangencial, por contrariar a unicidade de soluções com a mesma condição inicial e portanto a continuidade da aplicação derivada do campo vetorial. Podemos observar esse fato na figura 1.7.

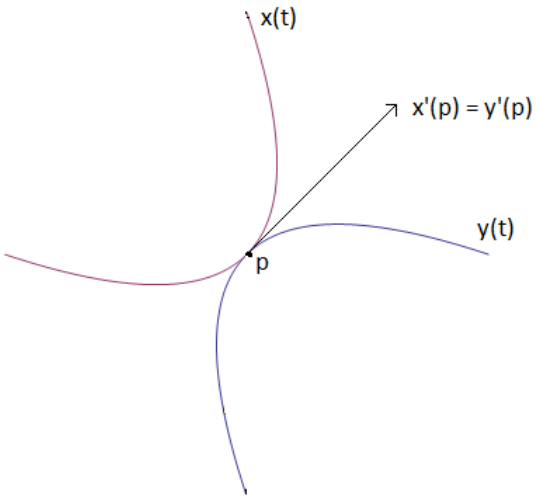

Figura 1.7: Ponto tangencial.

Daqui em diante, a menos de menção explícita ao contrário, sempre $f : U \to \mathbb{R}^n$ é um campo vetorial de classe C^1 definido no aberto $U \subseteq \mathbb{R}^n$.

Definição 1.1.5 (Intervalo Máximo) Dizemos que I é um intervalo máximo da solução de $x' = f(x)$ por x_0 se, dada qualquer solução $x : J \to \mathbb{R}^n$ de $x' = f(x)$ com $x(0) = x_0$, temos $J \subseteq I$.

Escrevemos $I(x_0)$ para denotar o intervalo máximo da solução de $x' = f(x)$ por x_0. Dentre as propriedades de um intervalo máximo podemos destacar que:

1. Ele é único e que nele está definida uma única solução.
2. Sempre contém a origem.
3. É um conjunto aberto, pois o domínio do campo é aberto.

A solução de $x' = f(x)$ por x_0, definida no intervalo máximo $I(x_0)$, é chamada de solução máxima de $x' = f(x)$, $x_0 = 0$, ou ainda, a trajetória de f por x_0.

Em campos não-lineares, contrastando com os campos lineares, as soluções da equação diferencial determinada pelo campo nem sempre estão definidas em todo $\mathbb{R}$, isso porque as soluções no domínio do campo tende ao infinito de $\mathbb{R}^n$, ou á fronteira do domínio do campo. Podemos ilustrar isso através dos exemplos abaixo:

Exemplo 1.1.5 Dado o campo $f(x) = 1 + x^2$ em $\mathbb{R}$, podemos verificar que $x(t) = tg(t)$ é a única solução de $x' = f(x)$ com $x(0) = 0$ definida em $I(0) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \neq \mathbb{R}$. Neste caso temos que a solução não está definida em toda a reta. Podemos notar também, através da figura 1.8, que essa solução tende ao infinito de $\mathbb{R}$.

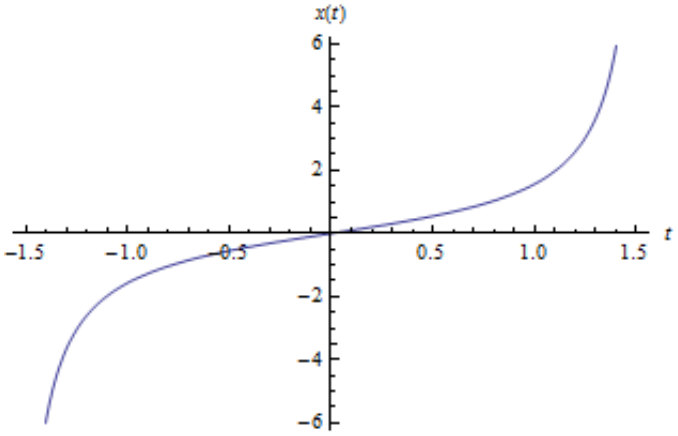

Figura 1.8: Curva solução.

Exemplo 1.1.6 Dado o campo $f(x) = \frac{1}{2x}$ em $(0, +\infty)$, podemos verificar que $x(t) = \sqrt{t+1}$ é a única solução de $x' = f(x)$ com $x(0) = 1$ definida em $I(0) = (-1, +\infty) \neq \mathbb{R}$. Neste caso também a solução não está definida em toda a reta. Podemos notar também, através da figura 1.9, que essa solução tende à fronteira de $(0, +\infty)$.

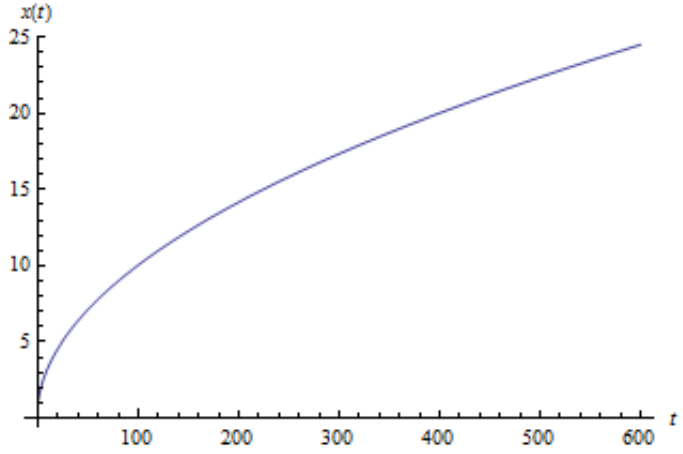

Figura 1.9: Curva solução.

Esses fatos dicutidos acima significam que qualquer trajetória do campo sai de qualquer subconjunto compacto do seu domínio. O resultado a seguir é uma consequência dessa afirmação.

Proposição 1.1.1 Se o campo f tem domínio $\mathbb{R}^n$ e se $x : I \to \mathbb{R}^n$ é uma trajetória de f tal que $|x(t)|$ é limitada para todo $t \in I$, então $I = \mathbb{R}$.

Para demonstração desta proposição veja [5].

Definiremos agora o fluxo no tempo e o fluxo global.

Definição 1.1.6 (Fluxo no Tempo) Se existir algum $t_0 \in \mathbb{R}$, tal que $t_0 \in I(x_0)$ para cada $x_0 \in U$, dizemos que o fluxo no tempo t_0, associado ao campo f em U é a aplicação $\phi_{t_0} : U \to \mathbb{R}^n$ definida da seguinte maneira: para cada $x_0 \in U$, temos $\phi_{t_0}(x_0) = x(t_0)$, onde $x : I(x_0) \to \mathbb{R}^n$ é a trajetória de f por $x(0) = x_0$.

Como $0 \in I(x_0)$ para cada $x_0 \in U$, temos que o fluxo no tempo $t_0 = 0$ associado ao campo vetorial $f : U \to \mathbb{R}^n$ existe e é definido da seguinte maneira: $\phi_0(x_0) = x(0) = x_0$, onde $x : I(x_0) \to \mathbb{R}^n$ é a trajetória de f por $x(0) = x_0$. Ou seja, o fluxo no tempo $t_0 = 0$ é a aplicação identidade em U: $\phi_0 : U \to U$, $\phi_0(x) = x$.

Definição 1.1.7 (Fluxo global) O fluxo global associado ao campo vetorial $f : U \to \mathbb{R}^n$ é a aplicação $\phi : \Omega \to \mathbb{R}^n$, onde $\Omega = \{(t, x_0) \in \mathbb{R} \times U; x_0 \in U, t \in I(x_0)\}$ definida da seguinte forma : $\phi(t, x_0) = x(t_0)$, onde $x : I(x_0) \to \mathbb{R}^n$ é a trajetória de f por $x(0) = x_0$.

Com essas definições podemos perceber que fixando t_0, tal que $t_0 \in I(x_0)$ para cada $x_0 \in U$, o fluxo no tempo t_0, associado ao campo vetorial $f : U \to \mathbb{R}^n$, dá a posição de cada solução em função da condição inicial x_0, depois de decorrido o tempo t_0. Já o fluxo global nos dá uma informação global do comportamento de todas as trajetórias do campo vetorial considerado.

Outro fato que podemos perceber é que se para cada $x_0 \in U$ tivermos o mesmo intervalo máximo $I(x_0) = I$, então $\phi(t, x_0) = \phi_t(x_0) = x(t_0)$ para cada $t_0 \in I$, onde $x : I \to \mathbb{R}^n$ é a trajetória de f por $x(0) = x_0$.

Exemplo 1.1.7 (Fluxo de um campo linear) Consideremos o campo linear $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dado por $f(x) = Ax$, onde $A \in M(n)$.

O fluxo global de A é a aplicação $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\phi(t, x) = e^{tA}x$, onde $e^{tA} \in M(n)$ é a matriz exponencial de A. Como as soluções da equação diferencial $x' = Ax$ estão definidas em $\mathbb{R}$, temos que para todo $t \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^n$, $\phi(t, x) = \phi_t(x)$.

Os resultados seguintes resumem algumas propriedades inerentes ao fluxo global.

Proposição 1.1.2 Se $\phi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ é o fluxo de um campo vetorial $f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1, então

$$\phi(t, \phi(s, x)) = \phi(t + s, x)$$

para quaisquer $s, t \in \mathbb{R}$ e $x \in U$ tais que $s, t + s \in I(x)$.

Para demonstração desta preposição consulte [5], [2] e [4]

Teorema 1.1.2 O domínio $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times U$ do fluxo global $\phi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ de um campo vetorial $f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^k, com $1 \leq k \leq +\infty$, é um aberto e o fluxo global ϕ é uma aplicação de mesma classe C^k em Ω.

Para demonstração deste teorema veja [5].

Para o entendimento da dinâmica de um campo vetorial devemos estudar e analisar dois tipos especiais de trajetórias do mesmo: as trajetórias singulares (soluções triviais) e as trajetórias periódicas.

Definição 1.1.8 (Singularidade) Dado um campo vetorial $f : U \to \mathbb{R}^n$, dizemos que $\bar{x} \in E$ é uma singularidade ou um ponto de equilíbrio de f se $f(\bar{x}) = 0 \in \mathbb{R}^n$.

Neste caso, uma singularidade é uma solução do sistema que permanece constante ao longo do tempo. Para encontrar as singlariades de um sistema basta resolver a equação $x' = f(x) = 0$.

A trajetória por um ponto de equilíbro é chamada de trajetória singular ou trivial.

Exemplo 1.1.8 (Isóclinas) Consideremos o campo vetorial $f : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}^2_+$ definido por $f(x, y) = (xf_1(x, y), yf_2(x, y))$, onde $f_1 : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}^2_+$ e $f_2 : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}^2_+$ são aplicações de classe C^1. Esse campo define a equação diferencial $(x', y') = (xf_1(x, y), yf_2(x, y))$.

Para encontrar-mos os pontos de equilíbrio desse campo devemos estudar as seguintes equações:

1. $x' = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $f_1(x, y) = 0$.
2. $y' = 0 \Rightarrow y = 0$ ou $f_2(x, y) = 0$

As curvas descritas por essas equações são chamadas respectivamente de x - isóclina e y - isóclina.

Os pontos de equilíbrio são os pontos de interseção entre essas curvas.

Para ilustrar esse fato consideremos o campo $f : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}^2_+$ definido por

$$f(x, y) = (x[0.2(1 - x/5) - 0.1y], y(-0.2 + 0.1x)).$$

Calculando as isóclinas da quação $(x', y') = (x[0.2(1 - x/5) - 0.1y], y(-0.2 + 0.1x))$ encontraremos:

1. x - isóclinas: $x' = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $y = \dfrac{0.2}{0.1}\left(1 - \dfrac{x}{5}\right)$.
2. y - isóclinas: $y' = 0 \Rightarrow y = 0$ ou $x = \dfrac{0.2}{0.1}$

Fazendo a interseção das x - isóclinas com as y - isóclinas, encontraremos portanto os pontos de equilíbrio:

$$P_1 = (0, 0),\ P_2 = (5, 0) \text{ e } P_3 = (1, 1.2).$$

Podemos verificar isso na figura 1.10:

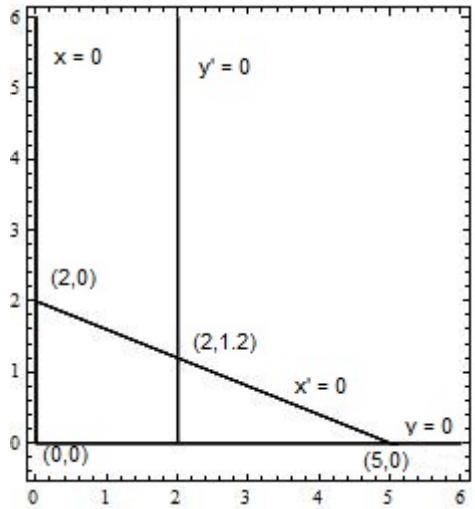

Figura 1.10: Representação dos pontos de equilíbrio.

Além de calcular os pontos de equilíbrio, podemos estudar o sinal dos vetores tangentes nas regiões delimitadas pelas isóclinas.

Fazendo o estudo do sinal das derivadas x' e y', teremos:

1. $x' > 0 \Rightarrow y < \dfrac{0.2}{0.1}\left(1 - \dfrac{x}{5}\right) = 2 - \dfrac{2}{5}x$ e $x' < 0 \Rightarrow y > \dfrac{0.2}{0.1}\left(1 - \dfrac{x}{5}\right) = 2 - \dfrac{2}{5}x$.
2. $y' > 0 \Rightarrow x > \dfrac{0.2}{0.1} = 2$ e $y' < 0 \Rightarrow x < \dfrac{0.2}{0.1} = 2$.

Os sinais dos vetores tangentes, nas regiões delimitadas pelas isóclinas, podem ser vistos na figura 1.11:

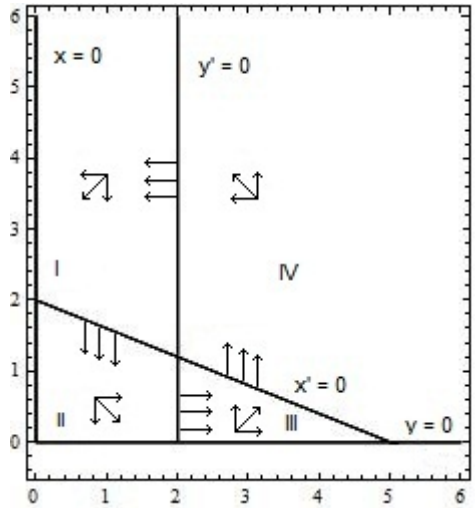

Figura 1.11: Estudo do sinal dos vetores.

Portanto, nas quatro regiões enumeradas teremos;

1ª Região: $x' < 0$ e $y' < 0$;

2ª Região: $x' > 0$ e $y' < 0$;

3ª Região: $x' > 0$ e $y' > 0$;

4ª Região: $x' < 0$ e $y' > 0$.

Definição 1.1.9 (Trajetória Periódica) Dizemos que uma trajetória $x : I \to \mathbb{R}^n$ de f é uma trajetória periódica do campo vetorial f se a trajetória não é singular e existem $t_1, t_2 \in I$ tais que $t_1 \neq t_2$ e $x(t_1) = x(t_2)$

Desta forma temos que uma trajetória é periódica se não é singular e nem injetiva. Neste caso necessariamete temos que $I = \mathbb{R}$, pois uma trajetória periódica é sempre limitada. Além disso, podemos perceber que existe um único $T > 0$, denominado período da trajetória, tal que $x(t) \neq x(0)$, para cada $0 < t < T$, e, além disso, para cada $t \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{Z}$, vale

$$x(kT + t) = x(t).$$

Além dos pontos de equilíbrio e das trajetórias periódicas, para o entendimeto da dinâmica de um campo vetorial é importante também analisar o retrato de fase do mesmo. Portanto, algumas definições inerentes a isso são preliminares para os fatos que discutiremos posteriormente.

Definição 1.1.10 (Órbita) Dizemos que a órbita do campo vetorial $f : U \to \mathbb{R}^n$ que passa pelo ponto $x(0) = x_0 \in U$ é a curva integral definida pela imagem da trajetória de f por x_0. Ou seja, se $x : I(x_0) \to \mathbb{R}^n$ é a trajetória de f por x_0 então a órbita de f por x_0 é o conjunto $O(x_0) = \{x(t) \in U; t \in I(x_0)\}$.

Exemplo 1.1.9 A órbita do campo $f : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}^2_+$ definido por

$$f(x, y) = (x[0.2(1 - x/5) - 0.1y], y(-0.1 + 0.1x))$$

e que passa pelo ponto $(4.9, 0.1)$, pode ser visualizada na figura 1.12:

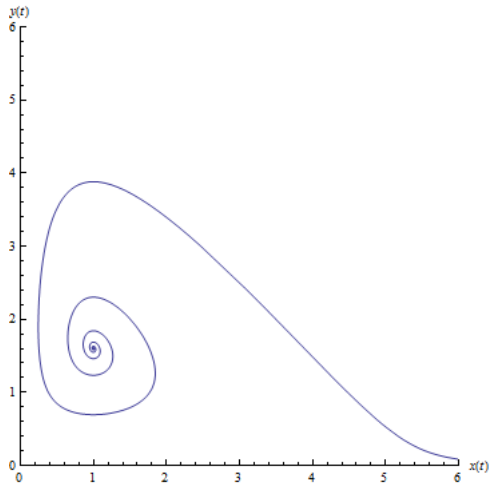

Figura 1.12: Órbita que passa pelo ponto dado.

Um fato importante é que, em decorrência do teorema da existência e unicidade de soluções, em um campo vetorial $f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1, por cada ponto $x \in U$ passa uma única órbita de f. Isso significa que o domínio aberto U, também chamado de espaço de fase, do campo vetorial $f : U \to \mathbb{R}^n$ é totalmente particionado em órbitas do campo vetorial.

Cada órbita do campo vetorial considerado é orientada no sentido do percurso da trajetória, ou seja, no sentido do tempo crescente.

Definição 1.1.11 (Retrato de Fase) O retrato de fase de um campo vetorial $f : U \to \mathbb{R}^n$ é a partição do espaço de fase U em órbitas orientadas.

Exemplo 1.1.10 Consideremos o campo $f : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}^2_+$ definido por

$$f(x, y) = (x[0.2(1 - x/5) - 0.1y], y(-0.1 + 0.1x))$$

O comportamento do retrato de fase desse campo pode ser visualizado na figura 1.13:

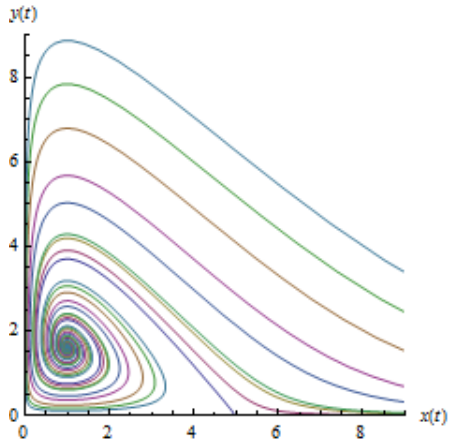

Figura 1.13: Retrato de fase do campo dado.

Em muitas situções, é necessário estabelecer uma mudança de coordenadas afim de tornar um problema aparentemente complexo em um problema mais simples. Essa mudança de coordenadas é estabelecida através de aplicações denominadas de conjugações. Definiremos esses fatos a seguir:

Definição 1.1.12 (Homeomorfismo) Dados $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{R}^n$, um homeomorfismo entre V_1 e V_2 é uma aplicação $g : V_1 \to V_2$ contínua e bijetora, cuja inversa $g^{-1} : V_2 \to V_1$ também é contínua.

Exemplo 1.1.11 (Translação Local) Seja $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ e $V_1 \in \mathbb{R}^n$, uma vizinhança de $\bar{x}$. A aplicação $T : V_1 \to \mathbb{R}^n$, $T(x) = x - \bar{x}$ é injetiva. Portanto podemos definir a bijeção $T' : V_1 \to V_2$, $T'(x) = T(x)$, onde $V_2 = Im(T) \in \mathbb{R}^n$ é o conjunto transladado de V_1 por T'. A aplicação T' é chamada de translação local entre V_1 e V_2 e sua inversa é a aplicação $T'^{-1} : V_2 \to V_1$, definida por $T'^{-1}(y) = y + \bar{x}$ para todo $y \in V_2$.

Podemos verificar isso na figura 1.14:

Definição 1.1.13 (Difeomorfismo) Dados $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{R}^n$, um difeomorfismo entre V_1 e V_2 é uma aplicação $g : V_1 \to V_2$ diferenciável e bijetora, cuja inversa $g^{-1} : V_2 \to V_1$ também é diferenciável.

Definição 1.1.14 (Conjugação Local) Sejam $f_1 : U_1 \to \mathbb{R}^n$ e $f_2 : U_2 \to \mathbb{R}^n$ dois campos vetoriais com fluxos ϕ^1 e ϕ^2, respectivamente, e sejam $x_1 \in U_1$ e $x_2 \in U_2$ dois pontos dados. Dizemos que o campo f_1 ou o fluxo ϕ^1 em x_1 é localmente topologicamente (diferenciavelmente) conjugado ao campo f_2 ou ao fluxo ϕ^2 em x_2 se existem vizinhanças V_1 de x_1 em U_1 e V_2 de x_2 em U_2 e um homeomorfismo (difeomorfismo) $g : V_1 \to V_2$ tal que:

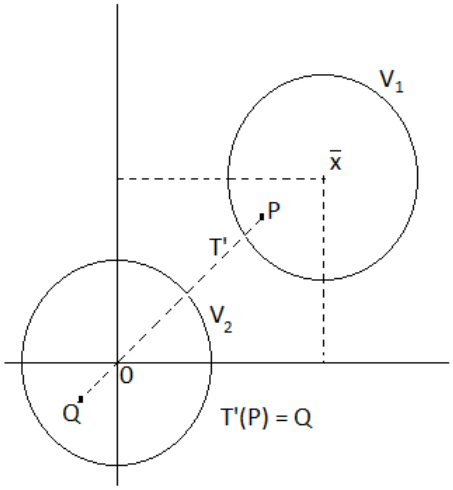

Figura 1.14: Representação esquemática de uma translação.

1) $g(x_1) = x_2$ e

2) $\phi^2(t, g(x)) = g(\phi^1(t, x))$

para quaisquer $x \in V_1$ e cada $t \in \mathbb{R}$ tais que $\phi^1(t, x) \in V_1$.

Neste caso dizemos que o homeomorfismo (difeomorfismo) $g(x) = y$ é uma conjugação local entre os campos nos pontos dados.

Exemplo 1.1.12 Seja $(x', y') = f(x, y)$ a equação diferencial definida pelo campo vetorial $f : (0, 6) \times (0, 6) \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (0.9x - 0.8xy, -0.4y + 0.8xy)$. Calculado os pontos de equilíbrio desse campo encontraremos dois pontos: $P_1 = (0, 0)$ e $P_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{9}{8}\right)$. Aplicando a translação em torno de P_2, pondo

$$u = x - \frac{1}{2} \text{ e } v = x - \frac{9}{8},$$

chegaremos ao campo transladado

$$g : \left(\frac{-1}{2}, \frac{11}{2}\right) \times \left(\frac{-9}{8}, \frac{39}{8}\right) \to \mathbb{R}^2,\ g(u, v) = (-0.8v - 0.8uv, 0.9u + 0.8uv).$$

A translação neste caso é uma conjugação local entre os campos f e g.

Definição 1.1.15 Dado um campo $f : U \to \mathbb{R}^n$ dizemos que o ponto $x_0 \in U$ tem a propriedade do fluxo tubular se existem uma vizinhança $V \subseteq U$ de x_0, denominada vizinhança tubular de x_0, um aberto $W \subset \mathbb{R}^{n-1}$, uma constante $s > 0$ e um difeomorfismo $g : V \to (-s, s) \times W$ que conjuga o fluxo ϕ_t de f em U com fluxo ψ_t do campo constante $\bar{f}(y_1, y2, \cdots, y_n) = (1, 0, \cdots, 0)$ em $(-s, s) \times W$, ou seja, vale

$$\psi(t, g(x)) = g(\phi(t, x))$$

para qualquer $x \in V$ e cada $|t| < s$. Podemos observar essa relação na figura 1.15:

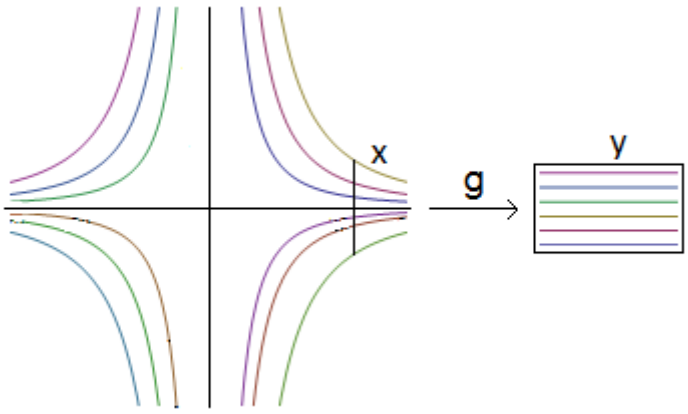

Figura 1.15: Representação do fluxo tubular.

Desta forma podemos afirmar que o ponto x_0 tem a propriedade do fluxo tubular se o campo f, na vizinhança de x_0, é dado por $\bar{f}$, a menos de uma mudança de coordenadas g.

Neste caso dizemos que o homeomorfismo $g(x) = y$ é uma conjugação local entre os campos nos pontos dados.

1.2 Teorema de Poincaré-Bendixon

No que segue consideramos campos de vetores $f : E \to \mathbb{R}^2$ de classe C^1 no aberto $E \subseteq R^2$ tal que todas as soluções da equação $x' = f(x)$ estão definidas para todo tempo real.

Definição 1.2.1 (Conjuntos Invariantes) Dizemos que um conjunto $C \subseteq E$ é:

1. Positivamente invariante pelo fluxo ϕ do campo f se $\phi_t(C) \subseteq C$ para todo $t \geq 0$.
2. Negativamente invariante pelo fluxo ϕ do campo f se $\phi_t(C) \subseteq C$ para todo $t \leq 0$.
3. Invariante pelo fluxo ϕ do campo f se $\phi_t(C) \subseteq C$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Definição 1.2.2 (Conjuntos Limites)

1. O conjunto ω-limite de um ponto $x \in E$ é o conjunto $L_\omega(x)$ dos pontos $y \in E$ para os quais existe uma sequência $t_n \to +\infty$ tal que

$$\lim_{n\to+\infty}\phi_{t_n}(x) = y.$$

2. O conjunto α-limite de um ponto $x \in E$ é o conjunto $L_\alpha(x)$ dos pontos $y \in E$ para os quais existe uma sequência $t_n \to -\infty$ tal que

$$\lim_{n\to+\infty}\phi_{t_n}(x) = y.$$

Teorema 1.2.1 Se a semi-órbita $\gamma^+(P)$ é limitada, então o conjunto ω - limite de P satisfaz:

1. $L_\omega(P) \neq \varnothing$.
2. $L_\omega(P)$ é compacto.
3. $L_\omega(P)$ é conexo.
4. $L_\omega(P)$ é invariante.
5. $L_\omega(P)$ atrai a solução $\phi(t, P)$, isto é,

$$\lim_{t\to+\infty} d(\phi(t, P), L_\omega(P)) = 0.$$

Para demostração deste teorema veja [5].

Teorema 1.2.2 (Teorema de Poincaré-Bendixon) Suponha que a semi-órbita positiva $\gamma^+(P)$ é limitada e que $L_\omega(P)$ não possui singularidades. Então $L_\omega(P)$ é uma órbita periódica.

Para demostração deste teorema veja [5], [2] e [4].

Corolário 1.2.1 Seja Ω uma região (i.e.,aberto conexo) de $\mathbb{R}^2$, suponha que qualquer solução que encontra a fronteira dessa região $\partial\Omega$ permanece em Ω, isto é, se $(x(t_0), y(t_0)) \in \partial\Omega$ para algum t_0, então $(x(t), y(t)) \in \Omega$, $\forall t > t_0$. Se não contiver singularidades então essa região contém necessariamente uma órbita periódica.

Exemplo 1.2.1 Neste exemplo, será aplicado o teorema de Poincaré-Bendixon para investigar a existência de órbitas periódicas no espaço de fase do sistema abaixo:

$$\begin{cases} x' = \quad y \\ y' = -(2x^2 + y^2 - 2)y - x \end{cases}$$

Das equações desse sistema, obtemos:

$$\frac{d}{dt}(x^2 + y^2) = 2(xx' + yy') = -2y^2(2x^2 + y^2 - 2).$$

Agora considere $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 1 < x^2 + y^2 < 3\}$, cuja fronteira $\partial\Omega$ é constituída de dois círculos. No círculo $x^2 + y^2 = 1$ temos

$$\frac{d}{dt}(x^2 + y^2) = -2y^2(x^2 - 1) \geq 0.$$

E no círculo $x^2 + y^2 = 3$ temos

$$\frac{d}{dt}(x^2 + y^2) = -2y^2(x^2 + 1) \leq 0.$$

Finalmente, estes dois fatos implicam que as condições do corolário do teorema de Poincaré-Bendixon estão satisfeitas. Logo existe uma órbita periódica em Ω.

1.3 Estabilidade Segundo Liapunov

A estabilidade é uma propriedade qualitativa das órbitas de um campo vetorial. A estabilidade de singularidades em particular traduz o comportamento a longo prazo do fluxo do campo na vizinhança de cada singularidade e desta forma, é claramente importante para entender a evolução, ao longo do tempo, dos sistemas autônomos.

Podemos observar de uma maneira geral três tipos de comportamento do fluxo próximo a singularidades:

1. O fluxo, numa vizinhança da singularidade, tende ao ponto de equilíbrio em questão ao longo do tempo. Neste primeiro caso dizemos que a singularidade é assintoticamente estável.

2. O fluxo, numa vizinhança da singularidade, permanece no entorno da mesma ao longo do tempo. Neste segundo caso dizemos que a singularidade é estável.

3. Existe uma vizinhança da singularidade na qual o fluxo começa mas não permanece em tempos suficientemente grandes. Neste terceiro caso dizemos que a singularidade é instável.

Formalmente, os três casos discutidos acima, podem ser definidos da seguinte maneira:

Definição 1.3.1 (Estabilidade) Dado um campo vetorial $f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 no aberto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, com fluxo global $\phi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ definido no aberto

$$\Omega = \{(t, x_0) \in \mathbb{R} \times U; x_0 \in U, t \in I(x_0)\}.$$

Seja $\bar{x}$ uma singularidade para o campo vetorial f. Então:

1) Dizemos que $\bar{x}$ é estável se, para qualquer vizinhança $E \subseteq \mathbb{R}^n$ de $\bar{x}$, existe uma vizinhança $W \subseteq \mathbb{R}^n$ de $\bar{x}$, tal que:

   . $W \subseteq E \cap U$, e

   . $\phi(t, x_0) \in E$, para quaisquer $x_0 \in W$ e $t > 0$

2) $\bar{x}$ é assintoticamente estável se é estável e além disso, existe uma vizinhança $W \subseteq \mathbb{R}^n$ de $\bar{x}$ tal que $\lim_{t \to +\infty} \phi(t, x_0) = \bar{x}$, para qualquer $x_0 \in W$.

3) Por fim dizemos que $\bar{x}$ é instável se não é estável.

A figura 1.16 ilustra as três situações relativas à estabilidade de singularidades.

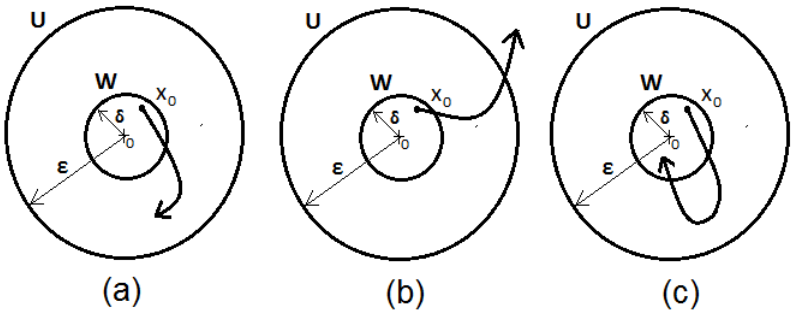

Figura 1.16: Situações que podem ocorrer: (a) estabilidade; (b) instabilidade; e (c) estabilidade assintótica.

1.4 Alguns Lemas Importantes

Nesta seção serão enunciados os lemas e os resultados importantes que serão aplicados na demonstração dos métodos direto e indireto de Liapunov.

Lema 1.4.1 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz) Seja $\langle \cdot, \cdot \rangle$ um produto interno em $\mathbb{R}^n$ que define a norma $|\cdot|$ em $\mathbb{R}^n$. Então, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$, vale a desigualdade $|\langle x, y \rangle| \leq |x||\, y|$.

Demonstração: Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, com $y \neq 0$, pondo $\alpha = \dfrac{\langle x, y \rangle}{|y|^2}$, temos que os vetores $z = x - \alpha y$ e y são ortogonais. De fato, pois:

$$\langle z, y \rangle = \langle x - \alpha y, y \rangle = \langle x, y \rangle - \alpha \langle y, y \rangle = \langle x, y \rangle - \frac{\langle x, y \rangle}{|y|^2} |y|^2 = 0$$

Desta forma temos que

$$|x|^2 = \langle z + \alpha y, z + \alpha y\rangle$$

$$= \langle z, z + \alpha y\rangle + \alpha\langle z, y\rangle = \langle z, z\rangle + \alpha\langle z, y\rangle + \alpha\langle y, z\rangle + \alpha^2\langle y, y\rangle$$

$$= \langle z, z\rangle + 2\alpha\langle z, y\rangle + \alpha^2\langle y, y\rangle = \langle z, z\rangle + \alpha^2\langle y, y\rangle$$

$$= |z|^2 + \alpha^2|y|^2$$

Isso significa que:

$$|x|^2 \geq \alpha^2|y|^2 \Rightarrow |x|^2 \geq \frac{\langle x, y\rangle^2}{|y|^2} \Rightarrow \langle x, y\rangle^2 \leq |x|^2|y|^2.$$

E portanto

$$|\langle x, y\rangle| \leq |x||\ y|.$$

Para $y = 0$ essa desigualdade é evidente.

□

Lema 1.4.2 Seja $A \in M(n)$ uma matriz tal que a parte real de cada autovalor generalizado de A é maior do que α e menor do que β. Então existe uma base B de $\mathbb{R}^n$ tal que

$$\alpha \leq \langle Ax, x\rangle_B \leq \beta$$

para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $|x|_B = 1$.

Dizemos que, nesse caso, o produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_B$ é adaptado a A.

Para demostração deste lema veja [5].

Lema 1.4.3 Sejam $|\cdot|$ a norma associada a um produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ qualquer de $\mathbb{R}^n$ e $\eta : I \to \mathbb{R}^n$ um caminho derivável. Então para cada $t \in I$ vale

$$\frac{d}{dt}|\eta(t)|^2 = 2\langle\eta'(t), \eta(t)\rangle \text{ e } \frac{d}{dt}|\eta(t)| = \frac{\langle\eta'(t), \eta(t)\rangle}{|\eta(t)|}$$

vale se $\eta(t) \neq 0$.

Para demostração deste lema veja [5].

Lema 1.4.4 Uma conjugação topológica local entre entre campos de vetores leva singularidade assintoticamente estável em singularidade assintoticamente estável.

Para demostração deste lema veja [5].

Lema 1.4.5 Seja $f : E \to \mathbb{R}^n$ um campo de classe C^1 no aberto $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Se $x_0 \in E$ não é um ponto de equilíbrio, então x_0 tem a propriedade do fluxo tubular.

Para demostração deste lema veja [5].

Capítulo 2

Resultado Principal

Neste capítulo serão enunciados e demonstrados os métodos direto e indireto de Lyapunov. Será exposto alguns exemplos de aplicação.

2.1 Método Indireto de Liapunov

Neste método procedemos à linearização em torno de cada singularidade de um campo vetorial, transferindo as informações locais do campo linearizado para o campo original. Desta forma, é possível analisar localmente o comportamento do fluxo do campo, pelo menos na vizihança de cada singularidade. No entanto esse método apresenta certa limitação, pois não possui suporte para analisar a estabilidade de uma singularidade do campo, cujo operador diferencial apresenta autovalores generalizados com parte real nula.

2.1.1 Linearização em Torno de Singularidades

Consideremos o sistema não-linear autônomo:

$$x' = f(x)$$

definido por um campo vetorial autônomo $f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 no aberto $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Seja $\bar{x}$ um ponto de equilíbrio para f.

Nestas condições, podemos realizar a seguinte aproximação:

tomando $x(t) = \bar{x} + y(t)$, temos que

$$y'(t) = f(\bar{x} + y(t)) \cong f(\bar{(}x) + D_f(\bar{x})) \Rightarrow y' = D_f(\bar{x})y.$$

O operador diferencial $D_f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é chamado de matriz jacobiana do campo $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, sendo definido da seguinte maneira:

Dado $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, temos que

$$D_f(x) = J(x) = \begin{bmatrix} \partial\frac{f_1}{x_1} & \partial\frac{f_1}{x_2} & \cdots & \partial\frac{f_1}{x_n} \\ \partial\frac{f_2}{x_1} & \partial\frac{f_2}{x_2} & \cdots & \partial\frac{f_2}{x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial\frac{f_n}{x_1} & \partial\frac{f_n}{x_2} & \cdots & \partial\frac{f_n}{x_n} \end{bmatrix}$$

Exemplo 2.1.1 Consideremos o sistema não-linear $(x', y') = (-2x(x-1)(2x-1), 2y)$, definido pelo campo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $f(x, y) = (-2x(x-1)(2x-1), 2y)$.

Iremos linearizar esse campo em torno de cada ponto de equilíbrio.

Os pontos de equilíbrio para esse sistema são três:

$$P_1 = (0, 0),\ P_2 = (1, 0) \text{ e } P_3 = (0.5, 0).$$

Calculando a matriz jacobiana desse campo teremos:

$$D_f(x) = J(x) = \begin{bmatrix} -12x^2 + 12x - 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Aplicando essa matriz em cada um dos pontos de equilíbrio teremos:

1. $J(0, 0) = J(1, 0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$.
2. $J(0.5, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$.

Logo, em torno de $P_1 = (0, 0)$ e de $P2 = (1, 0)$ teremos que

$$f(x) \cong \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x$$

e em torno de $P_3 = (0.5, 0)$ teremos que

$$f(x) \cong \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x.$$

Teorema 2.1.1 (Método Indireto de Liapunov - 1ª parte) Seja $f : U \to \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe C^1 no aberto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\bar{x} \in U$ uma singularidade para f e $J(\bar{x}) = Df(\bar{x}) \in M(n)$ a matriz jacobiana de f em $\bar{x}$. Se $J(\bar{x})$ tem todos os autovalores generalizados com parte real negativa então $\bar{x}$ é assintoticamente estável.

Demonstração: Considere o campo vetorial $g : V \to \mathbb{R}^n$ no aberto $V \subseteq \mathbb{R}^n$ obtido de f pela translação $t : U \to V$ definida por $t(x) = y$, onde $y = x - \bar{x}$. Portanto, g é de classe C^1 e $g(x - \bar{x}) = f(x), \forall x \in U$.

Como $\bar{x}$ é uma singularidade para f, temos que $g(0) = g(\bar{x} - \bar{x}) = f(\bar{x}) = 0$. Logo a origem é uma singularidade para g.

Estratégia: Como $D_g(0) = D_f(\bar{x}) = J(\bar{x})$, basta mostrar que $\bar{y} = 0$ é uma singularidade assintoticamente estável para g. Aplicando o lema 1.4.4 teremos portanto que $\bar{x}$ será uma singularidade assintoticamente estável para f.

Para mostrar isso, a idéia é provar que as soluções da equação diferencial não-linear $y' = g(y)$, numa pequena vizinhança de $\bar{y} = 0$, são muito parecidas com as soluções da equação linear $y' = D_g(0)y$.

Denotemos então $A = D_g(0) = D_f(\bar{x}) = J(\bar{x})$. Pela definição de derivada, temos que

$$g(y) = g(0) + Ay + r(y) = Ay + r(y),$$

onde $|r(y)|/|y| \to 0$ com $|y| \to 0$, e portanto

$$\lim_{y \to 0} \frac{|g(y) - Ay|}{|y|} = 0 \tag{2.1}$$

Como todas as normas em $\mathbb{R}^n$ são equivalentes, (2.1) vale para qualquer norma em $\mathbb{R}^n$.

Fixemos em particular um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ com norma associada $| \cdot |$, pela desigualdade de Cachy-Schwarz temos que $\langle g(y) - Ay, y \rangle \leq |g(y) - Ay||y|$, de modo que

$$\frac{\langle g(y), y \rangle}{|y|^2} - \frac{\langle Ay, y \rangle}{|y|^2} = \frac{\langle g(y) - Ay, y \rangle}{|y|^2} \leq \frac{|g(y) - Ay|}{|y|}.$$

Aplicando o limite, de (2.1) decorre que

$$\lim_{y \to 0} \frac{\langle g(y), y \rangle}{|y|^2} \leq \lim_{y \to 0} \frac{\langle Ay, y \rangle}{|y|^2}. \tag{2.2}$$

Por hipótese sabemos que $g(0) = 0$ e que todos os autovalores de A possuem parte real negativa. Escolhemos então um número real positivo β, tal que a parte real de cada autovalor generalizado λ de $A = Dg(0) \in M(n)$ é menor do que -2β. Pelo lema 0.3.2, podemos escolher um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ adaptado tal que $\langle Ay, y \rangle \leq -2\beta$ para qualquer $y \in \mathbb{R}^n$ com $|y| = 1$, o que implica

$$\langle Ay, y \rangle \leq -2\beta |y|^2, \text{ para qualquer } y \in \mathbb{R}^n \text{ com } |y| \leq 1.$$

Substituindo essa desigualdade em (2.2) temos que

$$\lim_{y\to 0}\frac{\langle g(y),y\rangle}{|y|^2}\leq \lim_{y\to 0}\frac{\langle Ay,y\rangle}{|y|^2}\leq -2\beta<-\beta.$$

Logo podemos encontrar $\gamma>0$ tal que

$$\langle g(y),y\rangle\leq -\beta|y|^2, \tag{2.3}$$

para qualquer $y\in\mathbb{R}^n$ com $|y|<\gamma$. Em decorrência disso afirmamos que

$$|\phi_t(y)|\leq |y|e^{-\beta t}\leq |y| \tag{2.4}$$

vale para cada $y\in V\subseteq\mathbb{R}^n$ tal que $|y|<\gamma$ e qualquer $t\geq 0$, onde $\phi_t(y)$ denota a trajetória de g por y. A afirmação é evidente para $y=0$, fixemos então $y\in V\subseteq\mathbb{R}^n$ com $|y|<\gamma$ e analisemos a função $\alpha:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por $\alpha(t)=|\phi_t(y)|$. Como $\alpha(t)>0$ para cada $t\geq 0$, decorre que α é derivável e, pelo lema 1.4.3, temos

$$\alpha'(t)=\frac{\langle g(\phi_t(y)),\phi_t(y)\rangle}{\alpha(t)} \tag{2.5}$$

para cada $t\geq 0$. Dado $t^*\in\mathbb{R}$, se $\alpha(t)<\gamma$ para cada $0\leq t<t^*$ então, por (2.3) segue que

$$\alpha'(t)\leq -\beta\alpha(t)<0$$

para cada $0\leq t<t^*$. Supondo que exista $t>0$ tal que $\alpha(t)>\gamma$, por continuidade obtemos um primeiro $t^*>0$ tal que $\alpha(t^*)=\gamma$ mas $\alpha(t)<\gamma$ para $0\leq t<t^*$. Pelo exposto acima segue que $\alpha'(t)<0$ para cada $0\leq t<t^*$, o que contradiz o teorema do valor médio, segundo o qual existe $0<c<t^*$ tal que

$$0<\gamma-|y|=\alpha(t^*)-\alpha(0)=\alpha'(c)(t^*-0)=\alpha'(c)t^*,$$

ou seja, $\alpha'(c)>0$. Logo temos que $\alpha'(t)<\gamma$ para cada $t\geq 0$. Deste modo, para cada $t\geq 0$, teremos $\frac{d}{dt}\ln\alpha(t)=\alpha'(t)/\alpha(t)\leq -\beta$ e integrando esse resultado no intervalo de 0 a t obtemos:

$$\ln\frac{\alpha(t)}{|y|}=\ln\alpha(t)-\ln\alpha(0)\leq -\beta t$$

Aplicando , portanto, a exponecial decorre que (2.4) vale para todo $t\geq 0$ e $|y|<\gamma$.

Basta provar que $\bar{y}=0$ é de fato singularidade assintoticamente estável para g.

Para $\epsilon>\gamma$, escolhemos $0<\delta\leq\gamma$ e desta forma, por (2.4) teremos que

$$|y|<\delta\leq\gamma\Rightarrow|\phi_t(y)|\leq|y|<\gamma<\epsilon,\text{ para todo } t\geq 0.$$

Para $0<\epsilon\leq\gamma$, escolhemos $0<\delta\leq\epsilon$ e desta forma, por (2.4) teremos que

$$|y| < \delta \leq \epsilon \leq \gamma \Rightarrow |\phi_t(y)| \leq |y| < \epsilon, \text{ para todo } t \geq 0.$$

Por (2.4), temos também que $\lim_{t\to\infty} |\phi_t(y)| = 0$, portanto $\lim_{t\to\infty} \phi_t(y) = 0$.

Logo $\bar{y} = 0$ é uma singularidade assintoticamente estável para g e pelo lema 1.4.4 $\bar{x}$ é uma singularidade assintoticamente estável para f, demonstrando portanto essa primeira parte do método indireto de Liapunov. □

Teorema 2.1.2 (Método Indireto de Liapunov - 2ª parte) Seja $f : U \to \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe C^1 no aberto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\bar{x} \in U$ uma singularidade para f e $J(\bar{x}) = D_f(\bar{x}) \in M(n)$ a matriz jacobiana de f em $\bar{x}$. Se $J(\bar{x})$ tem algum autovalor generalizado com parte real positiva então $\bar{x}$ é instável.

Demonstração: Sem perda de generaldade, supomos que $x_0 = 0$ é uma singularidade para f. Denotemos $A = D_f(0)$.

Supomos que a matriz jacobiana A para o campo f em $x_0 = 0$ possui pelo menos um autovalor com parte real positiva. Seja então $V_1 \oplus V_2 = \mathbb{R}^n$ a decomposição de $\mathbb{R}^n$ em subespaços invariantes por A obtida da forma canônica de Jordan de A, separando $A = \text{diag}(A_1, A_2)$ em dois blocos na diagonal pelo seguinte critério: todos os autovalores generalizados de A_1 possuem parte real positiva e todos os autovalores de A_2 possuem parte real não-positiva.

Escolhemos $\beta > 0$ e $\alpha > 0$ tal que a parte real de cada autovalor generalizado de A_1 é maior do que 8β e a parte real de cada autovalor generalizado de A_2 é maior do que ou igual a $-\alpha$. Pelo lema 1.4.2 existem produtos internos adaptados $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ em V_1 e $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ em V_2, com normas associadas $|\cdot|_1$ e $|\cdot|_2$, respectivamente, tais que:

$$\langle A_1 x, x\rangle_1 \leq 8\beta |x|_1^2, \tag{2.6}$$

$\forall x \in V_1$ tal que $|x|_1 \leq 1$.

$$\langle A_2 y, y\rangle_2 \leq -\alpha |y|_2^2, \tag{2.7}$$

$\forall y \in V_2$, tal que $|y|_2 \leq 1$.

Para cada $z = x + y \in V_1 \oplus V_2 = \mathbb{R}^n$, definimos a norma $|z|^2 = |x|^2 + |y|^2$ associada ao produto interno $\langle z_1, z_2\rangle = \langle x_1, x_2\rangle_1 + \langle y_1, y_2\rangle_2$ de $V_1 \oplus V_2 = \mathbb{R}^n$, onde $z_i = x_i + y_i$, com $x_i \in V_1$ e $y_i \in V_2$, para cada $i \in \{1, 2\}$.

Pela definição de derivada temos que

$$f(z) = f(0) + Az + r(z) = Az + r(z),$$

com $|r(z)|/|z| \to 0$ quando $|z| \to 0$. Desta forma, podemos obter $\delta > 0$ tal que

$$|r(z)| < \beta |z| \tag{2.8}$$

para cada $z \in \mathbb{R}^n$ com $|z| \leq \delta$. Supomos que a a bola aberta de centro na origem e raio 2δ está contida em U, ou seja, $|z| < 2\delta \Rightarrow z \in U$. E escolhemos, finalmente, uma constante $0 < a \leq 1$ com $a \leq 4\alpha^{-1}\beta$. Consideremos os seguintes conjuntos:

1) Cone sólido de vértice na origem de $\mathbb{R}^n$ com eixo de rotação em V_1:

$$C_a = \{(x, y) \in V_1 \oplus V_2; |y|_2 \leq a|x|_1\} \text{ e}$$

2) Tronco do cone C_a dentro da bola fechada de centro $0 \in \mathbb{R}^n$ e raio δ:

$$C = C_a(\delta) = \{z \in C_a; |z| \leq \delta\}$$

Estes conjuntos podem ser visualizados na figura 2.1:

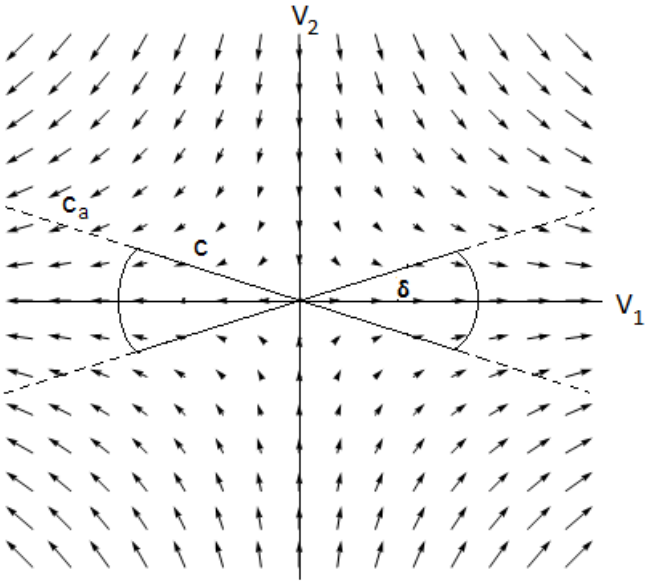

Figura 2.1: Cone e tronco do cone.

Note que $C \subseteq U$. Desta forma afirmamos que

$$\langle f(z), z\rangle \geq \beta|z|^2, \tag{2.9}$$

para qualquer $z \in C$.

De fato, temos

$$|z|^2 = |x|_1^2 + |y|_2^2 \leq |x|_1^2 + a^2|x|_1^2 \leq 2|x|_1^2$$

para $z \in C$. Como

$$f(z) = Az + r(z) = A_1x + A_2y + r(z),$$

de (2.6), (2.7), (2.8), pela escolha de a e pela desigualdade de Cauchy-Schwarz temos que

$$\begin{aligned}\langle f(z), z\rangle &= \langle A_1x, x\rangle_1 + \langle A_2y, y\rangle_2 + \langle r(z), z\rangle \geq 8\beta|x|_1^2 - \alpha|y|_2^2 - |\langle r(z), z\rangle| \\ &\geq (8\beta - a^2\alpha)|x|_1^2 - |r(z)||z| \geq \frac{1}{2}(8\beta - a^2\alpha)|z|^2 - \beta|z|^2 \geq \beta|z|^2,\end{aligned}$$

provando assim (2.9).

Dado $z \in C$, afirmamos que a trajetória $\phi_t(z)$ de f por z é interior a C para cada $t > 0$ tal que $|\phi_t(z)| < \delta$. Além disso, só pode sair de C após atingir a esfera $S(0, \delta) = \{z \in C; |z| = \delta\}$.

Fixemos então $z \in C$ no interior de C. Por continuidade a trajetória $\phi_t(z)$ de f por z, permanece no interior de C para cada $t > 0$ suficientemente pequeno. Fixemos $t > 0$ tal que $\phi_s(z)$ esteja no interior de C para cada $0 \leq s \leq t$. Por (2.9) e pelo lema 1.4.3, obtemos:

$$\frac{d}{dt}\ln|\phi_t(z)|^2 = \frac{\frac{d}{dt}|\phi_t(z)|^2}{|\phi_t(z)|^2} = \frac{2\langle f(\phi_t(z)), \phi_t(z)\rangle}{|\phi_t(z)|^2} \leq 2\beta$$

de modo que integrando ambos os lados de 0 a t, temos

$$\ln\left(\frac{|\phi_t(z)|^2}{|z|^2}\right) = \ln|\phi_t(z)|^2 - \ln|z|^2 \geq 2\beta t$$

e, desta forma, aplicando a exponencial, teremos $|\phi_t(z)|^2 \geq e^{2\beta t}|z|^2$, ou seja,

$$|\phi_t(z)| \geq e^{\beta t}|z|$$

Isso significa que a trajetória de f por z, enquanto permanece em C se afasta exponencialmente de z, atingindo $|\phi_t(z)|$ em algum momento $t \leq \frac{1}{\beta}\ln(\frac{\delta}{|z|})$. No entanto, como afirmado anteriormente, essa trajetória não pode escapar pela fronteira lateral de C. Portanto, dada uma vizinhança W de 0 com raio $\delta > 0$ contida em C, temos que a trajetória de f por cada ponto arbitrariamente próximo de 0 que estão em C sae de W. Logo a singularidade $\bar{x} = 0$ é instável. □

Exemplo 2.1.2 Neste exemplo iremos analisar o estado de estabilidade dos pontos de equilíbrio do modelo Lokta-Volterra, aplicando o **método indireto de Liapunov**. Os pontos de equilíbrio para o modelo:

$$\begin{cases} x' = & ax - \alpha xy \\ y' = & \beta xy - by \end{cases}$$

são $P_1 = (0, 0)$ e $P_2 = \left(\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha}\right)$.

Calculemos a matriz jacobiana para o sistema correspondente. Denotando

$$f_1(x, y) = ax - \alpha xy,\ f_2(x, y) = \beta xy - by,$$

as derivadas parciais temos:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = a - \alpha y,\ \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = -\alpha x,\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = \beta y \text{ e } \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) = -b + \beta x$$

Portanto a matriz jacobiana desse sistema é dada por:

$$D_f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - \alpha y & -\alpha x \\ \beta y & -b + \beta x \end{bmatrix}$$

Aplicando a matriz jacobiana nos dois pontos de equilíbrio teremos:

$$D_f(0,0) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix} \text{ e } D_f\left(\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha\frac{b}{\beta} \\ \beta\frac{a}{\alpha} & 0 \end{bmatrix}$$

Calculando os autovalores dessas matrizes teremos:

1) $\lambda_1 = a$ e $\lambda_2 = -b$ para $D_f(0,0)$

2) $\lambda = \pm i\sqrt{ab}$ para $D_f\left(\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha}\right)$

Como a e b são constantes positivas, aplicando o **método indireto de Liapunov** podemos concluir que $P_1 = (0,0)$ é um ponto de equilíbrio instável para f. Com relação ao ponto de equilíbrio $P_2 = \left(\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha}\right)$, nada podemos concluir com relação à sua estabilidade, já que todos os autovalores generalizados de $D_f\left(\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha}\right)$ possuem parte real nula.

Exemplo 2.1.3 No exemplo anterior, não foi possível analisar a estabilidade do ponto de equilíbrio não-trivial pelo método indireto de Liapunov. Neste exemplo, entretanto, veremos que esse método é perfeitamente aplicado. Consideremos o sistema exposto abaixo, obtido por uma modificação do sistema Lotka - Volterra:

$$\begin{cases} x' = & ax\left(1 - \frac{x}{k}\right) - \alpha xy \\ y' = & \beta xy - by \end{cases}$$

Onde $k > \frac{b}{\beta}$.

Os pontos de equilíbrio para esse sistema são três:

$$P_1 = (0,0), P_2 = (k,0) \text{ e } P_3 = \left(\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha} - \frac{ba}{\beta k\alpha}\right)$$

Calculemos, de forma análoga ao exemplo anterior, a matriz jacobiana associada a esse sistema. Denotando

$$f_1(x,y) = ax\left(1 - \frac{x}{k}\right) - \alpha xy \text{ e } f_2(x,y) = \beta xy - by,$$

as derivadas parciais são:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = a - \frac{2a}{k}x - \alpha y,\ \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = -\alpha x,\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = \beta y \text{ e } \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) = -b + \beta x$$

Portanto a matriz jacobiana desse sistema é dada por:

$$D_f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - \frac{2a}{k}x - \alpha y & -\alpha x \\ \beta y & -b + \beta x \end{bmatrix}$$

Aplicando a matriz jacobiana nos três pontos de equilíbrio teremos:

$$D_f(0,0) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix},$$

$$D_f(k,0) = \begin{bmatrix} -a & -\alpha k \\ 0 & -b + \beta k \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$D_f(\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha} - \frac{ba}{\beta k \alpha}) = \begin{bmatrix} -\frac{ab}{k\beta} & -\frac{\alpha b}{\beta} \\ \frac{\beta a}{\alpha}\left(1 - \frac{b}{\beta k}\right) & 0 \end{bmatrix}$$

Calculando os autovalores dessas matrizes teremos:

1) $\lambda_1 = a$ e $\lambda_2 = -b$ para $D_f(0,0)$.

2) $\lambda_1 = -a$ e $\lambda_2 = -b + \beta k$ para $D_f(k,0)$.

3) $\lambda = \left[-\frac{ab}{k\beta} \pm \sqrt{\left(\frac{ab}{k\beta}\right)^2 - 4ab\left(1 - \frac{b}{k\beta}\right)}\right]\frac{1}{2}$ para $D_f(\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha} - \frac{ba}{\beta k \alpha})$.

Aplicando então o **método indireto de Liapunov** temos que:

1) $P_1 = (0,0)$ é uma singularidade instável para o sistema.

2) $P_2 = (k,0)$ é uma singularidade instável para o sistema.

3) $P_3 = \left(\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha} - \frac{ba}{\beta k \alpha}\right)$ é uma singularidade assintoticamente estável para o sistema.

2.2 Método Direto de Liapuniv

O método direto de Liapunov, resultado de sua tese de doutorado "The General Problem of Motion Stability", publicada em 1892, generaliza o conceito de função energia associada a um sistema. Desta maneira, em torno de cada ponto de equilíbrio investiga-se a existência de uma função escalar contínua que descreva localmente a configuração do sistema. Essa função, graficamente representada por uma superfície, é chamada de função de Liapunov.

Formalizaremos o conceito de função de Liapunov.

Definição 2.2.1 (**Função de Liapunov**) Sejam $f : U \to \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe C^1 no aberto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\bar{x} \in U$ uma singularidade de f e $V : W \to \mathbb{R}$ uma função contínua numa vizinhança $W \subseteq \mathbb{R}^n$ de $\bar{x}$ tal que $W \subseteq U$. Dizemos que V é uma função de Liapunov para f em $\bar{x}$ se

1) $V(\bar{x}) = 0$, com $V(x) > 0$ para cada $x \in W - \{x\}$ e

2) $V(\phi(t_1, x)) \geq V(\phi(t_2, x))$ para quaisquer $x \in U$, t_1, $t_2 \in \mathbb{R}$, tais que $t_1 < t_2$ e $\phi(t_1, x)$, $\phi(t_2, x) \in W$.

Definição 2.2.2 (**Função de Liapunov Estrita**) Sejam $f : U \to \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe C^1 no aberto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\bar{x} \in U$ uma singularidade de f e $V : W \to \mathbb{R}$ uma função contínua numa vizinhança $W \subseteq \mathbb{R}^n$ de $\bar{x}$ tal que $W \subseteq U$. Dizemos que V é uma função de Liapunov estrita para f em $\bar{x}$ se

1) $V(\bar{x}) = 0$, com $V(x) > 0$ para cada $x \in W - \{x\}$ e

2) $V(\phi(t_1, x)) \geq V(\phi(t_2, x))$ para quaisquer $x \in U$, t_1, $t_2 \in \mathbb{R}$, tais que $t_1 < t_2$ e $\phi(t_1, x)$, $\phi(t_2, x) \in W$.

Se V é diferenciável em W, então a segunda condição significa:

$$(V \circ x)'(t) \leq 0,$$

para todo $t \in I(x_0)$, onde $x : I(x_0) \to \mathbb{R}^n$ é a trajetória de f por x_0. Calculemos $(V \circ x)'(t)$.

$$(V \circ x)'(t) = V'(x(t)) = V'(\phi(t, x_0)) = \langle \nabla V(\phi(t, x_0)), \frac{d}{dt}(\phi(t, x_0)) \rangle =$$

$$\langle \nabla V(\phi(t, x_0)), f(\phi(t, x_0)) \rangle = \langle \nabla V(x(t)), f(x(t)) \rangle$$

Portanto, para que a segunda condição seja satisfeita devemos ter

$$\langle \nabla V(x(t)), f(x(t)) \rangle \leq 0, \text{ para todo } t \in I(x_0),$$

se V é uma função de Liapunov para f em $\bar{x}$, e

$$\langle \nabla V(x(t)), f(x(t)) \rangle < 0, \text{ para todo } t \in I(x_0),$$

se V é uma função de Liapunov estrita para f em $\bar{x}$, onde $x : I(x_0) \to \mathbb{R}^n$ é a trajetória de f por x_0.

Isso significa que ao longo das trajetórias do sistema, o ângulo formado entre os vetores $\nabla V(x(t))$ e $f(x(t))$ no primeiro caso está no intervalo $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ e no segundo caso está no intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Na figura 2.2 está ilustrado comportamento de uma função de Liapunov, assim como suas curvas de nível.

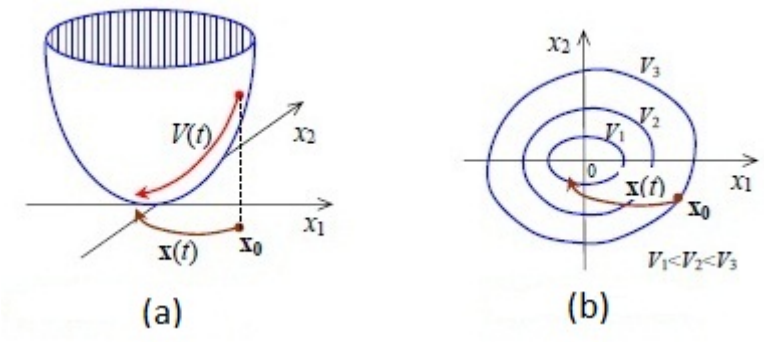

Figura 2.2: (a) Representação 3D e (b) curvas de nível.

Teorema 2.2.1 (**Método Direto de Liapunov - 1ª parte**) Seja $\bar{x} \in U$ uma singularidade do campo vetorial $f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 no aberto $U \in \mathbb{R}^n$. Se existe uma função de Liapunov para f em $\bar{x}$, então $\bar{x}$ é uma singularidade estável de f.

Demonstração: Dado um campo de vetores $f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 e uma singularidade $\bar{x}$ para esse campo, supomos que exista uma função de Liapunov $V : W \to \mathbb{R}^n$ para f em $\bar{x}$, definida numa vizinhança $W \subseteq U$ de $\bar{x}$. Por definição temos que $V(\bar{x}) = 0$ e $V(x) > 0$ para todo $x \in W - \{\bar{x}\}$. Além disso temos que $(V \circ x) : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função não-crescente para qualquer solução $x : I \to \mathbb{R}^n$ de $x' = f(x)$, tal que $x(t) \in W$ para cada $t \in I$. Provaremos que, sob essas circonstâncias, $\bar{x}$ é uma singularidade estável para f.

Dada uma vizinhança $E \in \mathbb{R}^n$ de $\bar{x}$ escolhemos $\epsilon > 0$ tal que a bola aberta de centro $\bar{x}$ e raio ϵ, $B(\bar{x}, \epsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n; |x - \bar{x}| < \epsilon\}$ esteja contida em $(W \cap E)$.

Podemos visualizar geometricamente através da figura 2.3:

Consideremos agora a esfera $S(\bar{x}, \epsilon) = \{y \in W \cap E; |y - \bar{x}| = \epsilon\}$. Como V é contínua e $S(\bar{x}, \epsilon)$ é compacta, temos que existe $\beta = \min_{|y-\bar{x}|=\epsilon} V(y)$. Além disso, temos que $\beta > 0$.

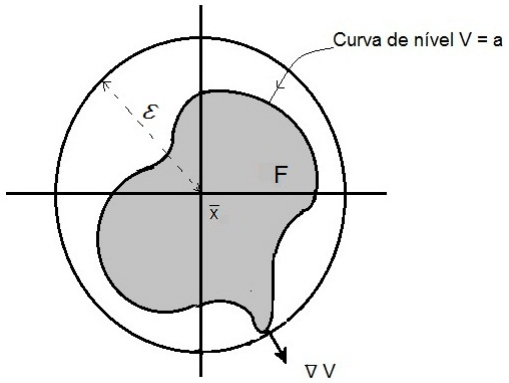

Figura 2.3: Vizinhanças consideradas.

Seja então o conjunto $F = \{z \in B(\bar{x}, \epsilon); V(z) < \beta\}$. Pela continuidade de V e também pelo fato de que $\bar{x} \in F$, temos que F é uma vizinhança de $\bar{x}$.

Mostraremos por contraposisição que $\bar{x}$ é uma singularidade estável para f. Seja $z \in F$ e $\phi_t(z)$ a trajetória de f por z. Essa trajetória defini uma solução $x : J \to \mathbb{R}^n$ de $x' = f(x)$ definida em um intervalo $J \subseteq \mathbb{R}$ com condição inicial $x(0) = z$.

Suponha que exista $\bar{t} \in J$ tal que $\phi_{\bar{t}}(z)$ não pertença a E. Como x é contínua, em algum momento essa solução passa pela esfera $S(\bar{x}, \epsilon)$. Portanto existe $t^* \in J$ tal que $0 < t^* < \bar{t}$ e $V(x(t^*)) = V(\phi_{t^*}(z)) \geq \beta$. Como $z \in F$, temos que

$$V(z) = V(\phi_0(z)) < \beta \leq V(\phi_{t^*}(z)) = V(x(t^*)).$$

Mas se isso fosse verdade, V não seria uma função de Liapunov pois esta deve ser não-crescente ao longo das trajetórias do campo de vetores. Portanto temos de adimitir que as trajetórias suficientemente próximas da singularidade $\bar{x}$ permanecem próximas da mesma ao longo do tempo. Isso significa que $\bar{x}$ é uma singularidade estável para o campo vetorial f. □

Teorema 2.2.2 (**Método Direto de Liapunov - 2ª parte**) Seja $\bar{x} \in U$ uma singularidade do campo vetorial $f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 no aberto $U \in \mathbb{R}^n$. Se existe uma função de Liapunov estrita para f em $\bar{x}$, então $\bar{x}$ é uma singularidade assintoticamente estável de f.

Demonstração: Seja $V : W \to \mathbb{R}$, definida numa vizinhança $W \subseteq \mathbb{R}^n$ de $\bar{x}$, uma função de Liapunov estrita para f em $\bar{x}$. Dado uma vizinhança $E \subseteq \mathbb{R}^n$ de $\bar{x}$, escolhemos $\epsilon > 0$ tal que $B(\bar{x}, \epsilon) \subseteq E \cap W$. Seja $S(\bar{x}, \epsilon) = \{y \in E \cap W; |y - \bar{x}| = \epsilon\}$ e $\beta = \min_{|y-\bar{x}|=\epsilon} V(x)$. A existência de β é garantida pela continuidade de V e pela compacidade de $S(\bar{x}, \epsilon)$.

Consideremos o conjunto $F = \{z \in B(\bar{x}, \epsilon); |z| < \beta\}$. Desta forma, como provado na primeira parte do método direto de Liapunov,

$$z \in F \Rightarrow \phi_t(z) \in E, \forall t \geq 0.$$

Basta mostrar agora que existe uma vizinhança $C \in \mathbb{R}^n$ de $\bar{x}$ tal que

$$\lim_{t \to +\infty} \phi_t(z) = \bar{x}, \forall z \in C.$$

Mostraremos por contradição. Supomos portanto que para cada $z \in F$, exista $\lambda > 0$ tal que, para todo K inteiro, exista $t_k > K$ tal que $|\phi_t(z) - \bar{x}| \geq \lambda$, ou seja, tal que $\phi_{t_k}(z)$ não pertença a $B(\bar{x}, \lambda)$. No entanto, pela construção de F e de $B(\bar{x}, \epsilon)$, na primeira parte da demonstração, temos que $x_k = \phi_{t_k}(z) \in B(\bar{x}, \epsilon)$, para todo $t_k > 0$. Logo a sequência x_k é limitada. Desta forma, podemos obter uma subsequência convergente dessa sequência, cujo limite $\bar{z}$ pertence a E e não pertence a $B(\bar{x}, \lambda)$. Com isso, temos em particular que $\bar{z} \neq \bar{x}$. Po hipótese, como V é estrita, devemos ter $f(\bar{z}) \neq 0$, ou seja, $\bar{z}$ não deve ser uma singularidade para f.

Como $\bar{z}$ não é uma singularidade, temos que $\bar{z}$ possui a propriedade do fluxo tubular. Isso significa que existe uma vizinhança de $\bar{z}$ que contem uma caixa na qual as trajetórias de f entram por um lado e saem pelo outro lado da caixa.

Podemos observar a caixa em questão na figura 2.4:

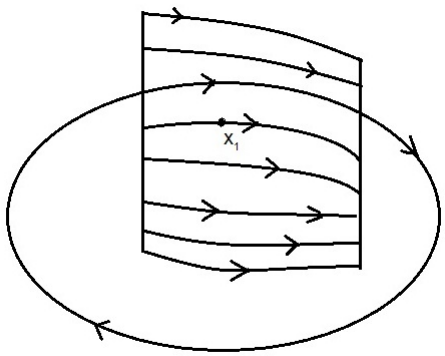

Figura 2.4: Representação da caixa.

Escolheremos uma vizinhança tubular de maneira coveniente. Como $\bar{z} \in W$ e $\bar{z} \neq x_0$, temos $V(\phi_{-\alpha}(\bar{z})) > V(\bar{z}) > V(\phi_\alpha(\bar{z}))$, para cada α suficientemente pequeno. Desta forma, escolhemos a caixa de forma que os pontos $V(\phi_{-\alpha}(\bar{z}))$ e $V(\phi_\alpha(\bar{z}))$ estejam na face extrema de entrada e na face extrema de saída da caixa, respectivamente. Como V é contínua temos que os valores de V nos pontos da face de entrada da caixa são estritamente maiores que os valores de V nos pontos da face de saída da caixa.

Mas como existe uma subsequência de $x_{t_k} = \phi_{t_k}(z)$ convergindo para $\bar{z}$, a trajetória de f por z passa infinitas vezes pela caixa. No entanto, entre um momento de saída da caixa e um momento seguinte de chegada, V necessariamente decresce. Isso acarreta uma contradição.

Portanto temos que adimitir que

$$\lim_{t\to+\infty}\phi_t(z) = \bar{x}, \forall z \in F.$$

Logo temos que $\bar{x}$ é uma singularidade assintoticamente estável para f. $\square$

Podemos verificar facilmente que, pela definição de função de Liapunov, se V for diferenciável em $\{W - x_0\}$ então

$$(V \circ x)'(t) = \langle \nabla V(\phi_t(x)), f(\phi_t(x))\rangle \leq 0,$$

Se V for estrita teremos

$$(V \circ x)'(t) = \langle \nabla V(\phi_t(x)), f(\phi_t(x))\rangle < 0,$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno euclidiano.

Exemplo 2.2.1 Neste exemplo, iremos aplicar o método direto de liapunov para concluir que a origem $(0, 0, 0)$ é um ponto de equilíbrio estável para o sistema abaixo.

Consideremos o sistema

$$\begin{cases} x' = & 2y(z-1) \\ y' = & -x(z-1) \\ z' = & -z \end{cases}$$

A parte linear desse sistema no ponto de equilíbrio dado pela origem $x_0 = (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^n$ é

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

cujos autovalores são $\pm i\sqrt{2}$ e -1. Desta forma não podemos aplicar o método indireto. Vamos tentar encontrar uma função de Liapunov quadrática $V(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2$, com $a, b, c > 0$. Podemos verifiar que $V(0, 0, 0) = 0$ e $V(x) > 0$, para cada $x \neq (0, 0, 0)$. Além disso, temos que:

$$\langle \nabla V(x, y, z), f(x, y, z)\rangle = \langle (2ax, 2by, 2cz), (2yz - 2y, x - xz, -z)\rangle$$

$$= (2b - 4a)xz + (4a - 2b)xyz - 2z^2$$

desta forma, se tomarmos $a = 1$, $b = 2a = 2$ e $c = 1$, resulta a simplificação

$$\langle \nabla V(x, y, z), f(x, y, z)\rangle = -2z^2 \leq 0$$

Disso resulta, pelo **método direto de Liapunov**, que a origem é uma singularidade estável para esse sistema.

Capítulo 3

Aplicações

Neste capítulo serão apresentadas algumas aplicações do método de Liapunov e de Poincaré-Bendixo nos modelos biomatemáticos correspondentes a sistemas presa-predador. Discutiremos as interações desenvolvidas, com base na fundamentação teórica estabelecida, para compreendermos a dinâmica desses sistemas.

Os modelos biomatemáticos são importantes pois podem ser utilizados na simulação e ensaio de senários que naturalmente seriam inviáveis ou até mesmo impossíveis. Este fato está relacionado á estocasticidade dos sistemas naturais e à impossibilidade de controlar várias condições que seriam importantes para a dinâmica do sistema em estudo. No entanto, através dos modelos, quando estes são bem representativos da realidade, podemos prever resultados a longo e médio praso. Com isso, a atividade de modelar e estudar a validez e propriedades importantes desses modelos conduzem á uma metodologia de gestão desses sistemas.

Os modelos relativos a sistemas presa-predador em particular, podem servir como ferramentas de gestão e tomada de decisões para o próprio desenvolvimento sustentável, desde que os agentes (matemáticos aplicados, engenheiros, biólogos, getores, etc...) consigam estabelecer essa ligação entre matemática, biologia e gestão.

3.1 Sistemas Presa-Predador

Quando pensamos em um sistema presa-predador estamos pensando em um processo que compreende a sobrevivência de uma espécie (predador) que se alimenta de outra (presa) e a maneira como ocorre essa interação. A análise da interação presa-predador é motivada por algumas questões:

1. Quanto a predação reduz apopulação de presas?
2. N a ausência de predação, como se comporta a população de presas?
3. O que acontece com o sistema presa-predador se o mesmo é pertubado.
4. A interação presa-predador pode gerar oscilações nass populações? E se isso ocorrer, o que determina a frequência e a amplitude dessas oscilações?

Se x(t) denota a população de presas e y(t) denota a população de predadores no instante t, podemos pensar um sistema presa predador da seguinte forma:

$$\begin{cases} x' = & f(x) - V(x,y)y \\ y' = & U(x,y)y - g(y) \end{cases}$$

Onde,

f(x) = a taxa de crescimento da população de presas na ausência de predadores.

V(x,y) = função resposta de cada predador (taxa de captura da presa por predador).

U(x,y) = resposta numérica do predador (taxa de conversão de presas capturadas em nascimento de predadores por predador).

g(y) = taxa de mortalidade de predadores na ausência de presas.

3.1.1 Resposta Funcional

Essa função descreve como os predadores capturam suas presas. Podemos considerar que a função resposta depende apenas da abundância de presas:

$$V(x,y) = V(x).$$

Logo podemos supor três situações:

. V é uma função linear: Neste caso, se a abundância de presas demenda excessivamente a população de predadores, veremos que esssa situação não é realística.

. V é uma função assintótica: Existe um valor máximo de presas capturadas por predador. Este máximo é determinado pelo mínimo de tempo necessário para capturar e manusear a presa e pelo nível de saturação do predador.

. V é uma função sigmóide: neste caso estamos considerando que a eficiência do predador na captura das presas, portanto da frequência de encontros entre presa e predador, melhora com a experiência do predador.

Podemos supor também que a resposta funcional depende apenas das interações comportamentais dos predadores:

$$\mathrm{V(x,y) = V(y)}$$

Neste caso temos que:

. Se há agressões entre os predadores então V é decrescente.

. Se os predadores caçam em grupos então, V é crescente para y pequeno.

Se não há interação comportamental entre os predadores então V depende unicamente de x.

3.1.2 Resposta Numérica

A resposta numérica do predador descreve como novos predadores surgem de acordo com as presas capturadas. Desta maneira, podemos supor que a resposta numérica é uma função da resposta funcional:

$$\mathrm{U(x,y) = U(V(x,y))}$$

A resposta numérica é uma função difícil de se determinar diretamente, pois seria necessário avaliar a reprodução de uma amostra representativa de predadores sob determinados regimes de abundância de presas. Uma hipótese é que suma fração energética líquida fornecida pela captura de presas é alocada na reprodução de novos predadores. Isto significa que existe uma constante α, tal que $\mathrm{U(x,y)} = \alpha\mathrm{V(x,y)}$.

3.2 Modelo Lotka-Volterra

A primeira representação do comportamento de um sistema presa-predador, foi proposta por volta de 1926 pelo matemático italiano V. Volterra na tentativa de explicar o comportamento das populações de certas espécies de peixes no mar Adriático. Em 1925, o biofísico A. Lotka encontrou as mesmas equações em estudos sobre reações cinéticas.

O modelo de Lotka-Volterra é baseado nas seguintes hipóteses:

1. Na ausência de predadores, a população de presas cresce exponencialmente: $f(x(t)) = ax(t)$, com $a > 0$.
2. Na ausência de presas a população de predadores decresce exponencialmente: $g(y(t)) = by(t)$, com $b > 0$.
3. Não existe interação comportamental entre os predadores. Ou seja, a resposta funcional é uma função apenas da abundância de presas: $V(x(t), x(t)) = V(x(t))$.
4. A resposta funcional é uma função linear: $V(x(t)) = \alpha x(t)$, com $\alpha > 0$.
5. A resposta numérica é uma função linear da resposta funcional:

$$U(x(t)) = \lambda V(x(t)) = \lambda\alpha x = \beta x(t), \text{ com } \lambda > 0, \text{ e portanto, } \beta > 0.$$

Com base nestas hipóteses, o modelo que descreve a dinâmica desse sistema é:

$$\begin{cases} x' = & ax - \alpha xy \\ y' = & \beta xy - by \end{cases}$$

onde:

x = densidade populacional das presas.

y = densidade populacional dos predadores.

a = taxa intrínseca de crescimento das presas na ausência de predadores.

α = taxa de captura de presas pela ação de predadores.

b = taxa de mortalidade de predadores, na ausência de presas.

β = taxa que mede a produção per capita de prole de predadores em função da abundância de presas.

3.2.1 Estabilidade dos Pontos de Equilíbrio

Os pontos de equilíbrio para o modelo Lotka-Volterra são dois:

$$P_1 = (0, 0) \text{ e } P_2 = \left(\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha}\right).$$

Como visto no exemplo 2.1.2, a matriz jacobiana do modelo Lotka-Volterra no ponto P_1 possui dois autovalores reais com sinais diferentes. Portanto, aplicando o **método indireto de Liapunov** vemos que esse ponto é instável, comportando-se como uma sela.

No mesmo exemplo, vimos que no ponto P_2 o jacobiano do modelo Lotka-Volterra em P_2 possui autovalores complexos conjugados com parte real nula. Logo, com o

método indireto de Liapunov, não podemos afirmar nada a respeita da estabilidade desse ponto.

Devemos encontrar uma função de Liapunov para o sistema em P_2.

Para tal estudaremos uma função da forma

$$H(x, y) = F(x) + G(y)$$

tal que $H' \leq 0$, onde

$$H'(x, y) = \frac{dF}{dx}x' + \frac{dG}{dy}y'$$

. Portanto, ao longo das trajetórias do sistema, teremos:

$$H'(x, y) = x\frac{dF}{dx}(a - \alpha y) + y\frac{dG}{dy}(-b + \beta x).$$

Para que H seja constante ao longo das trajetórias do sistema devemos ter

$$\frac{x}{(-b + \beta x)}\frac{dF}{dx} = \frac{y}{(a - \alpha y)}\frac{dG}{dy} = C \text{ (constante)}.$$

Fazendo $C = 1$, teremos

$$\frac{dF}{dx} = \left(\frac{-b}{x} + \beta\right), \frac{dG}{dy} = \left(\frac{a}{y} - \alpha\right).$$

Logo, $F(x) = \beta x - b\ln(x)$ e $G(x) = \alpha y - a\ln(y)$.

Portanto, temos que $H(x, y) = \beta x - b\ln(x) + \alpha y - a\ln(y)$ é constante ao londo das trajetórias do sistema. No entanto, essa ainda não é a função de Liapunov procurada.

Consideremos a função definida por $\bar{H}(x, y) = \beta x - b\ln(x) + \alpha y - a\ln(y) - H\left(\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha}\right)$. A qual, com algumas simplificações, pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\bar{H}(x, y) = \beta x^* \left(\frac{x}{x*} - \ln\left(\frac{x}{x^*}\right) - 1\right) + \alpha y^* \left(\frac{y}{y*} - \ln\left(\frac{y}{y^*}\right) - 1\right)$$

onde $(x^*, y^*) = \left(\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha}\right) = P_2$. Desta forma podemos afirmar dois fatos:

1. $\bar{H}\left(\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha}\right) = 0$ e $\bar{H}(x, y) > 0$, se $(x, y) \neq \left(\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha}\right)$.

Por definição temos $\bar{H}(x,y) = H(x,y) - H\left(\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha}\right)$, logo $\bar{H}\left(\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha}\right) = 0$.

Se $(x,y) \neq \left(\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha}\right)$, então analisando a função definida por

$$\bar{F}(x) = \frac{x}{x*} - \ln\left(\frac{x}{x^*}\right) - 1,$$

veremos que $x = x^*$ é o seu mínimo absoluto e $\bar{F}(x^*) = 0$. Logo,

$$x \neq x^* \Rightarrow \bar{F}(x) > \bar{F}(x^*) = 0.$$

Analogamente, vemos que

$$\bar{G}(y) = \frac{y}{y*} - \ln\left(\frac{y}{y^*}\right) - 1$$

possui mínimo global em $y = y^*$ e portanto

$$y \neq y^* \Rightarrow \bar{G}(y) > \bar{G}(y^*) = 0.$$

Consequentemente, $\left(\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha}\right)$ é mínimo global de $\bar{H}$. Portanto,

$$(x,y) \neq \left(\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha}\right) \Rightarrow \bar{H}(x,y) > \bar{H}\left(\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha}\right) = 0.$$

2. $\bar{H}$ é constante ao longo das trajetórias do sistema.

$$\langle \nabla\bar{H}(x,y), (x',y')\rangle = \frac{dF}{dx}x' + \frac{dG}{dy}y' =$$

$$\left(\frac{-b}{x} + \beta\right)x' + \left(\frac{a}{y} - \alpha\right)y' =$$

$$\left(\frac{-b}{x} + \beta\right)(ax - \alpha xy) + \left(\frac{a}{y} - \alpha\right)(\beta xy - by) =$$

$$(-b + x\beta)(a - \alpha y) + (a - y\alpha)(\beta x - b) = 0.$$

De 1. e 2. segue que $\bar{H}$ é uma função de Liapunov para o sistema em P_2. Logo pelo método direto de Liapunov, temos que P_2 é um ponto de equilúbrio estável para o modelo Lotka-Volterra. Além disso, como as curvas de nível de $\bar{H}$ são fechadas, e

cada curva de nível determina uma órbita para o sistema, podemos concluir que todas as órbitas do sistema são periódicas.

Fixando os parâmetros para a = 0.296, b = 0.254, $\alpha = 0.343$ e $\beta = 0.246$, a função de Liapunov para o sistema

$$\begin{cases} x' = & 0.296x - 0.343xy \\ y' = & 0.246xy - 0.254y \end{cases}$$

é

$$\bar{H}(x, y) = 0.254(0.246/0.254x - \ln[0.246/0.254x] - 1)+$$

$$0.296(0.343/0.296y - \ln[0.343/0.296y] - 1)$$

O gráfico dessa função pode ser observado na figura 3.1:

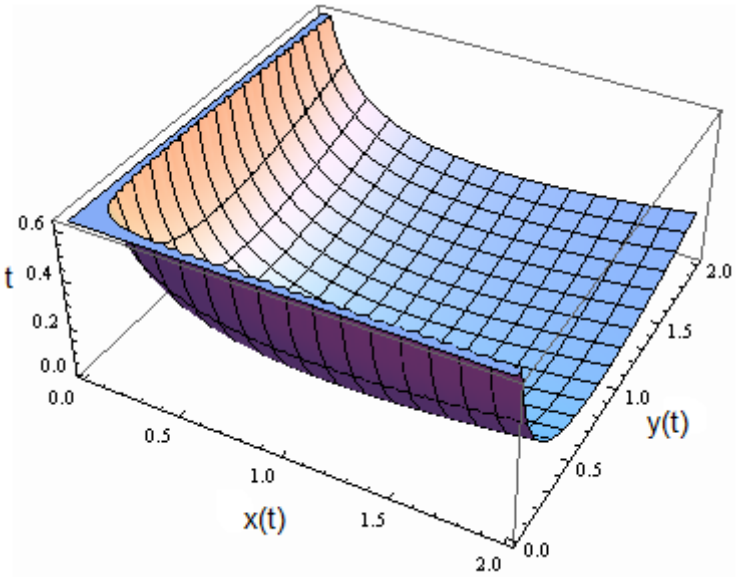

Figura 3.1: Gráfico da função de Liapunov para o modelo Lotika-Volterra.

Fixando dois valores para $\bar{H}(x, y) = 0.17$ e $\bar{H}(x, y) = 0.052$, teremos as curvas de nível na figura 3.2:

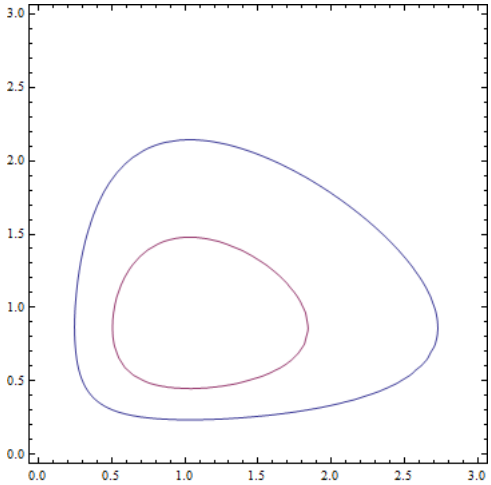

Figura 3.2: Curvas de nível fixadas.

Desenhando o campo de direções, veremos a orientação das órbitas desse sistema. Vejamos a figura 3.3:

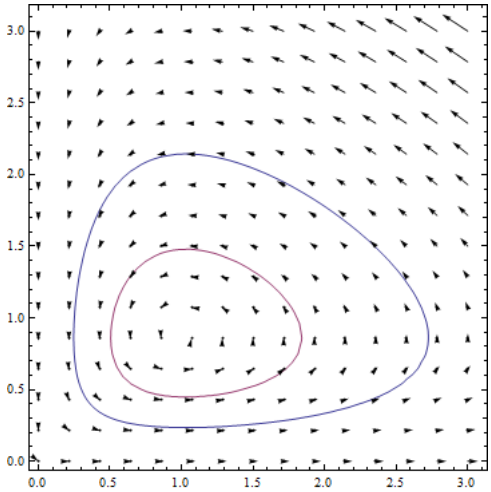

Figura 3.3: Campo de direções do sistema Lotka-Volterra.

No exemplo anterior foi desenhado o campo de direções do sistema Lotka-Volterra para um caso particular. Analisaremos agora o sinal dos vetores tangentes para quaisquer parâmetros e veremos que as orientações se comportam da mesma maneira.

Estudaremos agora o sinal dos vetores tangentes.

1. Para $x' > 0$ e $y' > 0$ teremos $x > \dfrac{b}{\beta}$ e $y < \dfrac{a}{\alpha}$.

2. Para $x' < 0$ e $y' > 0$ teremos $x > \dfrac{b}{\beta}$ e $y > \dfrac{a}{\alpha}$.

3. Para $x' < 0$ e $y' < 0$ teremos $x < \dfrac{b}{\beta}$ e $y > \dfrac{a}{\alpha}$.

4. Para $x' > 0$ e $y' < 0$ teremos $x < \dfrac{b}{\beta}$ e $y < \dfrac{a}{\alpha}$.

Ddesta maneira, denotando $x^* = \dfrac{b}{\beta}$ e $y^* = \dfrac{a}{\alpha}$, teremos o seguinte comportamento ilustrado na figura 3.4:

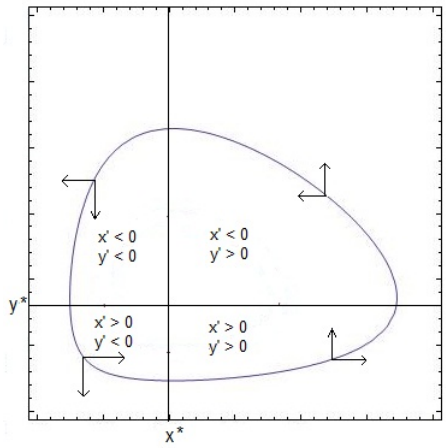

Figura 3.4: Análise do sinal dos vetores.

Neste esquema podemos observar que a orientação das órbitas estão sempre acompanhando um pradrão de oscilação. Ou seja, na presença de poucos predadores a população de presas aumenta, esse aumento faz com que a população de predadores, pela maior disponibilidade de alimento, aumente. Com o aumento dos predadores a população de presas diminui e isso faz com que a população de predadores diminua novamente, reiniciando um novo ciclo no sistema. Desta maneira, a população de presas regula a população de predadores e vice-versa.

Esse padrão de oscilação pode ser visualisado através figura 3.5:

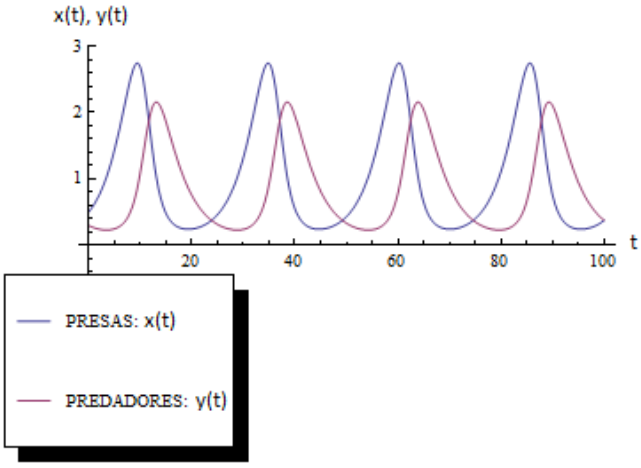

Figura 3.5: Padrão de oscilação do modelo Lotka-Volterra.

A a amplitude e a frequência dessas oscilações depedende dos valores estabelecidos para os parâmetros.

3.3 Modelo Presa-Predador Generalizado

O modelo presa-predador generalizado, como o próprio nome sugere, generaliza o modelo presa-predador clássico proposto por Lotka-Volterra. Esse modelo fundamenta-se em hipóteses qualitativas da interação presa-predador, sendo representado pelo sistema de equações diferenciais abaixo onde x denota a população de presas e y denota a população de predadores:

$$\begin{cases} x' = & xf(x) - v(x)y \\ y' = & -\beta y + u(x)y \end{cases}$$

Neste modelo temos que:

f(x) é a taxa de crescimento da população de presas na ausência de predadores;

v(x) é a resposta funcional da população de predadores em relação ás presas;

u(x) é a resposta numérica da população de predadores; e

$\beta > 0$ é a taxa de mortalidade da população de predadores na ausência de presas.

As aplicações que estão inseridas nesse sistema estão subordinadas às seguintes condições:

Taxa de crescimento das presas (f):

1. $f(0) = \alpha > 0$, f é contínua em $[0, +\infty)$ e de classe C^1 em $(0, +\infty)$, com $\frac{df}{dx}(x) \leq 0$.
2. Se existir a capacidade de suporte do meio ambiente, temos que:

$$\exists k > 0; f(k) = 0.$$

Neste caso, k é a capacidade de suporte do meio ambiente que traduz a quantidade de presas que o ambiente sustenta, na ausência de predação, com seus recursos limitados. Essa hipótese é no mínimo necessária para descrever a dinâmica de um sistema presa-predador de maneira mais realista.

Resposta funcional (v):

1. $v(0) = 0$, v é contínua em $[0, +\infty)$ e de classe C^1 em $(0, +\infty)$, com $v'(x) > 0$.

2. $\lim_{x\to+\infty} v(x) = v_{+\infty}$, $0 < v_{+\infty} < +\infty$. Neste caso assumimos que a capacidade de predação da população de predadores é limitada.

3. $v'(0) = \delta > 0$.

Resposta numérica (u):

1. $u(0) = 0$, v é contínua em $[0, +\infty)$ e de classe C^1 em $(0, +\infty)$, com $u'(x) > 0$.

2. $\lim_{x\to+\infty} u(x) = u_{+\infty}$, $0 < u_{+\infty} < +\infty$. Neste caso assumimos que a capacidade de reprodução de predadores por presa consumida é limitada.

3. $u'(0) = \gamma > 0$.

Observando o modelo presa-predador generalizado podemos verificar que na ausência de predadores, a população de presas comporta-se como uma população isolada e cresce de acordo com a expressão da taxa de crescimento f(x). Com a presença de predadores, a população de presas é desfavorecida pelo grau de encontro com os predadores. Por outro lado, na ausência de presas, a população de predadores decresce exponencialmente. Com a aparecimento das presas, a população de predadores é favorecida pelo grau de encontro com as presas, enviando imediatamente uma resposta numérica que reflete a reprodução de novos predadores.

Analisaremos agora alguns fatos importantes desse modelo.

3.3.1 Pontos de Equilíbrio

Verificando as condições impostas sobre os parâmetros do modelo, podemos verificar facilmente a existência de dois pontos de equilíbrio para o modelo, que são:

$$P_1 = (0, 0) \text{ e } P_2 = (k, 0).$$

Além desses dois pontos de equilíbrio, podemos obter um outro ponto de equilíbrio não trivial $P_3 = (x^*, y^*)$, no interior do primeiro quadrante do plano xy. A existência de tal ponto de equilíbrio é condicionada pelas seguintes hipóteses:

1. Para uma população grande de presas, a taxa de crescimento da população de predadores é maior que sua taxa de mortalidade. Isso significa que $u_{+\infty} > \beta$.

2. Se existir a capacidade de suporte do ambiente, a população de predadores induz a população de presas a permanecer em quantidade abaixo da capacidade de suporte. Isso significa que $x^* < k$.

Na violação de uma ou de ambas as hipóteses, teremos a extinção da população de predadores. Desta forma o ponto de equilíbrio (x^*, y^*) não estaria no interior do plano xy.

Com base nestas hipóteses, calculando o ponto de equilíbrio $P_3 = (x^*, y^*)$, fazendo $x' = 0, x > 0$ e $y' = 0, y > 0$, teremos:

$$P_3 = (x^*, y^*) = \left(x^*, \frac{x^* f(x^*)}{v(x^*)}\right), \text{ onde } x^* > 0 \text{ é tal que } u(x^*) = \beta.$$

3.3.2 Análise de Estabilidade dos Pontos de Equilíbrio

Analisaremos agora a estabilidade dos pontos de equilíbrio, aplicando o método indireto de Liapunov.

Para tal, precisamos calcular a matriz jacobiana do sistema. Denotando

$$F(x, y) = xf(x) - v(x)y \text{ e } G(x, y) = -\beta y + u(x)y,$$

temos que:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = f(x) + xf'(x) - yv'(x).$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = -v(x).$$

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x, y) = yu'(x).$$

$$\frac{\partial G}{\partial y}(x, y) = -\beta + u(x).$$

Portanto, a matriz jacobiana para o modelo presa-predador generalizado é:

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} f(x) + xf'(x) - yv'(x) & -v(x) \\ yu'(x) & -\beta + u(x) \end{bmatrix}$$

Aplicando a matriz jacobiana no ponto de equilíbrio $P_1 = (0, 0)$, teremos a matriz:

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} f(0) & 0 \\ 0 & -\beta \end{bmatrix}$$

Os autovalores de $J(0, 0)$ são $\lambda_1 = f(0) = \alpha > 0$ e $\lambda_2 = -\beta < 0$.

Logo, aplicando o método indireto de Liapunov, temos que o ponto $P_1 = (0, 0)$ é instável comportando-se como uma sela.

Aplicando a matriz jacobiana no ponto de equilíbrio $P_2 = (k, 0)$, teremos a matriz:

$$J(k,0) = \begin{bmatrix} kf'(k) & -v(k) \\ 0 & -\beta + u(k) \end{bmatrix}$$

Os autovalores de $J(k,0)$ são $\lambda_1 = kf'(k) < 0$ e $\lambda_2 = -\beta + u(k) > 0$. O sinal desses autovalores decorre das condições estabeledidas para f e u.

Logo, aplicando o método indireto de Liapunov, temos que o ponto $P_2 = (k,0)$ é instável comportando-se também como uma sela.

Aplicando a matriz jacobiana no ponto de equilíbrio $P_3 = (x^*, y^*)$, teremos a matriz:

$$J(x^*, y^*) = \begin{bmatrix} L(x^*) & -v(x^*) \\ y^*u'(x^*) & 0 \end{bmatrix}$$

Onde $L(x^*) = f(x^*) + x^*f'(x^*) - y^*v'(x^*) = f(x^*) + x^*f'(x^*) - \dfrac{x^*f(x^*)}{v(x^*)}v'(x^*)$.

Os autovalores de $J(x^*, y^*)$ são

$$\lambda_{1,2} = \frac{L(x^*) \pm \sqrt{L^2(x^*) - 4v(x^*)y^*u'(x^*)}}{2}.$$

Desta maneira teremos os seguintes casos:

1. Se $L^2(x^*) - 4v(x^*)y^*u'(x^*) > 0$ e $L(x^*) > 0$ então $P_3 = (x^*, y^*)$ será localmente um nó instável para o sistema.
2. Se $L^2(x^*) - 4v(x^*)y^*u'(x^*) > 0$ e $L(x^*) < 0$ então $P_3 = (x^*, y^*)$ será localmente um nó estável para o sistema.
3. Se $L^2(x^*) - 4v(x^*)y^*u'(x^*) < 0$ e $L(x^*) > 0$ então $P_3 = (x^*, y^*)$ será localmente uma espiral instável para o sistema.
4. Se $L^2(x^*) - 4v(x^*)y^*u'(x^*) < 0$ e $L(x^*) < 0$ então $P_3 = (x^*, y^*)$ será localmente uma espiral estável para o sistema.

Se tivermos $L(x^*) = 0$, nada podemos afirmar a respeito da estabilidade de P_3.

A estabilidade do ponto de equilíbrio não trivial $P_3 = (x^*, y^*)$, pode ser analisada de uma forma gráfica. Um dos métodos gráficos é o método de Rosenzweig e Mac Arthur, que consiste no estudo das isóclinas não triviais do sistema.

No sistema presa-predador, as isóclinas são as curvas no plano xy nas quais temos $x' = 0$ ou $y' = 0$.

No sistema presa-predador generalizado em particular teremos, para $x > 0$ e $y > 0$:

1. x - isóclina:

$$xf(x) - v(x)y = 0 \Rightarrow y = \frac{xf(x)}{v(x)}.$$

2. y - isóclina:

$$-\beta y + u(x)y = 0 \Rightarrow u(x) = \beta \Rightarrow x = x^*.$$

Ou seja, a x - isóclina é a curva $y = \dfrac{xf(x)}{v(x)}$ e a y - isóclina é a reta $x = x^*$.

Com relação a essas curvas, podemos verificar que:

1. A x - isóclina passa pelos pontos $(k, 0)$, (x^*, y^*) e por um terceiro ponto $(0, \bar{y})$, onde:

$$\bar{y} = \lim_{x\to 0}\frac{xf(x)}{v(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x) + xf'(x)}{v'(x)} = \frac{\alpha}{\delta}.$$

2. Como a y - isóclina passa pelo ponto (x^*, y^*) temos que esse ponto de equilíbrio é o ponto onde ambas a isóclinas não-triviais se cruzam.

Para estudar graficamente a estabilidade de (x^*, y^*), analisaremos o fator $\dfrac{L(x^*)}{x^*f(x^*)}$. Como $x^*f(x^*) > 0$, temos que o sinal de $\dfrac{L(x^*)}{x^*f(x^*)}$ é determinado pelo sinal de $L(x^*)$. Calculemos então essa expressão:

$$\frac{L(x^*)}{x^*f(x^*)} = \frac{f(x^*) + x^*f'(x^*) - \dfrac{x^*f(x^*)}{v(x^*)}v'(x^*)}{x^*f(x^*)}$$

$$= \frac{f(x^*) + x^*f'(x^*)}{x^*f(x^*)} - \frac{v(x^*)}{v'(x^*)} = \frac{(xf(x))'(x^*)}{x^*f(x^*)} - \frac{v(x^*)}{v'(x^*)}$$

$$= [\ln(xf(x))]'(x^*) - [\ln(v(x))]'(x^*) = \left[\ln\left(\frac{xf(x)}{v(x)}\right)\right]'(x^*).$$

Como $\ln(z)$ é crescente, pela regra da cedeia, o sinal de $\left[\ln\left(\dfrac{xf(x)}{v(x)}\right)\right]'(x^*)$ é determidado pelo sinal de $\left[\dfrac{xf(x)}{v(x)}\right]'(x^*)$. Logo, teremos os seguintes casos:

1. Se $\left[\dfrac{xf(x)}{v(x)}\right]'(x^*) > 0$, então $\dfrac{L(x^*)}{x^*f(x^*)} > 0$. Logo $L(x^*) > 0$ e portanto (x^*, y^*) é instável.

2. Se $\left[\dfrac{xf(x)}{v(x)}\right]'(x^*) < 0$, então $\dfrac{L(x^*)}{x^*f(x^*)} < 0$. Logo $L(x^*) < 0$ e portanto (x^*, y^*) é estável.

Com isso, podemos elaborar a seguinte interpretação geométrica:

Se as isóclinas não triviais do sistema presa-predador generalizado se cruzam em um ponto onde a x - isóclina é crescente então esse ponto é um equilíbrio instável. Se porém essas isóclinas se cruzarem em um ponto onde a x - isóclina é decrescente então esse ponto é um equilíbrio estável.

A figura 3.6 ilustra este fato geometricamente.

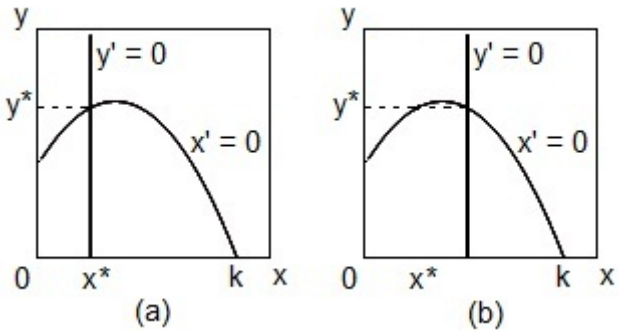

Figura 3.6: (a) Ponto de equilíbbrio instável; (b) Ponto de equilíbrio estável

3.3.3 Existência de Órbitas Periódicas

Um dos casos fundamentais na análise de sistemas presa-predador é saber as condições nas quais existe uma órbita periódica. Esse fato é importante pois fornece subsídios para analisar a sustentabilidade desses sistemas e contrbui para o entendimeto global da dinâmica dos mesmos.

Para analisar a existência de órbitas periódicas precisamos conhecer o comportamento dos vetores tangentes no plano de fase.

Considerando as isóclinas x, y e a reta $x = k$, podemos dividir o espaço de fase em cinco regiões:

Região I: $x > x^*$ e $y > \dfrac{xf(x)}{v(x)}$.

Região II: $x < x^*$ e $y > \dfrac{xf(x)}{v(x)}$.

Região III: $x < x^*$ e $y < \dfrac{xf(x)}{v(x)}$.

Região IV: $x > x^*$ e $y < \dfrac{xf(x)}{v(x)}$.

Região V: $x > k$ e $y > 0$.

A figura 3.7 representa todas as cinco regiões delimitadas pelas isóclinas do sistema.

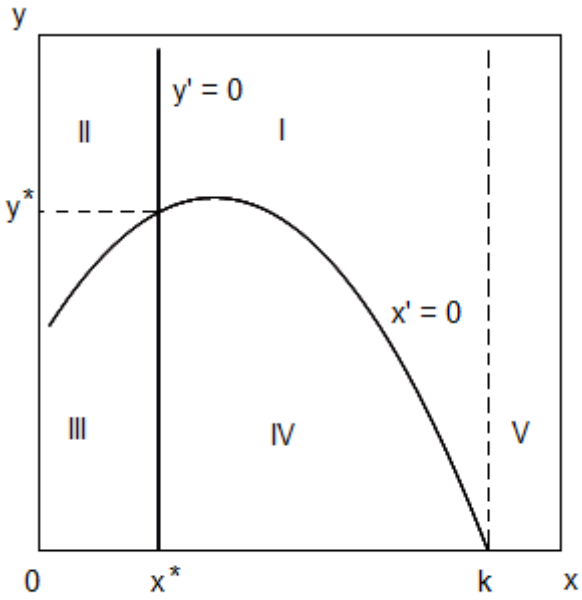

Figura 3.7: Delimitação das regiões pelas isóclinas do sistema.

Estudando o sinal de x' e y', teremos:

$x' > 0 \Rightarrow xf(x) - v(x)y > 0 \Rightarrow y < \dfrac{xf(x)}{v(x)}$.

$x' < 0 \Rightarrow xf(x) - v(x)y > 0 \Rightarrow y < \dfrac{xf(x)}{v(x)}$.

$y' > 0 \Rightarrow -\beta y - u(x)y > 0 \Rightarrow u(x) > \beta \Rightarrow x > x^*$, pois u é crescente.

$y' < 0 \Rightarrow -\beta y - u(x)y < 0 \Rightarrow u(x) < \beta \Rightarrow x < x^*$.

Logo teremos o seguinte comportamento:

No interior da região I teremos $x' < 0$ e $y' > 0$, e portanto, $\dfrac{dy}{dx} < 0$.

No interior da região II teremos $x' < 0$ e $y' < 0$, e portanto, $\dfrac{dy}{dx} > 0$.

No interior da região III teremos $x' > 0$ e $y' < 0$, e portanto, $\dfrac{dy}{dx} < 0$.

No interior da região IV teremos $x' > 0$ e $y' > 0$, e portanto, $\dfrac{dy}{dx} > 0$.

No interior da região V teremos $x' < 0$ e $y' > 0$, e portanto, $\dfrac{dy}{dx} < 0$.

O comportamento dos vetores pode ser observado na figura 3.8.

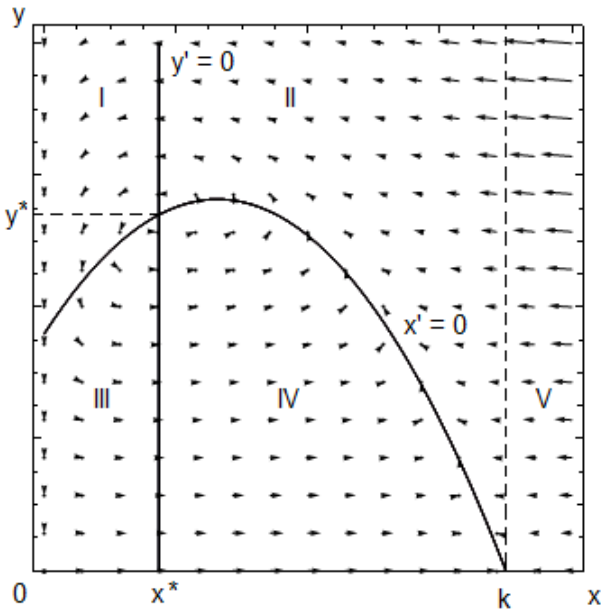

Figura 3.8: Representação dos vetores tangentes nas cinco regiões.

Seja (x_0, y_0) pertencente à região V. Desta forma temos

$$\frac{dy}{dx}(x_0, y_0) = \frac{-\beta + u(x_0)}{\dfrac{x_0 f(x_0)}{y_0} - v(x_0)} < 0,$$

com $-\beta + u(x_0) > 0$ e $\dfrac{x_0 f(x_0)}{y_0} - v(x_0) < 0$.

Como $x_0 > k$, temos que $\dfrac{x_0 f(x_0)}{y_0} < 0$. Portanto, temos que $\dfrac{x_0 f(x_0)}{y_0} - v(x_0) < -v(x_0)$ o que implica

$$\frac{-\beta + u(x_0)}{-v(x_0)} < \frac{-\beta + u(x_0)}{\dfrac{x_0 f(x_0)}{y_0} - v(x_0)} = \frac{dy}{dx}(x_0, y_0) < 0.$$

Como $\dfrac{-\beta + u(x)}{-v(x)}$ é contínua em $[k, x_0]$, temos que existe $\displaystyle\inf_{k \le c \le x_0} \frac{-\beta + u(c)}{-v(c)}$. Logo teremos

$$\inf_{k \le c \le x_0} \frac{-\beta + u(c)}{-v(c)} \le \frac{dy}{dx}(x_0, y_0) \le 0.$$

Se $k \le x_1 \le x_0$, então

$$\inf_{k \le c \le x_1} \frac{-\beta + u(c)}{-v(c)} \ge \inf_{k \le c \le x_0} \frac{-\beta + u(c)}{-v(c)}.$$

Logo teremos que $x \in [k, x_0]$ implica

$$0 > \frac{-\beta + u(x)}{\dfrac{xf(x)}{y} - v(x)} > \frac{-\beta + u(x)}{-v(x)} \ge \inf_{k \le c \le x} \frac{-\beta + u(c)}{-v(c)} \ge \inf_{k \le c \le x_0} \frac{-\beta + u(c)}{-v(c)}.$$

Ou seja, $\dfrac{dy}{dx}(x, y) \in \left[\displaystyle\inf_{k \le c \le x_0} \frac{-\beta + u(c)}{-v(c)}, 0 \right]$, $\forall x \in [k, x_0]$.

Isso significa que uma solução iniciada na região V seguirá para cima e à esquerda, em direção à região I, com inclinação negativa e limitada. Desta maneira, deve passar pela reta $x = k$, em um tempo finito, antes de entrar na região I.

Na reta $x = k$, teremos

$$\frac{dy}{dx}(k, y) = \frac{-\beta + u(k)}{\dfrac{kf(k)}{y} - v(k)} = \frac{-\beta + u(k)}{-v(k)}, \ \forall y > 0.$$

Logo todas as soluções iniciadas na região V, cruzam a reta $x = k$ com a mesma inclinação igual a $\dfrac{-\beta + u(k)}{-v(k)}$.

Suponhamos agora que uma solução (Φ) iniciada na região V cruza a reta $x = k$, em determinado tempo finito, no ponto (k, y_1), onde $y_1 > \max \dfrac{xf(x)}{y}$, passando desta maneira para a região I, com inclinação negativa.

Como $[x^*, k] \times [y_1, +\infty)$ é limitado inferiormente e $\dfrac{-\beta + u(x)}{xf(x) - v(x)}$ é contínua em $[x^*, k] \times [y_1, +\infty)$, existe $\displaystyle\inf_{\substack{x^* \le x \le k \\ y > y_1}} \frac{-\beta + u(x)}{xf(x) - v(x)}$.

Portanto $\inf\limits_{\substack{x^* \leq x \leq k \\ y > y_1}} \dfrac{-\beta + u(x)}{xf(x) - v(x)} \leq \dfrac{dy}{dx}(x, y)$, $\forall (x, y) \in [x^*, k] \times [y_1, +\infty)$.

Isso significa que a solução Φ seguirá para cima e à esquerda com inclinação negativa e limitada em direção à região II, cruzando a isóclina dos predadores ($x = x^*$) em tempo finito antes de passar para a região II.

Na região II, Φ segue para cima e à esquerda com inclinação positiva. Essa solução não cruza o eixo vertical ($x = 0$) pois este é uma soluçao para o sistema, devendo portanto cruzar a isóclina das presas $\left(\dfrac{xf(x)}{y}\right)$ em um tempo finito e passando para a região III.

Na região III, Φ segue para baixo e à direita com inclinação negativa. Essa solução não cruza o eixo horizontal ($y = 0$) pois este é uma solução para o sistema, devendo portanto cruzar a isóclina dos predadores ($x = x^*$) em um tempo finito e passando para a região IV.

Na região IV, Φ segue para cima e à direita com inclinação positiva. Como $(k, 0)$ é um ponto de sela para o sistema, Φ deve cruzar a isóclina das presas $\left(\dfrac{xf(x)}{y}\right)$ em um tempo finito e passando para a região I, sem se autocruzar.

Desta maneira, observamos que a solução Φ tende a se aproximar do ponto de equilíbrio (x^*, y^*). Logo, pelo teorema de Poincaré-Bendixon, o que vai determinar a existência de ciclos limites será a estabilidade de $P_3 = (x^*, y^*)$.

Podemos observar esses fatos na figura 3.9:

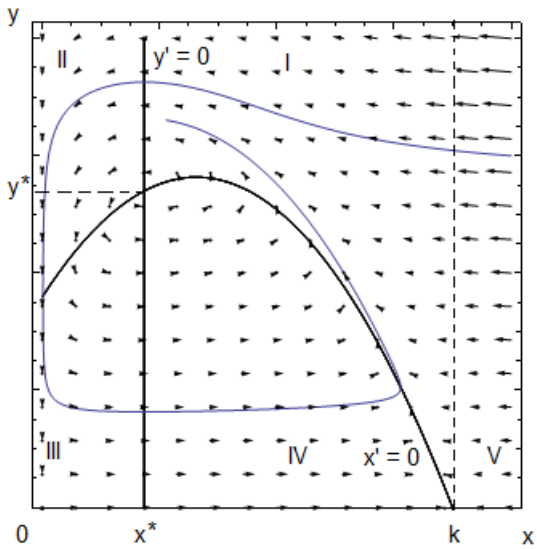

Figura 3.9: Comportamento de uma órbirta iniciada na região V.

Com isso, teremos os seguintes casos:

1. Se (x^*, y^*) for estável então não existe ciclos limites ou existe um ciclo limite externamente estável.

2. Se (x^*, y^*) for instável então existe um ciclo limite externamente e internamente estável.

Exemplo 3.3.1 Para ilustrar os fatos discutidos no modelo presa-predador generalizado consideremos o seguinte caso particular em que a resposta funcinal é uma função assintótica:

$$\begin{cases} x' = & rx\left(1 - \dfrac{x}{k}\right) - \dfrac{mx}{w+x}y \\ y' = & -\beta y \quad + \quad c\dfrac{mx}{w+x}y \end{cases}$$

Neste sistema **x** denota a população de presas e **y** denota a população de predadores. Os parâmetros são constantes reais positivas, abaixo identificados:

r é a taxa intrínseca de crescimento das presas na ausência de predadores;

k é a capacidade de suporte do ambiente sobre a população de presas;

m é a taxa máxima de ataque dos predadores;

w é a população de presas no nível de saturação dos predadores;

β é a taxa de mortalidade da população de predadores na ausência de presas; e

c é a taxa de conversão das presas capturadas em novos predadores.

Fazendo $x' = 0$ e $y' = 0$, encontraremos as isóclinas desse sistema:

1. x - isóclinas: $x = 0$ ou $y = \dfrac{r}{m}(x + w)\left(1 - \dfrac{x}{k}\right)$.
2. y - isóclinas: $y = 0$ ou $x = \dfrac{\beta w}{cm - \beta}$.

Essas curvas fornecem os seguintes pontos de equilíbrio:

$$P_1 = (0, 0),\ P_2 = (k, 0) \text{ e } P_3 = (x^*, y^*).$$

Onde,

$$x^* = \frac{\beta w}{cm - \beta} \text{ e } y^* = \frac{r}{m}(x^* + w)\left(1 - \frac{x^*}{k}\right).$$

Para que a existência de P_3 no interior do primeiro quadrante seja garantida, deve-se ter:

1. $cm > \beta$; e
2. $k > \dfrac{\beta w}{cm - \beta}$.

Pela análise feita no modelo presa-predador generalizado, com a aplicação do **método indireto de liapunov**, chegou-se à seguinte conclusão:

1. $P_3 = (0, 0)$ é um ponto de equilíbrio instável, comportando-se localmente como uma sela.
2. $P_3 = (k, 0)$ é também um ponto de equilíbrio instável, comportando-se localmente como uma sela.
3. Se as isóclinas não triviais do sistema presa-predador generalizado se cruzam em um ponto, neste caso o ponto (x^*, y^*), onde a x - isóclina é crescente então esse ponto é um equilíbrio instável. Se porém essas isóclinas se cruzarem em um ponto onde a x - isóclina é decrescente então esse ponto é um equilíbrio estável.

No terceiro item, para discutirmos a estabilidade de P_3, precisamos estudar o sinal da derivada de $y(x) = \dfrac{r}{m}(x + w)\left(1 - \dfrac{x}{k}\right)$ no ponto $x = x^*$.

Derivando portanto essa função, que representa a x-isóclina, teremos:

$$y'(x) = \frac{r}{mk}(k - 2x - w).$$

Aplicando $y'(x)$ em x^*, teremos:

$$y'(x^*) = \frac{r}{mk}\left(k - w\frac{\beta + cm}{cm - \beta}\right).$$

Logo, temos que:

1. $y'(x^*) > 0$, se $k > w\dfrac{\beta + cm}{cm - \beta}$.
2. $y'(x^*) < 0$, se $\dfrac{\beta w}{cm - \beta} < k < w\dfrac{\beta + cm}{cm - \beta}$.

Ou seja, P_3 é assintoticamente estável se $\dfrac{\beta w}{cm - \beta} < k < w\dfrac{\beta + cm}{cm - \beta}$ e é instável se $k > w\dfrac{\beta + cm}{cm - \beta}$.

Outra conclusão na análise do modelo presa-predador generalizado foi a seguinte: se o ponto P_3 é instável, então existe um ciclo limite externa e internamente estável no espaço de fase do sistema. Neste exemplo em particular, podemos dizer que esse ciclo limite existe se $k > w\dfrac{\beta + cm}{cm - \beta}$.

Fixando os parâmetros, $\mathbf{r} = 0.535$, $\mathbf{m} = 0.259$, $\beta = 0.0416$, $\mathbf{w} = 174$, $\mathbf{c} = 0.288$ e variando $\mathbf{k}$, encontraremos os diversos comportamentos para o retrato de fase do sistema tratado neste exemplo.

1. Para $k \in [220, 410]$, teremos que o ponto de equilíbrio $P_3 = (x^*, y^*)$ é localmente um nó estável para o sistema. A figura 3.10, ilustra o caso em que $k = 418$.

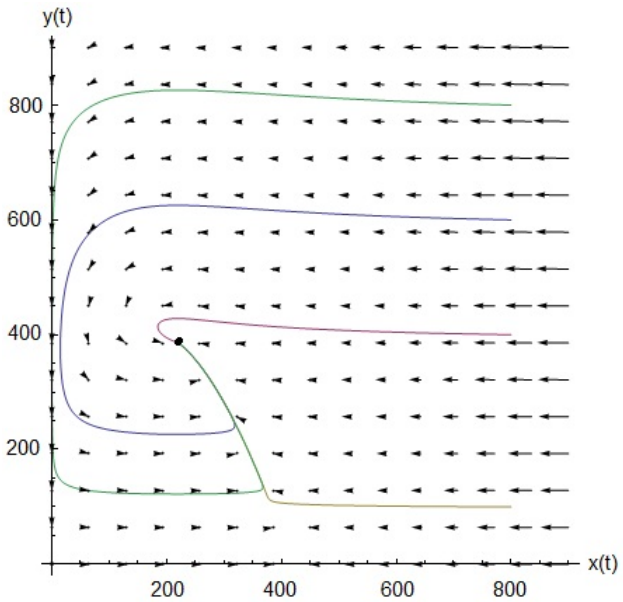

Figura 3.10: Nó estável para o sistema presa-predador.

2. Para $k \in [420; 612]$, teremos que o ponto de equilíbrio $P_3 = (x^*, y^*)$ é localmente uma espiral estável para o sistema. A figura 3.11, ilustra o caso em que $k = 590$.

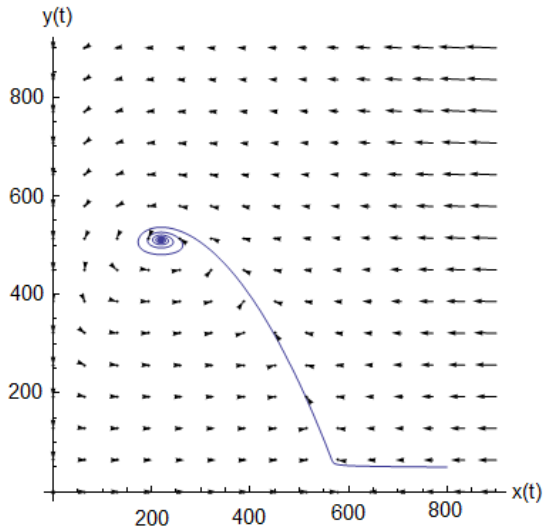

Figura 3.11: Espiral estável para o sistema presa-predador.

3. Para $k \in [613, 1603]$, teremos que o ponto de equilíbrio $P_3 = (x^*, y^*)$ é localmente uma espiral instável para o sistema, existindo portando um ciclo limite externa e internamente estável. A figura 3.12, ilustra o caso em que $k = 700$.

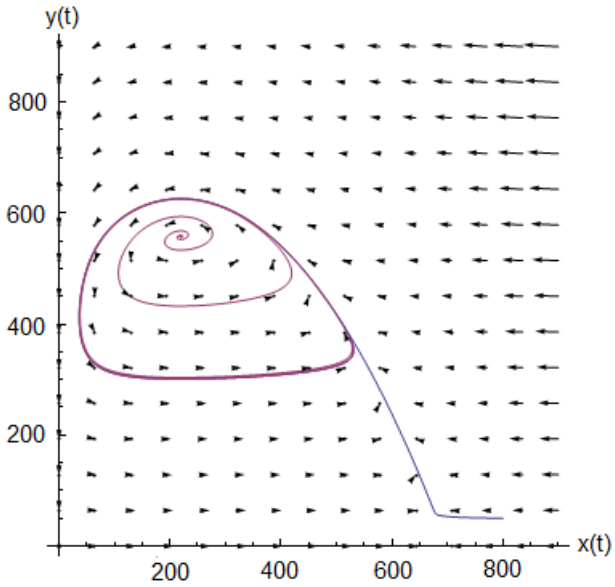

Figura 3.12: Espiral instável para o sistema presa-predador.

4. Para $k \in [1604, +\infty)$, teremos que o ponto de equilíbrio $P_3 = (x^*, y^*)$ é localmente um nó instável para o sistema, existindo portando um ciclo limite externa e internamente estável. A figura 3.13, ilustra o caso em que $k = 1604$.

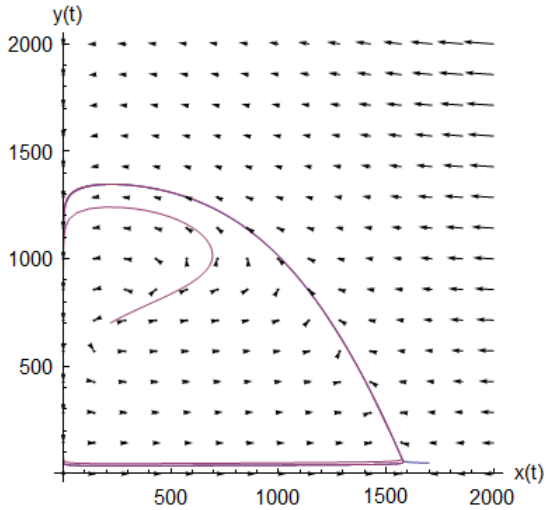

Figura 3.13: Nó instável para o sistema presa-predador.

Capítulo 4

Discussões

4.1 Campos Vetoriais

Neste trabalho foi investigado propriedades qualitativas dos campos vetoriais não-lineares autônomos, que são aqueles que não dependem explicitamente do tempo, também chamados de campos invariantes. Esses campos definem equações diferenciais que descrevem como determinado fenômeno varia em tempo contínuo, num domínio aberto chamado de espaço de fase.

Pode ser constatado que os campos autônomos não-lineares possuem uma riqueza dinâmica muito mais complexa do que os campos lineares. Podemos destacar que a evolução de um sistema não-linear autônomo depende das condições iniciais as quais o sistema está sujeito, ao contrário de sistemas definidos por campos autônomos lineares, nos quais a evolução independe das condições iniciais. Além disso, os campos não-lineares podem apresentar mais de uma singularidade isolada, o que contribui para a riqueza dinâmica desses sistemas. Em contrapartida, os sistemas lineares, apresentam uma única singularidade isolada que é a origem.

Uma das questões cruciais no estudo de sistemas autônomos não-lineares é saber as condições nas quais existe uma solução e se existe, saber se ela é única em determinado ponto do espaço de fase. Isso é garantido, como foi mencionado na fundamentação teórica, sempre que o campo for de classe C^1 no seu espaço de fase. A continuidade do campo é condição suficiente apenas para a existência de soluções, sendo a diferenciabilidade contínua necessária para a unicidade. Neste trabalho foi discutido a existência e unicidade de soluções e os possíveis casos que não podem acontecer em campos autônomos diferenciavelmente contínuos. Dentre esses casos, foi verificado que duas órbitas quaisquer não podem se cruzar e nem pussuir um ponto tangencial, pois desta maneira aflingiria a continuidade do campo e sua diferenciabilidade contínua respectivamente.

Além disso, foi definido alguns aspectos relevantes para a compreensão das propriedades qualitativas dos sistemas autônomos. Essas definições emglobam a noção de soluções máximas, fluxo global, singularidades, retrato de fase e conjugação local. As soluções nem sempre estão definidas em toda a reta, podendo existir soluções definidas em intervalos limitados chamados de intervalos máximos. As soluções triviais e

periódicas, cujas imagens no plano de fase são as únicas órbitas compactas, sempre estão definidas em toda a reta. O fluxo global do campo, evidencia o comportamento do sistema levando em consideração todas as condições iniciais, e é um dos conceitos chave para entender a estabilidade dos sistemas autônomos. O retrato de fase, que é uma partição do espaço de fase em órbitas do sistema, é um elemento esencial para entender a dinâmica dos campos autônomos. Por fim, uma conjugação local entre dois campos autônomos, preservam suas qualidades dinâmicas. Isto está intimamente relacionado ao comportamento local de singularidades do campo e é uma ferramenta útil para descrever como se comportam as soluções próximas destas. Por exemplo, procedendo à linearização em torno de uma singularidade, uma conjugação local entre o campo original e o campo linearizado, transfere localmente as propriedades dinâmicas deste para aquele, ou seja, se a singularidade do campo linearizado é uma sela então a singularidade do campo original, se comporta localmente como uma sela. Apesar de ser um resultado bastante importante para descrever o comportamento dos compos não-lineares autônomos, essa análise local é restrita a campos hiperbólicos, que são aqueles cujo operador diferencial apresenta todos os autovalores generalizados com parte real não nula.

4.2 Estabilidade Segundo Liapunov

A análise de estabilidade de singularidades de campos autônomos não-lineares, utilizando o método de Liapunov foi o princial aspecto estudado neste trabalho. Como foi analisado no presente trabalho, a estabilidade das singularidades pode ser de três tipos:

1. Estável: quando qualquer solução iniciada no entorno do ponto de equilíbrio não se afasta drasticamente deste ao longo do tempo.

2. Assintoticamente estável: quando a singularidade é estável, e além disso, quando existir uma vizinhança do ponto de equilíbrio tal que toda solução iniciada nessa vizinhança aproxima-se do ponto de equilíbrio no decorrer do tempo.

3 Instável: quando existir uma solução iniciada no entorno do ponto de equilíbrio que se afasta deste no decorrer do tempo.

A estabilidade dos pontos de equilíbrio foi estudada e aplicada utilizando o método indireto e direto de Liapunov. O método indireto baseia-se na linearização do sistema no entorno de cada singularidade, discutindo desta forma a estabilidade das singularidades do sistema original com base na estabilidade da singularidade do sistema linearizado. Desta forma, se todos os autovalores generalizados do operador diferencial do campo vetorial na singularidade em estudo possuirem parte real negativa, a singularidade do sistema original é assintoticamente estável. Se porém existir algum autovalor generalizado com parte real positiva a singularidade do sistema original é instável. Se ocorrer o fato dos autovalores generaliizados terem parte real nula então o método indireto não informa a respeito da estabilidade da singularidade em questão.

O método direto de Liapunov é mais generalista e baseia-se na investigação de uma função escalar que é contínua numa vizinhança da singularidade em estudo, que possui mínimo global nessa singularidade e é decrescente ou não crescente ao longo das órbitas regulares do sistema. Se uma tal função existir e é decrescente ao longo das órbitas do sistema, então a singularidade é assintoticamente estável, no entanto se a função de Liapunov for apenas não-crescente, então a singularidade é apenas estável. No primeiro caso dizemos que a função de Liapunov é estrita.

Uma função de Liapunov generaliza a noção de energia de um sistema, e desta maneira, descreve localmente a sua configuração. As funções de liapunov também são importantes pois delimitam conjuntos invariantes pelo fluxo do sistema, sendo possível delimitar bacias de atração para singularidades assintoticamente estáveis e até definir órbitas periódicas para o sistema.

A estabilidade de sistemas autônomos lineares foi o estudo desenvolvido no primeiro projeto de mesmo nome e complementou agora os estudos voltados para a análise de estabilidade de sistemas não-lineares.

4.3 Aplicações

Como aplicações da teoria estudada, foram analisados no enfoque dos objetivos deste trabalho dois modelos biomatemáticos contínuos de dinâmica populacional:

1. Modelo presa-predador de Lotka-Volterra; e
2. Modelo presa-predador generalizado.

Em ambos os modelos foram feitas simulações com parâmetros fixados, com o auxílio do Software Mathematica o qual é uma ferramenta fundamental para esses estudos, tanto por conta da praticidade e facilidade de uso como pela sua qualidade.

A interação presa-predador é um processo ecológico no qual uma população (predadores) é beneciada e a outra (presas) é prejudicada pela interação. No modelo clássico proposto por Lotka-Volterra a população de presas na ausência de predadores cresce de forma exponencial e a população de predadores, na ausência de presas decresce exponencialmente. Como podemos observar, esse modelo não descreve de forma realística o sistema presa-predador, pois não leva em consideração a capacidade de suporte do ambiente, entre outras coisas, sendo portanto uma situação idealizada. No entanto, para esse modelo foi encontrado dois pontos de equilíbrio sendo um a origem e o outro um ponto não trivial localizado no interior do primeiro quadrante. Aplicando o método indireto de Liapunov concluimos que a origem é uma sela para esse sistema e com relação ao segundo ponto de equilíbrio, o método indireto não pode ser aplicado. Desta forma foi aplicado o método direto de Liapunov, encontrando uma função de Liapunov constante ao longo das órbitas regulares desse sistema, sendo o ponto de equilíbrio não trivial um mínimo global dessa função. Logo concluiu-se que esse ponto é um equilíbrio estável para o sistema Lotka-Volterra. as óbitas desse sistema são as

cuvas de nível para a função encontrada. No modelo presa-predador generalizado, os parâmetros são funções que traduzem de uma maneira mais realística as qualidades de um sistema presa-predador. Essas funções informam como a população de presas se comporta na ausência de predadores, como a população de predadores se comporta na ausência de presas, como os predadores capturam suas presas e como a população de predadores aproveitam as presas capturadas para convertê-las em novos predadores. Analizando esse modelo foi constatado a existência de três pontos de equilíbrio, considerando algumas suposições:

1. Existe a capacidade de suporte do meio ambiente, denotado por k.
2. A capacidade máxima de conversão das presas em novos predadores é maior que a taxa intrínseca de decrscimento destes na ausência de presas.
3. A interação presa-predador tende a manter a população de presas sempre abaixo da capacidade de suporte do ambiente.

Com base nessas suposições, foram encontrados três pontos de equilíbrio para esse modelo: $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (k, 0)$ e $P_3 = (x^*, y^*)$.

Aplicando o método indireto de Liapunov concluiu-se que os dois primeiros pontos são selas e a estabilidade do terceiro ponto é dependente dos parâmetros das funções de entrada do modelo. No entanto, a análise de estabilidade de P_3, foi simplificada por uma interpretação geométrica pela análise das isóclinas do sistema. Outro fato importante para o modelo presa-predador generalizado é que a existência de ciclos limites é garantida pela instabilidade do ponto de equilíbrio P_3.

Conclusão

Neste trabalho foram estudadas propriedades qualitativas de sistemas não-lineares descritos por campos vetoriais autônomos. Dentre estas propriedades, foi analisada a estabilidade de singularidades e a qualidade de soluções via método direto e indireto de Liapunov. Com esse estudo, pode-se observar que os sistemas não-lineares apresentam uma riqueza dinâmica mais complexa que os sistemas lineares.

O comportamento de sistemas autônomos não-lineares dependem das condições iniciais estabelecidas, ao contrario dos sistemas autônomos lineares cujo comportamento independe das condições iniciais. Além disso, os sistemas não-lineares podem ter mais de um ponto de equilíbrio, entretanto, os campos lineares possuem somente a origem como singularidade isolada.

Este trabalho é continuação do projeto anterior no qual foi estudado a estabilidade de sistemas autônomos lineares. Desta maneira, o estudo foi complementado de forma a contribuir para o entendimento das propriedades qualitativas dos sistemas não-lineres autônomos.

Cronograma

Primeira Etapa / 2º Semestre de 2012

Atividades	Ago	Set	Out	Nov	Dez	Jan
Campos de vetores	X					
Existência e unicidade de soluções		X				
Estabilidade de pontos de equilíbrio			X			
Método Indireto de Liapunov				X		
Apresentação Parcial Oral					X	
Método Direto de Liapunov					X	
Confecção do Relatório Parcial						X

Segunda Etapa / 1º Semestre de 2013

Atividades	Fev	Mar	Abr	Maio	Jun	Jul
Funções de Liapunov	X					
Estudo de modelos presa-predador		X				
Estudo de métodos computacionais			X			
Estudo de métodos computacionais				X		
Aplicação dos métodos computacionais					X	
Aplicação dos métodos computacionais					X	
Confecção do Relatório Final						X

Referências Bibliográficas

[1] LIMA, E. L. *Álgebra Linear*. Coleção Matemática Universitária, Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

[2] SOTOMAYOR, J. *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*. Projeto Euclides: IMPA, 1979.

[3] BASSANEZI, R. *Equações Diferenciais com Aplicações*. Prentice/Hall do Brasil, 1988.

[4] SMAIL, S. *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*. Academic Press, 1974)

[5] C. I. Doering e Lopes A. O. *Equações Diferenciais Ordinárias*. Matemática Universitária. Rio de Janeiro: IMPA, Quarta Edição, 2010.

[6] SANTOS, V. M. P. *Sistema Presa-predador Generalizado*. São Paulo: UNICAMP, 1989.