UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
DEPARTAMENTO DE APOIO A PESQUISA
PROGRAMA INSTITUCIONAL DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA

SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES NÃO LINEARES DE UM PÊNDULO

Bolsista: Rosmael Colsoul de Miranda, CNPq

MANAUS
2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
DEPARTAMENTO DE APOIO A PESQUISA
PROGRAMA INSTITUCIONAL DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA

RELATÓRIO FINAL

PIB-E/0166/2012

SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES NÃO LINEARES DE UM PÊNDULO

Bolsista: Rosmael Colsoul de Miranda, CNPq
Orientador: Prof. Dr. Octávio Daniel Rodriguez Salmon

MANAUS
2013

Resumo

O pêndulo massa-mola apresenta equações de movimento não linear, pois o seu movimento é feito no plano cartesiano (eixo x, e eixo y). As equações não lineares que descrevem esse movimento não possuem uma solução trivial como a solução das equações do movimento simples (feito em apenas um eixo). Encontrar essa solução (solução das equações que descrevem o movimento do pendulo massa-mola), e verificar o movimento do pendulo massa-mola foram os dois objetivos desse projeto.

Através do formalismo de Lagrange que descreve o movimento em um dado sistema foi possível encontrar a solução da equação de Newton para o movimento do pêndulo. Com as equações de lagrange foi possível programar um algoritmo na linguagem de programação C que gera para dados valores inicias os pontos da trajetória descrita pelo pêndulo. E com o auxilio da ferramenta de construção de gráficos xmgrace foi possível visualizar as curvas, ou seja, o gráfico da trajetória do pêndulo massa-mola.

Após a visualização dos gráficos é possível concluir que as equações de Lagrange são satisfatórias para descrever soluções de equações não lineares de um pêndulo.

SUMÁRIO

Introdução

Os Pêndulos são as manifestações mais estudadas dos movimentos harmônicas (movimento que se repetem num padrão após um período de tempo). A utilidade deles em estudos de física, matemática e engenharia é de importância inigualável. A sua aplicação deu-se ao físico e astrônomo Galileu Galilei, um dos fundadores da ciência moderna.

Neste projeto trata-se do pendulo massa-mola, que é uma montagem (instrumento), que consiste de uma massa (m) ligada no extremo inferior de uma mola elástica de constante (k) e fixada no extremo superior, que oscila em torno de um ponto fixo, chamada posição central ou posição de equilíbrio. O movimento de um pêndulo massa-mola envolve basicamente uma grandeza chamada período (T), que é o intervalo de tempo que o objeto leva para percorrer toda a trajetória (ou seja, retornar a sua posição original de lançamento, uma vez que o movimento pendular é periódico). Derivada dessa grandeza existe a frequência (f), numericamente igual ao inverso do período ($f = 1 / T$), e que se caracteriza pelo número de vezes (ciclos) que o objeto percorre a trajetória pendular num intervalo de tempo específico.

O pêndulo massa-mola desenvolve um sistema dinâmico não linear, pois a trajetória do objeto de massa (m) não percorre apenas o eixo das abscissas(x), mais também o eixo das ordenadas(y). Visto que ele apresenta um movimento não linear, a solução numérica para esse movimento também apresenta equações não lineares.

A solução numérica para esse tipo de equações não lineares é o foco principal para esse projeto. Essa solução será dada utilizando métodos matemáticos para esse tipo de movimento harmônico.

Revisão Bibliografia

Existem vários métodos para resolver numericamente a equação diferencial de Newton para o movimento do pêndulo, métodos esses como: método de Euler, Euler-Cromer, Runge-Kutta, Lagrange.

A equação do movimento do pêndulo é dada pela fórmula:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$$

O Método de Euler é o método mais simples para resolver equações diferenciais, é o de substituir as derivadas por razões entre variações da função e da respectiva variável. Assim se quisermos saber a posição e velocidades de um corpo entre um instante inicial (t) e final (tf), podemos dividir o intervalo [t, tf] em N partes iguais e calculamos as velocidades nos instantes tn usando as acelerações no instante anterior. O Método de Euler-cromer é uma pequena variação do M. de Euler, ele é mais preciso no calculo da posição. Este método apresenta vantagens sobre o M. de Euler, sobretudo para problemas com sistemas oscilatórios.

O método de Runge-Kutta é um método de passos simples que requerem apenas derivadas de primeira ordem e pode fornecer aproximações precisas com erros de truncamento. O método de Lagrange (L) de um sistema é uma função obrigatoriamente expressa em termos das coordenadas generalizadas (qi), das taxas de variação destas coordenadas (velocidades generalizadas) qi e do tempo (t), é dada matematicamente pela subtração da energia cinética (T) pela energia potencial generalizada (U) do sistema q qual se atrela.

Métodos Utilizados

Os métodos de Euler e Lagrangiana são bastante uteis para solucionar problemas desse gênero de forma computacional, pois permitem descrever as equações do movimento do pendulo em forma de equações diferenciais.

O método de Euler apoia-se na segunda Lei de Newton para chegar à equação que descreve o movimento do pendulo. Foi utilizada em uma primeira fase para compreender primeiramente a trajetória feita por um pendulo simples (pendulo que consiste em uma massa(m) ligada por um fio). A solução para esse movimento em forma de equação diferencial não linear e dada da seguinte forma:

$$\frac{\overset{2}{d}\Theta}{d_t^2}+\frac{g}{l}+\sin\Theta=0$$

O método utilizado para resolver a equação de Newton que descrever o movimento do pêndulo massa-mola é o método de Lagrange que foi desenvolvido pelo matemático Italiano Joseph Louis Lagrange. A Lagrangiana (L) de um sistema é uma função obrigatoriamente expressa em termos das coordenadas generalizadas (qi), das taxas de variação destas coordenadas (velocidades generalizadas) qi e do tempo (t), é dada matematicamente pela subtração da energia cinética (T) pela energia potencial generalizada (U) do sistema q qual se atrela.

A figura (1.0) a seguir representa o problema a tratar, onde uma massa (m) esta presa no extremo inferior de uma mola de constante (k).

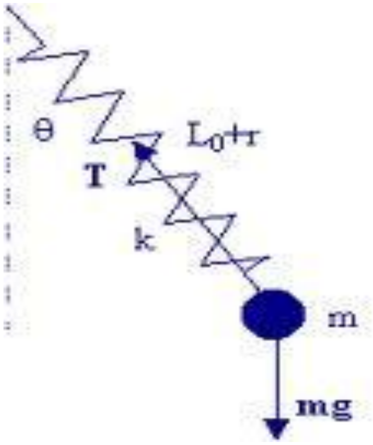

figura 1.0 - Representa o sistema a ser observado

Aplicando o teorema de Lagrange para esse sistema para encontrar a solução das equações não lineares que ocorrem nesse movimento temos:

L = T – U (1.0)

L = L(q1, q2,..., qn)

A energia cinética (T) e a energia potencial (U) do sistema são dadas por:

T = $\frac{1}{2}m(l+r)^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}m\dot{r}^2$ (1.1)

U = $-mg(l+r)\cos\theta + \frac{1}{2}kr^2$ (1.2)

Substituindo (1.1) e (1.2) em (1.0) temos:

L = T – U = $\frac{1}{2}m(l+r)^2\theta^2 + \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + mg(l+r)\cos\theta - \frac{1}{2}kr^2$ (1.3)

A Lagrangiana é expressa em função de theta (**ϴ**) e do raio (r), que são as coordenadas generalizadas qi que variam ao longo do movimento.

L = L(r, **ϴ**), Derivando em função de r e theta (θ) têm:

$\frac{\partial L}{\partial r} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right)$ (1.4)

$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)$ (1.5)

Derivando a equação (1.3) em função de r temos:

$\frac{\partial L}{\partial r} = m(l+r)\theta^2 + mg\ \cos\theta - kr$ (1.6)

$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$ => $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = m\ddot{r}$ (1.7)

Substituindo (1.6) e (1.7) em (1.4) temos:

$m\ddot{r} = m(l+r)\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta - kr$ =>

$\ddot{r} = (l+r)\dot{\theta}^2 + g\cos\theta - w^2 r * r$ (1.8) onde: w²r = $\frac{k}{m}$

Derivando a equação (1.3) em função de tetha (θ) temos:

$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mg(l+r)\sin\theta$ (1.9)

$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m(l+r)^2\dot{\theta}$ => $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = 2m(l+r)\dot{r}\dot{\theta} + m(l+r)^2\ddot{\theta}$ (2.0)

Substituindo (1.9) e (2.0) em (1.5) temos:

$\ddot{\theta} = -\left(\frac{2}{(l+r)}\right)\dot{r}\dot{\theta} - \left(\frac{g}{(l+r)}\right)\sin\theta$ (2.1)

As equações (1.8) e (2.1) são as soluções para as equações desse movimento não linear que descrevem a trajetória dos pêndulos massa-mola. Quando implementados em um algoritmo em linguagem C geram os pontos da trajetória do pendulo.

Resultados e Discussões

Com as equações de Lagrange que descrevem a solução das equações não lineares para o movimento do pendulo. Foi possível estabelecer um algoritmo em linguagem C que fornece para valores iniciais os pontos da trajetória do pendulo massa-mola. Que ao serem introduzidos na ferramenta xmgrace que constrói gráfico, nos da à figura da trajetória do pendulo.

O programa na linguagem C que fornece o arquivo em formato (dat ou txt), para ser introduzido na ferramenta xmgrace e gerar os gráficos é apresentado a seguir:

```
#include<stdio.h>
#include<stdlib.h>
#include<math.h>
#define g 9.81
#define L 5.0
#define M 2.0
#define K 1000.0
#define deltat 0.01

double radianos(double angulo);
main()
{
  FILE *arch;
  double
wr,x,y,t,r,rponto,theta,thetaponto,r_ini,rponto_ini,theta_ini,thetaponto_ini;
   int n;
wr=sqrt(K/M);
theta_ini=0.1;
/*theta_ini=radianos(theta_ini);*/
r_ini=0.5;
thetaponto_ini=0;
rponto_ini=0;
r=r_ini;
theta=theta_ini;
rponto=rponto_ini;
thetaponto=thetaponto_ini;
```

```
t=0;
arch=fopen("xy.dat","w");
for(n=0;n<=440;n=n+1)
{
x=(L+r)*sin(theta);
y=-(L+r)*cos(theta);
fprintf(arch,"%lf\t%lf\t%lf\t%lf\t%lf\t%lf\t%lf\n",t,x,y,theta,thetaponto,r,rponto,
L+r);
 r=r+deltat*rponto;
rponto=rponto+deltat*((L+r)*thetaponto*thetaponto+g*cos(theta)-wr*wr*r);
theta=theta+deltat*thetaponto;
thetaponto=thetaponto+deltat*( 2.0*rponto*thetaponto-g*sin(theta))/(L+r);
t=t+deltat;
}
fclose(arch);
return(0);
}
double radianos(double angulo)
{
return(angulo*3.14/180);
}
```

Com os valores iniciais de:
Aceleração da gravidade g = 9.81
Comprimento da mola L = 5.0
Massa do corpo M = 2.0
Constante Elástica k = 1000.0
Delta de t = 0.01

Geraram-se alguns gráficos para o movimento do pendulo para esses valores iniciais.

O gráfico que representa o movimento do pendulo no plano cartesiano (x, y). E mostrado a seguir na figura (1,1) e podemos verificar que o pendulo alem do seu movimento vertical em x, também oscila em y, o que verifica a definição de movimento não linear do pendulo massa-mola.

Onde: x e y são dados pelas equações:

$x = (l + r) * \sin(\theta)$ e $y = -(l + r) * \cos\theta$

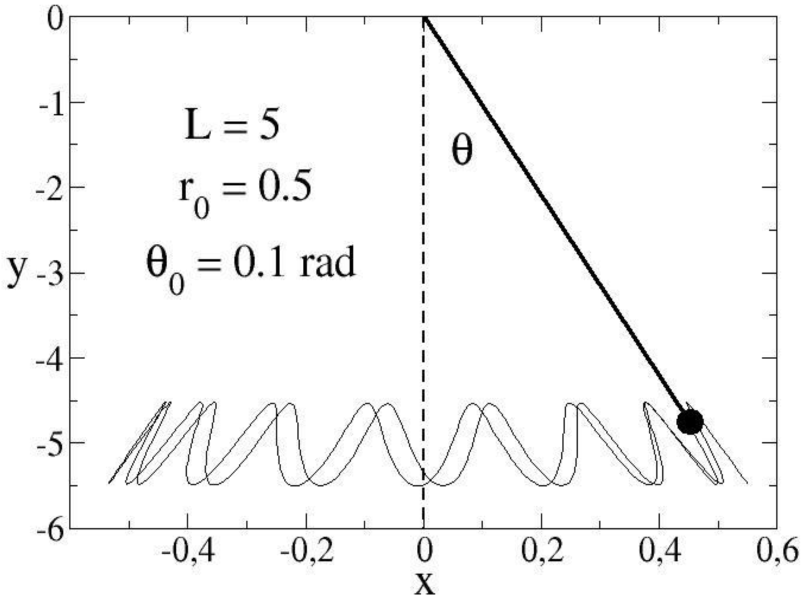

figura 1.1

O gráfico que representa theta (θ) e theta_ponto ($\dot{\theta}$), onde theta_ponto é dado na figura como V de theta (θ) para:

Theta = 0.1 e Theta_ponto dado pela equação (2.1) são mostradas na figura (1.2), onde podemos observar o movimento periódico que o pêndulo completa.

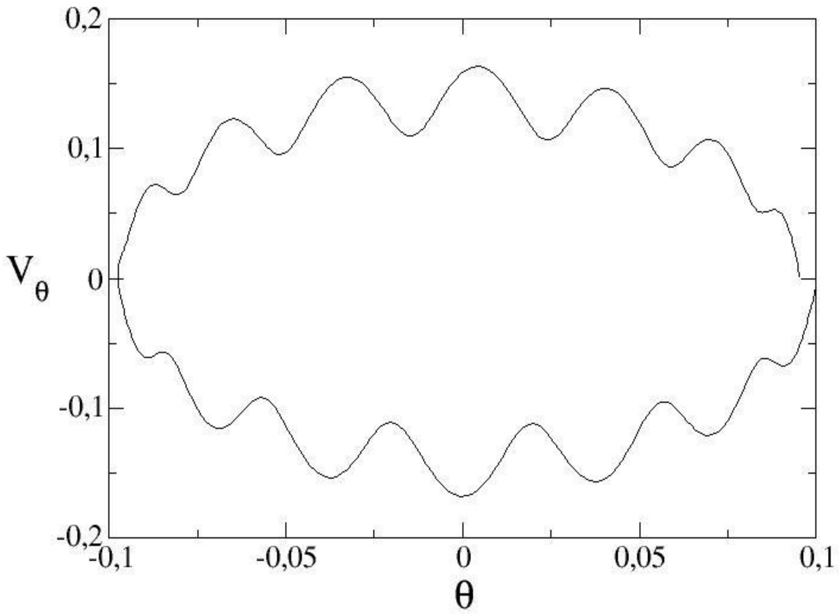

figura 1.2

O gráfico (1.3) representa r e r_ponto ($\dot{r}$), onde r inicialmente tem o valor de 0.5 e o rponto é dado pela equação (1.8).

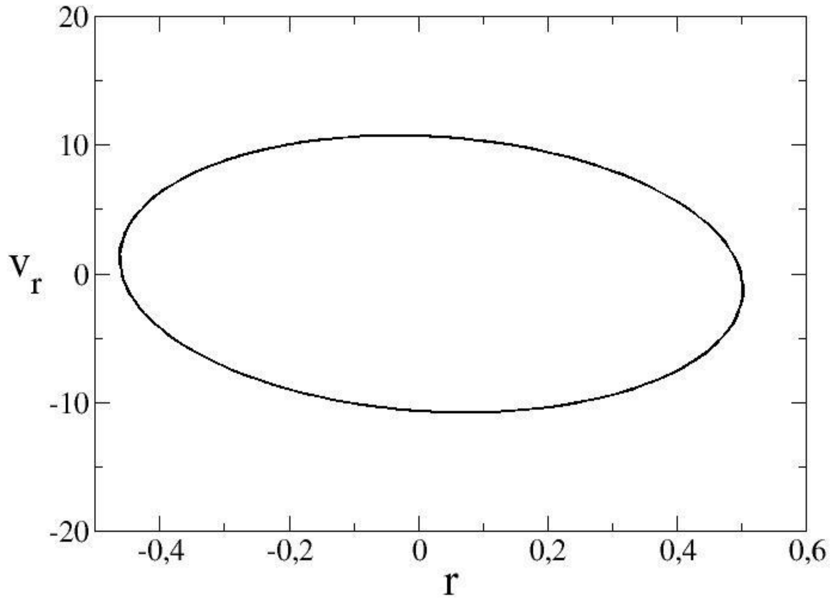

figura 1.3

Agora vamos analisar os gráficos em função do tempo para r, (l+r) e theta (θ).

O gráfico do ângulo theta (**θ**) em função do tempo (t), para o movimento do pendulo para esse caso é mostrado na figura (1.4):

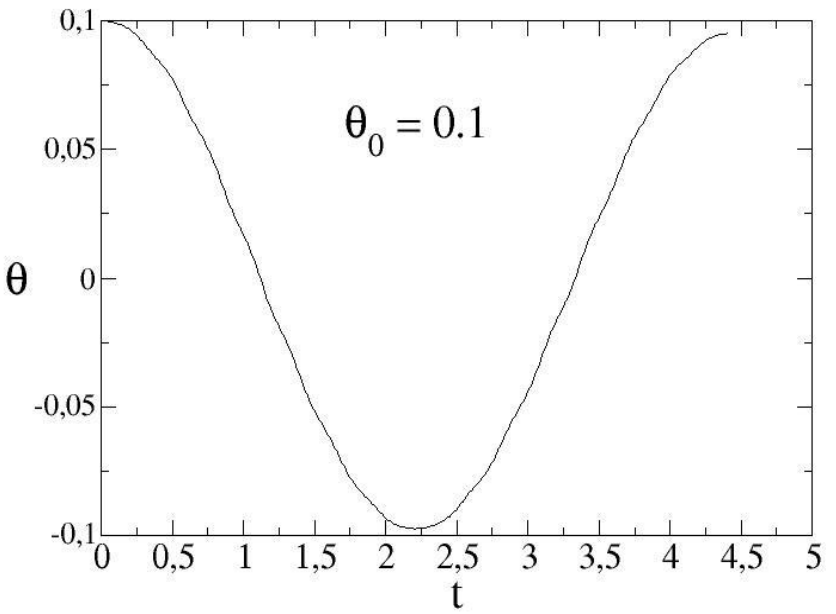

figura 1.4

O gráfico (1.5) apresenta o raio (r) em função do tempo (t).

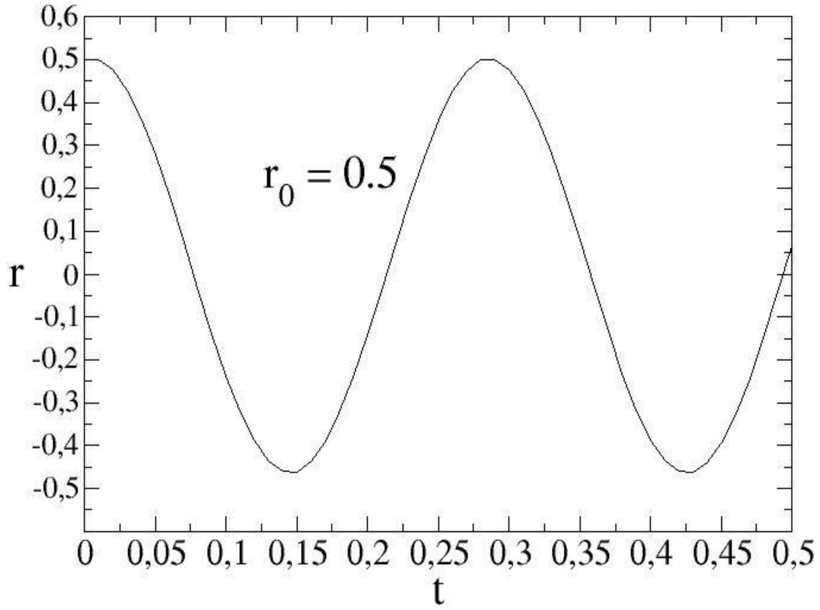

figura 1.5

O gráfico (1.6) representa o comprimento da mola (l + r) em função do tempo (t),e podemos observar que o raio oscila em trono de L = 5

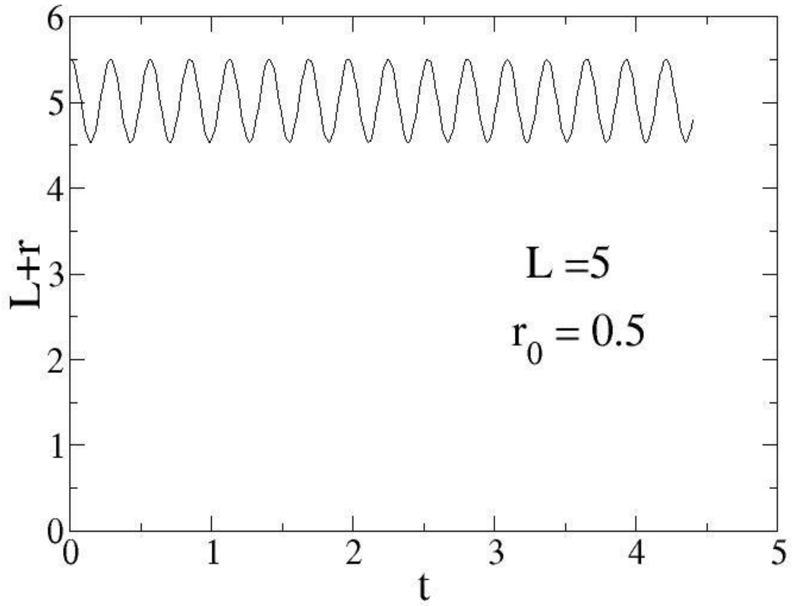

figura 1.6

Conclusões

Através do formalismo de Lagrange e pelo método de Euler, foi possível determinar a solução do problema proposto, que se dava a achar a solução das equações não lineares de um pendulo. O Método resolveu de maneira satisfatória as equações de tal maneira que foi possível comprovar o sistema dinâmico não linear do pêndulo pelos gráficos gerados por sua trajetória. A equação de Newton que descreve o movimento do pêndulo é uma equação diferencial não linear, que pode ser resolvida por vários métodos destacando o de Euler, Runge-Kutta e Lagrange. Qualquer um nos leva a solução da equação de Newton, porem a que se escolher o que melhor leva em conta para o caso a tratar.

Fontes e Referencias Bibliográficas

[1] ***Curso de Física Básica 1 – Mecanica, Moyses Nussenzveig***, Editora Edgard Blucher.

[2] ***Classical Mechanics***, John R. Taylor.

[3] ***Numerical Methods for Scientists and Engineers***, R. W. Hamming.

[4] ***Métodos Numéricos para Engenharia***, Raymond P. Canale e Steven C. Chapra, Mcgraw Hill.

[5] Dinâmica: ***Mecânica para Engenharia***, R. C. Hibbeler, Addison Werley.

[6] ***Classical Mechanics***, H. Goldstein, Addison Werley.

[7] Praticas de Algoritmia, ***Algoritmia e Programação Estruturada***, Carvalho Adelaide, Editora lidel – Zamboni.

[8] ***Introduction to Algorithms***, Thomas H. Cormer, R. W. Hamming, Dober Books on Mathematics.

[9] ***Analysis of Numerical Methods***, Eugene Isaacson.

[10] ***C Programming Language***, B. W. Kernighan e D. M. Ritchie.

[11] ***Física 1 v.2***, Robert Resnick, David Halliday, Kenneth S. Krane.

Cronograma Executado

N	Descrições	Ago 2012	Set	Out	Nov	Dez	Jan 2013	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun	Julh
1	Revisão da Bibliografia. Estudo de algoritmos elementares para implementar o método.	X	X	X	X								
2	Implementar o algoritmo de Newton Raphson numa linguagem de programação estruturada					X	X	X	X				
3	Construção das curvas das coordenadas theta e L em função do tempo.								X	X	X	X	
4	Estudo e interpretação das soluções para diferentes condições iniciais.								X	X	X	X	
5	Elaboração do Resumo e Relatório final. Preparação da Apresentação Final para o Congresso.												X