UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

DEPARTAMENTO DE APOIO A PESQUISA

PROGRAMA INSTITUCIONAL DE BOLSAS DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA

PROBLEMA FÍSICO DE TRÊS CORPOS ANALITICAMENTE SOLÚVEL

Bolsista: Dafny da Silva Santos, FAPEAM

MANAUS

2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

DEPARTAMENTO DE APOIO A PESQUISA

PROGRAMA INSTITUCIONAL DE BOLSAS DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA

RELATÓRIO PARCIAL

PIB-E/0057/2012

PROBLEMA FÍSICO DE TRÊS CORPOS ANALITICAMENTE SOLÚVEL

Bolsista: Dafny da Silva Santos, FAPEAM

Orientador: Prof. Dr. Igor Tavares Padilha

MANAUS

2013

RESUMO

A resolução do problema de três ou mais corpos interagindo entre si sempre foi um desafio para os físicos, pois esse não possui uma solução analítica. Desde o século XIX pesquisadores vêm tentando encontrar a solução para esse problema, mas, até hoje, só foi possível encontrar soluções para casos especiais ou aproximados, desconsiderando o tratamento numérico do mesmo. Porém, pesquisadores como Leonard Euler e Joseph-Louis Lagrange conseguiram achar a solução analítica para esse problema quando adicionamos ao sistema algumas restrições especiais.

A teoria Newtoniana consegue descrever, com base nas forças e na indicação das condições iniciais, o problema de dois corpos interagentes. Esta é capaz de mostrar que esse problema se reduz a dois problemas de um corpo só, e como já é de conhecimento geral, o problema de um corpo possui solução analítica. Mas tal teoria não descreve o problema de n corpos interagentes, sendo $n \geq 3$, tal solução só é encontrada levando em conta algumas considerações especiais.

Baseado nas ideias de Joseph-Louis Lagrange esse trabalho apresenta soluções para um sistema de dois e três corpos interagindo. Durante a resolução do problema de dois corpos observa-se que a solução é encontrada facilmente, diferente do caso de três corpos, pois só há solução analítica para esse caso se os três corpos interagindo entre si estiverem sobre os vértices de um triângulo equilátero. Para encontrar tal solução foram utilizados alguns métodos físicos e matemáticos, como por exemplo, o conhecimento sobre a Segunda lei de Newton, Centro de massa e Sistemas de partículas, Coordenadas de Jacobi, Transformação de coordenadas (transformação de escala e rotação), Equações diferenciais e Equações diferenciais acopladas.

Os resultados encontrados durante a elaboração desse projeto possui uma grade importância acadêmica, já que ele apresenta uma solução analítica (em um caso especial) de um problema que é insolúvel no caso geral, dando ao aluno a possibilidade de pesquisar e aprender sobre aspectos mais profundos das teorias físicas.

SUMÁRIO

Introdução

Em 1687 o físico Inglês Isaac Newton lançou a sua maior obra (Princípios Matemáticos de Filosofia Natural). Foi nessa obra que surgiu a expressão matemática da força da gravitação universal, uma força inversamente proporcional ao quadrado da distância entre dois corpos, esta expressão consegue descrever o movimento de dois corpos interagindo, como por exemplo, Terra e Lua ou Terra e Sol, entretanto tal expressão não é capaz de descrever o movimento de três corpos, como Terra, Sol, Lua, ficando assim em aberto o problema de três corpos. Ao longo da história surgiram estudiosos que propuseram soluções particulares ao problema, entre esses estão, os matemáticos Leonard Euler e Joseph-Louis Lagrange.

O problema de três corpos tornou-se foco das atenções no final do século XIX, tendo muitos matemáticos e físicos tentado encontrar soluções para este problema. Com os estudos feitos ficava bem claro que esse não possui solução analítica no caso geral, pois ele possui muito mais variáveis do que grandezas que se mantenham constantes, diferente do problema de dois corpos no qual se reduz a um problema de um corpo, graças a conservação de algumas grandezas, como, a energia, a posição, e o momento linear do centro de massa. Deste modo não existe solução analítica para o problema de n corpos (para $n > 2$).

Joseph-Louis Lagrange propõe uma solução particular para um modelo simplificado do problema de três corpos. A ideia de Lagrange foi procurar soluções das equações diferenciais (referente a segunda lei de Newton atuando em três corpos que estão interagindo) considerando as distâncias das partículas invariante, além de serem iguais. Os resultados obtidos nesse trabalho mostram que tais considerações levam à consequência das três partículas se localizarem nos vértices de um triangulo equilátero.

Este projeto tem como objetivo estudar a interação entre três corpos, com base nas soluções propostas por Lagrange, do ponto de vista da Mecânica Newtoniana. Diferentemente do como comumente é apresentado usando Mecânica Analítica

Revisão Bibliográfica

O problema de três corpos possui uma grande importância pedagógica, pois ele apresenta soluções, em casos especiais, para um problema insolúvel no caso geral. Ao fazer o estudo de dois corpos interagindo observa-se que ele possui uma solução, uma vez que, podemos reescrevê-lo em termos de variáveis da qual conhecemos (nesse caso, reescrevemos a equação da segunda lei de Newton, utilizando as expressões do centro de massa e da posição relativa), mas quando adicionamos ao sistema mais um corpo ele passa a ser insolúvel, pois teremos um sistema de equações diferenciais acopladas, cuja solução não é obtida de forma simples. Entretanto se colocarmos restrições ao sistema ele passa a ter solução.

Para mostrar que o problema de três corpos possui solução analítica é necessário fazer algumas suposições especiais. Por exemplo, no Caso de Lagrange, os corpos tem que estar movendo-se sobre os vértices de um triângulo de lados invariantes, é importante enfatizar que nesse caso as massas podem ter qualquer valor, e que o movimento do "triângulo" é livre, ou seja, ele pode ter um movimento rotacional, translacional ou os dois ou mesmo tempo, a única restrição nesse caso é que a distância entre os corpos seja a mesma.

O problema de três corpos interagindo é tema de discussão desde o final do século XIX, sendo ele de grande importância na física, pois através dele é possível fazer estudos da interação entre três ou mais corpos, como por exemplo, Sol-Terra-Lua.

Métodos utilizados

O problema de N corpos surge no estudo do movimento dos planetas, no qual não se obtém a solução para o movimento de corpos interagindo (quando N é maior que dois). Entretanto podem-se achar soluções analíticas quando adicionamos ao sistema algumas restrições, por exemplo: O sistema Terra-Lua-Satélite, pode ser considerado um caso particular, pois podemos considerar a massa do satélite nula quando comparada com a massa da Terra e da Lua, esse exemplo se encaixa no Caso Restrito de Três corpos. Outros casos particulares que também mostram a solução analítica para o problema são o Caso de Lagrange e o Caso de Euler. Para obter a solução desses casos é necessária ter o conhecimento de alguns conceitos físicos e matemáticos:

Segunda Lei de Newton: A segunda lei de Newton é o princípio fundamental da Dinâmica, é a lei básica que permite determinar a evolução na mecânica clássica. Onde a força é a taxa de variação temporal do momento (se derivarmos o momento em relação ao tempo, e considerarmos a massa constante, encontramos que a força é proporcional a massa e a aceleração da partícula).

Sistema de Partículas e Centro de massa: Em um sistema de partículas os corpos interagem entre si através de forças de contato. Podemos tratar esse tipo de sistema como um todo, como se fosse uma só partícula, de momento igual ao momento do sistema, sobre o qual atua a resultante das forças externas, é possível associar uma posição bem definida a essa partícula, e esta posição é chamada de centro de massa.

Coordenadas de Jacobi: Na teoria de muitos corpos, as coordenadas de Jacobi, são frequentemente usadas para simplificar a formulação matemática do problema. Tais sistemas de coordenadas são particularmente comuns no tratamento de reações químicas e em mecânica celeste.

Transformação de escala: A transformação de escala simplesmente multiplica todas as coordenadas x por um fator s_x e as coordenadas y por s_y. Sendo essa transformação representada pela matriz: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Transformação de rotação: Em álgebra linear rotação é um tipo de transformação de um sistema de coordenadas. Por exemplo, em duas dimensões, uma rotação em sentido anti-horário de um plano sobre a origem, ode (x, y) é mapeado para (x', y'), é dada pelas mesmas fórmulas como uma transformação de eixos de coordenadas com uma rotação horária, resultando em uma mudança de coordenadas (x, y) em (x', y'):

Equações diferenciais ordinárias: São equações que apresentam derivadas ou diferenciais de uma função desconhecida (a incógnita da equação).

Equações diferenciais ordinárias acopladas: apresentam derivadas das mesmas variáveis, ou seja, o sistema está em função de duas ou mais variáveis.

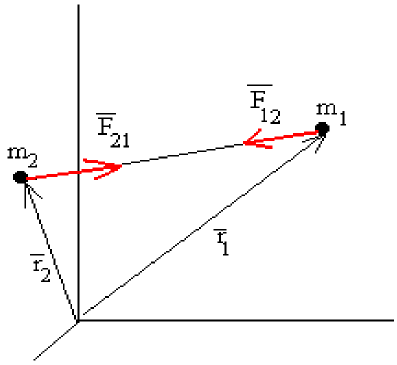
Resultados

Para compreender e obter as soluções analíticas do problema de três corpos é necessário ter o conhecimento do problema de dois corpos para que se possa entender o porque que o problema de dois corpos tem solução analítica e o de três não.

Para resolver o problema de dois corpos é necessário escrever as que equações de movimento para os corpos de massa m_1 e m_2, sendo que essas são localizadas pelos vetores posição $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$:

$$\vec{F}_{12}\,(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = m_1\ddot{\vec{r}}_1$$

$$\vec{F}_{21}\,(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = m_2\ddot{\vec{r}}_2$$



Observa-se que as forças $\vec{F}_{12}$ e $\vec{F}_{21}$ (Forças resultantes sobre as partículas 1 e 2, respectivamente), obtidas através da segunda lei de Newton, dependem dos vetores posição dos corpos ($\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$) sendo então essas equações acopladas, para desacoplar o sistema é necessário introduzir novas expressões matemáticas, são essas o vetor posição centro de massa e o vetor posição coordenada relativa:

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

Com essas duas expressões é possível reescrever os vetores $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$:

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R} + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}$$

Quando $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ são introduzidos na equação da segunda lei de Newton obtém-se:

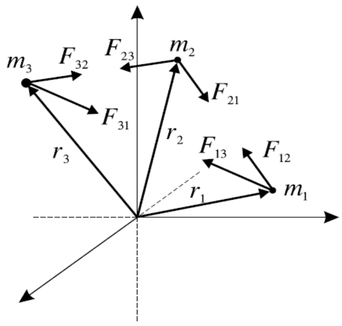
$$M\vec{R} = \vec{0}$$

$$\vec{F}(\vec{r}) = \mu\ddot{\vec{r}}$$

Esse resultado mostra que, o vetor posição centro de massa encontra-se em MRU (movimento retilíneo uniforme), ou seja, ele não possui aceleração. E que a força não depende mais dos vetores posição $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$, apenas de $\vec{r}$, deste modo o sistema não está mais acoplado.

Diferente do problema de dois corpos, o de três não possui solução analítica, já que teremos um sistema de equações diferenciais acopladas muito complicadas de resolver. Entretanto se colocarmos sobre o sistema algumas suposições especiais, soluções analíticas podem ser encontradas para o problema de três corpos, uma dessas suposições foi apresentada por Joseph-Louis Lagrange.

Para se obter a solução analítica do problema é necessário primeiro fazer a formulação matemática do problema de três corpos. Pela segunda lei de Newton:



$$\vec{F}_1(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) = m_1\ddot{\vec{r}}_1 \qquad (1)$$

$$\vec{F}_2(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) = m_2\ddot{\vec{r}}_2 \qquad (2)$$

$$\vec{F}_3(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) = m_3\ddot{\vec{r}}_3 \qquad (3)$$

Como no de dois corpos, temos um sistema de equações diferenciais acopladas, porém o desacoplamento não pode ser feito de maneira simples como no caso anterior.

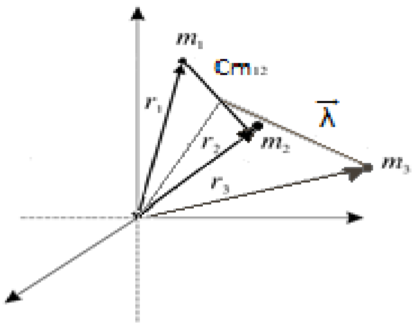
Supondo que as forças são diretamente proporcionais à coordenada relativa, ou seja, forças harmônicas. Podemos reescrever as equações (1), (2) e (3) da seguinte forma:

$$\vec{F}_1 = -K_{12}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) - K_{13}(\vec{r}_1 - \vec{r}_3) \qquad (4)$$

$$\vec{F}_2 = -K_{21}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) - K_{23}(\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \qquad (5)$$

$$\vec{F}_3 = -K_{31}(\vec{r}_3 - \vec{r}_1) - K_{32}(\vec{r}_3 - \vec{r}_2) \qquad (6)$$

O sistema acima pode ser reescrito através das coordenadas de Jacobi para um sistema de três corpos. É importante observar que k_{ij} é uma constante proporcional ao deslocamento do corpo no qual a força é exercida, sendo assim o sistema acima pode ser descrito por qualquer equação que obedeça tal relação, por exemplo, na equação da força elétrica $\left(\vec{F}_{12} = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{(r_{12})^3}\vec{r}_{12}\right)\right)$ tal constante tem como valor $\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{(r_{12})^3}\right)$, na força elástica $(\vec{F} = k\vec{x})$ essa é k (constante da mola), já na força gravitacional $\left(\vec{F}_{12} = \left(G\frac{m_1m_2}{(r_{12})^3}\vec{r}_{12}\right)\right)$, $\left(G\frac{m_1m_2}{(r_{12})^3}\right)$ é a constante.



Utilizando:

- Coordenada relativa entre as duas primeiras partículas:

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \qquad (7)$$

- Coordenada relativa entre o centro de massa das duas primeiras partículas com a terceiras:

$$\vec{\lambda} = \vec{r}_3 - \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2} \qquad (8)$$

- Coordenada do centro de massa como um todo:

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3}{m_1+m_2+m_3} \qquad (9)$$

Obtemos:

$$\vec{r}_1 = \vec{R} - \frac{m_3}{M}\vec{\lambda} - \frac{m_2}{M_{12}}\vec{r} \qquad (10)$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_3}{M}\vec{\lambda} - \frac{m_1}{M_{12}}\vec{r} \qquad (11)$$

$$\vec{r}_3 = \vec{R} + \frac{M_{12}}{M}\vec{\lambda} \qquad (12)$$

Substituindo as equações (10), (11) e (12) nas equações (4), (5) e (6), encontramos o seguinte sistema:

$$-\left(K_{12} + K_{13}\frac{m_3}{M_{12}}\right)\vec{r} + K_{13}\vec{\lambda} = \left(\ddot{\vec{R}} - \frac{m_3}{M}\ddot{\vec{\lambda}} + \frac{m_2}{M_{12}}\ddot{\vec{r}}\right) \qquad (13)$$

$$\left(K_{21}+\frac{m_1}{M_{12}}\right)\vec{r}+K_{23}\vec{\lambda}=\left(\ddot{\vec{R}}-\frac{m_3}{M}\ddot{\vec{\lambda}}+\frac{m_1}{M_{12}}\ddot{\vec{r}}\right) \qquad (14)$$

$$\left(K_{31}\frac{m_1}{M_{12}}+K_{32}\frac{m_1}{M_{12}}\right)\vec{r}-\vec{\lambda}(K_{31}+K_{32})=\left(\ddot{\vec{R}}-\frac{M_{12}}{M}\ddot{\vec{\lambda}}\right) \qquad (15)$$

Multiplicando a equação (13) por m_2 e a equação (14) por m_1 e subtraindo ambas, e ao somar as equações (13) e (14) temos:

$$\ddot{\vec{r}}+\omega_1^2\vec{r}=\frac{\gamma}{M_1}\vec{\lambda} \qquad (16)$$

$$\ddot{\vec{\lambda}}+\omega_2^2\vec{\lambda}=\frac{\gamma}{M_2}\vec{r} \qquad (17)$$

onde,

$$\omega_1^2=\frac{1}{M_1}\left(K_{12}+\frac{K_{13}m_2^2+K_{23}m_1^2}{M_{12}^2}\right) \qquad (18)$$

$$\gamma=\frac{K_{13}m_2-K_{23}m_1}{M_{12}} \qquad (19)$$

$$\frac{1}{M_1}=\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2} \qquad (20)$$

$$\frac{1}{M_2}=\frac{1}{m_1+m_2}+\frac{1}{m_3} \qquad (21)$$

$$\omega_2^2=\frac{1}{M_2}(K_{13}+K_{23}) \qquad (22)$$

Isolando $\gamma\vec{r}$ na equação (17) e substituindo na equação (15), obtemos a equação que descreve o movimento do centro de massa:

$$\ddot{\vec{R}}=\vec{0} \qquad (23)$$

Por esses resultados observa-se que as coordenadas de Jacobi reduziram este problema de três corpos ao movimento livre do centro de massa.

Pode-se desacoplar as equações de movimento no caso geral considerando as transformações de coordenadas (transformações de escala e rotação), definida por:

$$\vec{r}=S_1\vec{Y_1}\cos\varphi-S_1\vec{Y_2}\sin\varphi \qquad (24)$$

$$\vec{\lambda}=S_2\vec{Y_1}\sin\varphi+S_2\vec{Y_2}\cos\varphi \qquad (25)$$

Onde:

$$S_1=\left(\frac{ME}{M_1}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (26)$$

$$S_2=\left(\frac{ME}{M_2}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (27)$$

Sendo ME um parâmetro de dimensão de massa e φ um parâmetro de rotação. Quando substituímos as equações (24) e (25) nas equações (16) e (17) encontramos dois novos sistemas, que ao resolvê-los obtemos novas equações diferenciais acopladas para as novas coordenadas:

$$\ddot{\vec{y}}_1 + \alpha^2 \vec{y}_1 = \delta \vec{y}_2 \qquad (28)$$

$$\ddot{\vec{y}}_2 + \beta^2 \vec{y}_2 = \delta \vec{y}_1 \qquad (29)$$

Em que:

$$\alpha^2 = \omega_1^2 \cos^2(\varphi) + \omega_2^2 \sin^2(\varphi) - \frac{\gamma}{(M_1 M_2)^{1/2}} \sin(2\varphi) \qquad (30)$$

$$\beta^2 = \omega_1^2 \sin^2(\varphi) + \omega_2^2 \cos^2(\varphi) + \frac{\gamma}{(M_1 M_2)^{1/2}} \sin(2\varphi) \qquad (31)$$

$$\delta = \frac{1}{2}(\omega_1^2 - \omega_2^2) + \frac{\gamma}{(M_1 M_2)^{1/2}} \cos 2\varphi \qquad (32)$$

Como φ, S_1 e S_2 são arbitrários estes podem ser encontrados de maneira a zerar δ. Assim as equações (28) e (29) desacoplam, ficando:

$$\ddot{\vec{y}}_1 + \alpha^2 \vec{y}_1 = \vec{0} \qquad (33)$$

$$\ddot{\vec{y}}_2 + \beta^2 \vec{y}_2 = \vec{0} \qquad (34)$$

O valor φ de para que as equações (33) e (34) sejam válidas é:

$$\tan 2\varphi = \frac{2\gamma}{(\omega_2^2 - \omega_1^2)(M_1 M_2)^{1/2}} \qquad (35)$$

Inserindo o valor de φ nas equações (30) e (31) e depois nas equações (33) e (34) finalmente encontramos um sistema de equações diferenciais desacopladas:

$$\ddot{\vec{y}}_1 + \Omega_1^2 \vec{y}_1 = \vec{0} \qquad (36)$$

$$\ddot{\vec{y}}_2 + \Omega_2^2 \vec{y}_2 = \vec{0} \qquad (37)$$

Em que:

$$\Omega_1 = \frac{1}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2) - \frac{1}{2}\left[(\omega_2^2 - \omega_1^2)^2 + \frac{4\gamma^2}{M_1 M_2}\right]^{1/2} \qquad (38)$$

$$\Omega_2 = \frac{1}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2}\left[(\omega_2^2 - \omega_1^2)^2 + \frac{4\gamma^2}{M_1 M_2}\right]^{1/2} \qquad (39)$$

Portanto, é perfeitamente possível desacoplar o sistema e obter uma solução analítica para o problema de três corpos interagentes. Porém, tal procedimento se limita a alguns sistemas bem particulares.

Conclusão

Neste trabalho apresentamos uma solução analítica para o problema de três corpos interagindo mutuamente. O problema de n corpos, até hoje, só está resolvido para n menor que dois, no caso de n=3 existem soluções apenas para casos especiais, tais soluções existem para três corpos de massa arbitrária, mas com posições iniciais devidamente escolhidas, essas soluções podem ser divididas em dois tipos: soluções colineares e soluções equiláteras. Nesse relatório foi apresentada apenas a solução equilátera obtida por Lagrange.

Através do método utilizado para resolver o problema mostramos uma solução em um caso especial para um problema insolúvel no caso geral. No problema de três corpos encontramos um sistema acoplado cuja solução não é encontrada de forma simples como no problema de dois corpos (tal solução também foi apresentada nesse trabalho), no início da resolução do problema mostramos que as coordenadas de Jacobi reduz o problema de três corpos ao movimento livre do centro de massa, é importante observar que as coordenadas de Jacobi não desacoplam o sistema no caso geral, mas se as equações (16) e (17) fossem iguais o sistema não estaria mais acoplado. Para solucionar o problema foi utilizado outro sistema de coordenadas, que é uma mistura das transformações de escala e rotação, utilizando essas novas coordenadas é possível desacoplar o sistema e encontrar uma solução analítica para o problema de três corpos.

A solução analítica desse problema é importante, pois fornece uma compreensão geral da dinâmica, diferente das soluções numéricas, que também são eficazes, pois através desses pode-se obter uma representação gráfica, mas os resultados são apresentados por tabelas de números, e para um físico ou matemático é de maneira geral mais incisivo obter teoremas e expressões analíticas, quando possível, do que uma tabela de números e curvas.

A elaboração desse projeto possui grandes contribuições na vida acadêmica de um aluno do curso de física, já que ele apresenta uma resolução especial de um problema que não possui solução no caso geral. Tal resolução não é apresentada no curso regular de graduação em física, sendo assim tal projeto possui grande importância acadêmico-científica.

.

Fontes e Referências Bibliográficas

- Rev. Bras. Ensino Fís. vol.23 no.3 São Paulo Sept. 2001.
- V. Arnold, Mathematical Methods of Classical Mechanics, Springer-Verlag, New York, 2nd edition (1989).
- D. Hestenes, New Foundations for Classical Mechanics, D. Reidel Publishing Company (1986).
- NUSSENZVEIG, H. Moysés. Curso de Física básica. 4 ed. São Paulo, 2002. V.1

Cronograma

Nº	**Descrição**	**Ago** **2012**	**Set**	**Out**	**Nov**	**Dez**	**Jan** **2013**	**Fev**	**Mar**	**Abr**	**Mai**	**Jun**	**Jul**
1	Levantamento Bibliográfico	**X**	**X**										
2	Estudo de Sistema de duas partículas analiticamente solúvel.		**X**	**X**									
3	Análise das complicações físicas e matemáticas inerentes a um sistema com mais de duas partículas interagentes.			**X**	**X**								
4	Análise do problema restrito de três corpos.				**X**	**X**	**X**						
5	Análise do problema de três corpos de Euler.						**X**	**X**	**X**				
6	Análise do problema de três corpos de Lagrange.								**X**	**X**	**X**	**X**	
5	- Elaboração do Resumo e Relatório Final. - Preparação da Apresentação Final para o congresso												**X**