UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE COMPUTAÇÃO
PROGRAMA INSTITUCIONAL DE BOLSAS DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA

PROBLEMAS CLÁSSICOS EM GRAFOS SOB RESTRIÇÕES DISJUNTIVAS

AYAN PEREZ DE ABREU

Agosto de 2016

Manaus - AM

AYAN PEREZ DE ABREU

PROBLEMAS CLÁSSICOS EM GRAFOS SOB RESTRIÇÕES DISJUNTIVAS

Relatório parcial apresentado ao Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC), como parte dos requisitos necessários para o projeto de pesquisa.

Orientador(a): Rosiane de Freitas Rodrigues, D.Sc.

Agosto de 2016

Manaus - AM

Sumário

1 Introdução **1**

1.1 Motivação e objetivos 1

1.2 Metodologia de desenvolvimento do trabalho 2

1.3 Cronograma 3

2 Referencial teórico **5**

2.1 Definições Básicas 5

2.1.1 Grafos 5

2.2 Complexidade Computacional 7

2.2.1 Problemas de Decisão 8

2.2.2 Classe P 8

2.2.3 Classe NP 9

2.2.4 Classe NP-Completo 9

2.2.5 Classe NP-Difícil 10

3 Definição dos problemas **11**

3.1 Problema do Subgrafo Acíclico Máximo sob Restrições Disjuntivas Positivas (SAMRDP) 12

3.2 Problema do Subgrafo Acíclico Máximo sob Restrições Disjuntivas Negativas (SAMRDN) 14

4 Considerações finais **17**

Referências **18**

Capítulo 1

Introdução

Este projeto de pesquisa envolve problemas clássicos em grafos, tal como da árvore geradora mínima, do emparelhamento máximo, do caminho mínimo, e suas variantes sob restrições disjuntivas. Investigando os diversos problemas existentes na literatura assim como os resultados da mesma, além de verificar as complexidades de algoritmos para diversas classes de grafos existentes, bem como grafos cíclicos, bipartidos, completos, caminhos, entre outros. E terá como base a tese de doutorado: *Algoritmos para o problema do subgrafo acíclico máximo sob restrições disjuntivas* [4].

1.1 Motivação e objetivos

Grafos são estruturas matemáticas robustas que fornecem alta capacidade de modelagem em problemas concretos do mundo real. Dessa forma, existem muitos problemas clássicos conhecidos na literatura que têm sua modelagem estruturada em grafos, tal como o problema do caminho mínimo, da árvore geradora mínima, do emparelhamento máximo, do subgrafo acíclico máximo, além de suas variantes sob restrições disjuntivas, dentre outros.

Este projeto de pesquisa tem foco no problema do Subgrafo Acíclico Máximo sob Restrições Disjuntivas. Tal problema pertence a classe NP-Difícil [3] . E assim como outros problemas clássicos em grafos que são resolvidos em tempo polinomial em suas formas clássicas e tornam-se NP-Difíceis quando submetidos a restrições disjuntivas o problema do Subgrafo Acíclico Máximo sob Restrições Disjuntivas também pertence a classe NP-Difícil. Portanto o problema do Subgrafo Acíclico Máximo sob Restrições

Disjuntivas Negativas (SAMRDPN) e o Subgrafo Acíclico Máximo sob Restrições Disjuntivas Positivas (SAMRDP) são um dos problemas clássicos em grafos pertencentes à classe NP-Difícil.

Os principais objetivos deste projeto são:

- Adaptar modelos e algoritmos existentes para classes de grafos sob restrições disjuntivas, que estão em estudo.
- Validar propriedades na tentativa de se propor caracterizações para os problemas em investigação.
- Organizar e divulgar os resultados da pesquisa sob a forma de relatórios e artigos científicos.
- Compartilhar os resultados obtidos com a comunidade de algoritmos e combinatória em eventos nacionais e internacionais.

1.2 Metodologia de desenvolvimento do trabalho

A metodologia de desenvolvimento inclui os seguintes itens:

- Aquisição de material, revisão da literatura e realização de disciplinas para adquirir o ferramental teórico necessário para o desenvolvimento do projeto de pesquisa.
- Participação de reuniões periódicas com a orientadora e com o grupo de pesquisa de Otimização, Algoritmos e Complexidade Computacional.
- Estudo de algoritmos que fazem menção a grafos sob restrições disjuntivas de tal forma a contribuir com a teoria comprometida através da estruturação da teoria envolvida, na divulgação, e na tentativa de geração de novos conceitos, propriedades, caracterizações e algoritmos.
- Estudos em problemas de escalonamento que podem ser vistos como uma aplicação teórica dos problemas clássicos em grafos sob restrições disjuntivas.
- Elaboração de resumos do projeto de pesquisa com documentação do embasamento teórico obtido e inclusão dos resultados parciais gerados, para a elaboração dos relatórios parcial e final, bem como apresentações.

- Divulgação da pesquisa através de seminários, participação em eventos nacionais e internacionais de relevância, e, publicação em periódicos importantes para a área.
- Elaboração da tese partindo dos resultados obtidos e registrados durante a pesquisa.

1.3 Cronograma

Nº	Descrição	Ago	Set	Out	Nov	Dez
1	Levantamento de material, revisão da literatura.	X	X	X	X	X
2	Reuniões periódicas com o orientador e o grupo de pesquisa	X	X	X	X	X
3	Realização de disciplinas optativas relacionadas	X	X	X	X	X
4	Elaboração da Apresentação da proposta do projeto de pesquisa e revisão da literatura	X	X	X	X	
5	Desenvolvimento da pesquisa (caracterizações, provas, análise complexidade, elaboração de algoritmos)	X	X	X	X	X
6	Elaboração do Resumo e Relatório Parcial				X	X
7	Elaboração do Resumo e Relatório Final (atividade obrigatória)					
8	Preparação da Apresentação Final para o Congresso (atividade obrigatória)					
9	Divulgação dos resultados (participação em eventos e publicação em revistas científicas)					

Tabela 1.1: Cronograma de atividades em 2014

Nº	Descrição	Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul
1	Levantamento de material, revisão da literatura.				X	X		
2	Reuniões periódicas com o orientador e o grupo de pesquisa	X	X	X	X	X	X	X
3	Realização de disciplinas optativas relacionadas	X	X					
4	Elaboração da Apresentação da proposta do projeto de pesquisa e revisão da literatura							
5	Desenvolvimento da pesquisa (caracterizações, provas, análise complexidade, elaboração de algoritmos)	X	X	X	X	X		
6	Elaboração do Resumo e Relatório Parcial	X						
7	Elaboração do Resumo e Relatório Final (atividade obrigatória)				X	X	X	X
8	Preparação da Apresentação Final para o Congresso (atividade obrigatória)						X	X
9	Divulgação dos resultados (participação em eventos e publicação em revistas científicas)					X	X	X

Tabela 1.2: Cronograma de atividades em 2015

Capítulo 2

Referencial teórico

É comum se utilizar grafos para modelar relações entre objetos ou sistemas, pois possuem aplicações a diferentes campos da ciência, como matemática, computação, física, biologia, ciências sociais, econômicas etc. Um problema famoso histórico da matemática que foi modelado em grafos, por exemplo, é o das Sete Pontes de Königsberg, onde se discute a possibilidade de se atravessar todas as sete pontes sem repetir nenhuma. E para solucionar o problema basta verificar se o grafo criado a partir do mesmo possui o circuito euleriano, que nada mais é do que um circuito que visita todas as arestas apenas uma vez. Problemas com plicações práticas podem ser modeladas em grafos, como problemas de escalonamento de tarefas [1], análise de fluxo de dados [6] etc.

2.1 Definições Básicas

2.1.1 Grafos

Um grafo G consiste num par ordenado (V,E) de conjuntos, onde V é o conjunto de vértices e E é o conjunto de arestas. A ligação entre dois vértices formam uma aresta, esses vértices são suas extremidades. A seguir, serão apresentadas alguma tipos de grafos:

2.1.1.1 Grafos Simples e Multigrafos

Um grafo simples é um grafo que não contém laços e nem arestas múltiplas. Laço é uma aresta com extremos idênticos e arestas múltiplas são duas ou mais arestas com o mesmo par de vértices como extremos. Qualquer grafo citado neste trabalho deve ser considerado

como um grafo simples, se não for descrito como outro tipo durante a abordagem.

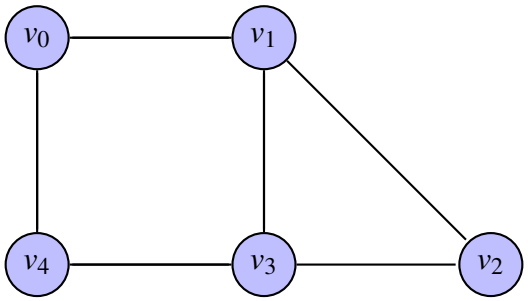

Figura 2.1: Um grafo simples com 5 vértices e 4 arestas.

Quando dois vértices estão ligados por mais de uma aresta, o grafo é denominado multigrafo ou grafo com arestas múltiplas.

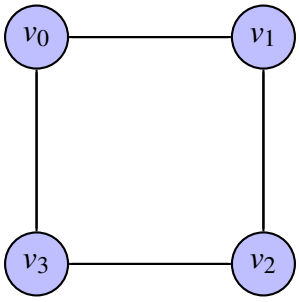

Figura 2.2: Um grafo simples com 4 vértices e 4 arestas.

2.1.1.2 Ciclos e Grafos Acíclicos

Um ciclo em um grafo é um caminho fechado sem vértices repetidos. Mais precisamente, sendo v_i um vértice i e a_j uma aresta j, um ciclo é um caminho (v_0, a_1, v_1, a_2, ..., a_k, v_k) com $k \geq 1$ onde $v_k = v_0$ mas v_0, v_1, v_2, ..., v_{k-1} são distintos dois a dois.

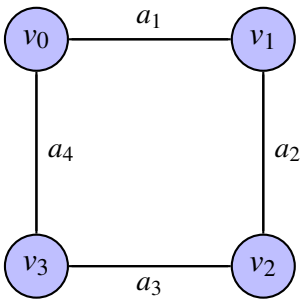

Figura 2.3: Um caminho fechado (v_0, a_1, v_1, a_2,v_2, a_3, v_3, a_4, v_0).

Um grafo acíclico é um grafo que não contém ciclos.

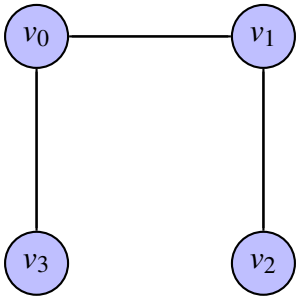

Figura 2.4: Um grafo acíclico com 4 vértices e 3 arestas.

2.1.1.3 Grafos Direcionados

Um grafo direcionado $G = (V, A)$ consiste de um conjunto finito de vértices V e de um conjunto de arcos A, onde (v_0, v_1) é um arco que sai de v_0 e chega a v_1. O vértice v_0 é dito predecessor do vértice v_1 e v_1 é sucessor de v_0. Esse arco indica a direção em que deve-se caminhar pelo grafo.

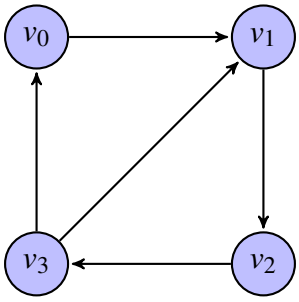

Figura 2.5: Um grafo direcionado com 4 vértices e 5 arcos

2.2 Complexidade Computacional

A teoria complexidade computacional é a área da computação que se concentra em agrupar problemas computacionais de acordo com sua dificuldade característica, e associar essas classes entre si. Nesse ambiente um problema computacional é entendido como

uma tarefa que é, em princípio, capaz de ser resolvida por um computador.Por exemplo, o teste de primalidade é o problema de designar se um dado número é primo ou não. As instâncias deste problema são números naturais, e a solução para uma instância é sim ou não, dependendo se o número é primo ou não.

Este ramo se desenvolveu quando houve-se necessidade de medir a dificuldade de determinadas tarefas com base na quantidade de recursos computacionais necessários para computá-las e então, criaram uma classificação dos problemas que podem ser resolvidos por meio de algoritmos de acordo com o grau de dificuldade.

Assim, os objetivos mais importantes dessa área se trata de especialmente estimar os recursos computacionais necessários para solucionar problemas algorítmicos, e em consequência disso classificar e indicar a eficiência dos problemas computacionais.

2.2.1 Problemas de Decisão

Problemas de decisão consiste na verificação (decisão) da veracidade ou não de determinada questão para o problema cuja a resposta é binária (sim ou não). Apesar de existirem problemas de outra natureza como problemas de otimização e problemas de avaliação (ou configuração), toda teoria da complexidade baseia-se em problemas de decisão, sem perda de generalidade.

Vale ressaltar que todo problema de otimização (ou de avaliação) pode ser transformado numa versão de decisão do problema, de tal forma que a versão de decisão possa ser resolvida em tempo polinomial se a versão de otimização (ou de avaliação) também puder.

Um problema de decisão D se transforma polinomialmente em um outro problema de decisão D' se sempre é possível, a partir de uma instância de D, I_D, construir uma instância de D', I'_D, em tempo polinomial em relação ao trabalho da instância de D, tal que I_D tem solução *sim* se e somente se, I'_D, tem solução *sim*. Se D se reduz polinomialmente a D' então, se existe um algoritmo polinomial para resolver D', também existirá um algoritmos polinomial para resolver D [3].

2.2.2 Classe P

A classe P consiste em todos os problemas de decisão que podem ser resolvidos por uma máquina determinística sequencial em uma quantidade de tempo que é polinomial para

o tamanho da entrada. Esta classe de problemas é o conjunto de todos os problemas polinomiais. Problemas desse tipo são considerados fáceis. Dessa forma, P é a denotação do conjunto de problemas computacionais com soluções que podem ser encontradas de forma eficiente. Problemas como ordenação, caminho mínimo, árvore geradora mínima, emparelhamento máximo, fluxo máximo em redes são resolvidos em tempo polinomial, e portanto são problemas em P.

2.2.3 Classe NP

A classe NP (que vem do inglês *Nondeterministic Polynomial*) consiste nos problemas que são verificáveis em tempo polinomial por meio de algoritmos não-determinísticos viáveis. Ou seja, o algoritmo gera uma solução candidata ao problema, e verifica sua viabilidade em tempo polinomial. Para verificar se um problema está em NP, é necessária uma busca exaustiva de soluções com um algoritmo que gera todas as respostas possíveis para uma dada instância e depois as checa. Como resultado, não é possível obter um algoritmo final que seja eficiente. A maioria dos pesquisadores acreditam que essa busca exaustiva não pode ser evitada, no entanto, até agora ninguém conseguiu comprovar esse fato matematicamente.

Se um problema pertence a classe P então também pertence a classe NP. De fato, se um algoritmo pode ser executado em tempo polinomial e tivermos em mãos um possível candidato S à solução, é possível executar o programa, gerar uma solução correta C e comparar C com S para certificar que S é de fato solução, tudo em tempo polinomial. Logo, podemos concluir que $P \subseteq NP$ [9].

2.2.4 Classe NP-Completo

A classe de complexidade NP-completo é o subconjunto dos problemas de decisão em NP de tal modo que todo problema em NP se pode reduzir, com uma transformação de tempo polinomial, a um dos problemas NP-completo. Pode-se dizer que os problemas NP-completos são os problemas mais difíceis de NP e muito provavelmente não formem parte da classe de complexidade P. A razão é que se conseguisse encontrar uma maneira de resolver qualquer problema NP-completo rapidamente (em tempo polinomial) , então poderiam ser utilizados algoritmos para resolver todos problemas NP rapidamente.

2.2.5 Classe NP-Difícil

Podemos chamar a classe NP-Difícil como uma classe de problemas que compreende todos os problemas NP-Completo ou mais difíceis. A classe NP-Difícil constitui-se de todos os problemas que não possuem solução determinística polinomial conhecida e que são polinomialmente equivalentes entre si. Problemas da classe NP-Difícil não necessariamente possuem uma forma eficiente de verificar suas soluções, ou seja, ao contrário dos problemas da classe NP, não necessariamente existem métodos polinomiais de verificar se uma resposta para um problema de decisão dessa classe é correta. Assim, os problemas polinomiais citados anteriormente, quando sujeitos à restrições disjuntivas tornam-se NP Difíceis.

O problema P vs NP é muito utilizado na criptografia moderna. Serviços como a segurança da Internet e transações financeiras dependem de algumas hipóteses relacionadas a esse problema, como a dificuldade de fatorar números inteiros muito grandes. Se P = NP, significaria que existe uma solução para essas hipóteses, comprometendo a segurança desses serviços.

Além disso, se fosse provado que P = NP, aconteceriam mudanças fantásticas não apenas na área de ciência da computação, mas também em diversas outras. Um computador poderia encontrar provas formais para diversos teoremas da matemática contemporânea, por exemplo, e a área de inteligência artificial seria muito favorecida pela existência de algoritmos práticos para problemas NP.

Capítulo 3

Definição dos problemas

A depender da aplicação prática, ciclos podem ser indesejáveis ou não considerando um grafo direcionado. Assim introduz-se o problema do SAM (Subgrafo Acíclico Máximo). Este problema (do inglês, *Maximum Acyclic Subgraph*) consiste em, dado um grafo $G = (V,A)$, determinar um subconjunto máximo $A' \subseteq A$ para o qual o subgrafo $G' = (V,A')$ seja acíclico. A seguir, é apresentado o exemplo de um grafo direcionado que contém ciclos acompanhado de uma instância (a figura seguinte) que soluciona o problema do SAM (Subgrafo Acíclico Máximo):

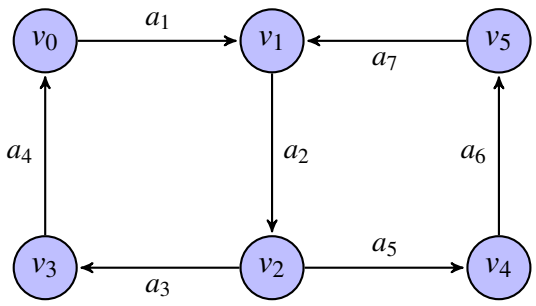

Figura 3.1: Grafo $G = (V,A)$ é um exemplo de instância para o problema do SAM.

Observe que, para esta instância, o grafo G possui dois ciclos, $c_1 = (v_0 a_1 v_1 a_2 v_2 a_3 v_3 a_4 v_0)$ e $c_2 = (v_1 a_2 v_2 a_5 v_4 a_6 v_5 a_7 v_1)$, dessa forma, uma solução para o SAM é retirar o arco a_2, pois o grafo se tornará o grafo de maior cardinalidade de vértices e ainda será acíclico. A seguir, é mostrada a solução descrita:

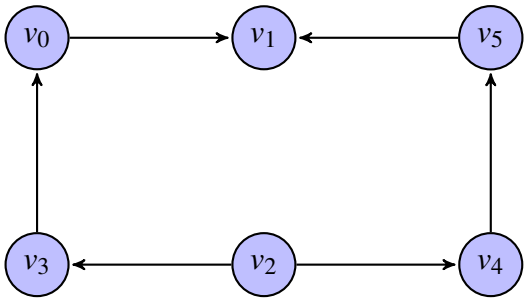

Figura 3.2: Uma solução para a instância do SAM apresentado na figura anterior.

Assim como existem problemas clássicos que podem ser modelados em grafos, pode-se mencionar extensões de problemas que apresentam certas restrições. Chamam-se restrições disjuntivas binárias aquelas nas quais um cenário ou outro pode ocorrer. No caso das disjuntivas binárias, estas podem ser:

- **Restrições Disjuntivas Negativas** ou **de Conflito**: aquelas nas quais um certo par de entidades não podem compor simultaneamente uma solução viável.
- **Restrições Disjuntivas Positivas** ou de **Coação**: para cada par de entidades, pelo menos uma delas deve compor uma solução viável.

Na literatura estão disponíveis vários problemas clássicos em teorias dos grafos modelados sob restrições disjuntivas, positivas ou negativas,tais como os problemas de Árvore Geradora Mínima, Emparelhamento Máximo, Caminho Mínimo e Fluxo Máximo [2] [7] [8] [5]. Na próxima seção serão apresentadas as definições formais para cada problema gerado a partir dessas duas restrições disjuntivas citadas.

3.1 Problema do Subgrafo Acíclico Máximo sob Restrições Disjuntivas Positivas (SAMRDP)

Seja $G = (V,A)$ um grafo direcionado e $\overline{G} = (A,E)$ o grafo de coação associado. O problema do Subgrafo Acíclico Máximo sob Restrições Disjuntivas Positivas consiste em determinar o subconjunto $A' \subseteq A$ de cardinalidade máxima, no qual o subgrafo $G' = (V,A')$ seja acíclico e A' seja uma cobertura por vértices em $\overline{G}$.

A figura a seguir mostra um exemplo de aplicação do problema do SAMRDP, observe que no grafo G (Figura 3.3) existe uma restrição disjuntiva acerca do par de arcos tracejados $\{A_{1,0}, A_{2,0}\}$ ou ainda $\{a_1, a_3\}$. A figura foi retirada da tese a qual este trabalho está sendo baseado [4].

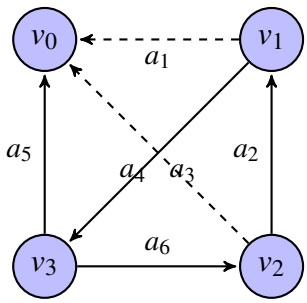

Figura 3.3: Grafo $G = (V, A)$ é um exemplo de instância para o problema do SAMRDP.

O grafo de coação associado é apresentado a seguir, onde os arcos do grafo G tornam-se vértices no grafo de coação $\overline{G}$. E além disso, os arcos sob restrições disjuntivas que se tornaram vértices, unidos por uma aresta representa a restrição disjuntiva.

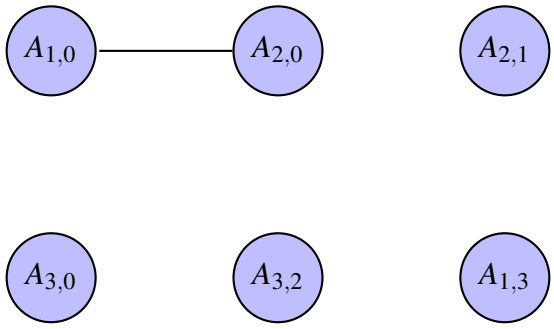

Figura 3.4: Grafo $\overline{G} = (A, E)$ de coação associado.

O grafo seguinte mostra o conjunto de vértices A' selecionados em $\overline{G}$, que no caso das restrições disjuntivas positivas, se trata de uma cobertura por vértices. Tal que A' seja máximo e induza um subgrafo acíclico em G. Dessa maneira, o vértice $A_{2,3}$ não pertence ao conjunto A', já que com esse arco será evidente a presença de um ciclo indesejável.

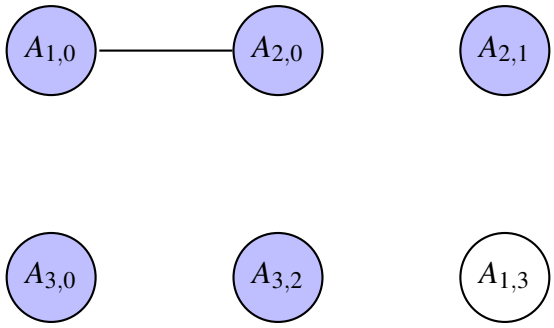

Figura 3.5: A': cobertura por vértice selecionado em $\overline{G}$.

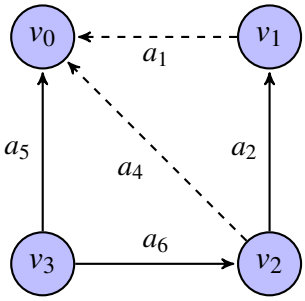

Figura 3.6: Solução dada pelo grafo $G' = (V, A')$

3.2 Problema do Subgrafo Acíclico Máximo sob Restrições Disjuntivas Negativas (SAMRDN)

Seja $G = (V, A)$ um grafo direcionado e $\overline{G} = (A, E)$ o grafo de conflitos associado. O problema do Subgrafo Acíclico Máximo sob Restrições Disjuntivas Negativas consiste em determinar o subconjunto $A' \subseteq A$ de cardinalidade máxima, no qual o subgrafo $G' = (V, A')$ seja acíclico e A' seja um conjunto independente em $\overline{G}$.

A figura a seguir mostra um exemplo de aplicação do problema do SAMRDN, observe que no grafo G (Figura 3.3) existe uma restrição disjuntiva acerca do par de arcos tracejados $\{A_{1,0}, A_{2,0}\}$ ou ainda $\{a_1, a_3\}$. A figura foi retirada da tese a qual este trabalho está sendo baseado [4].

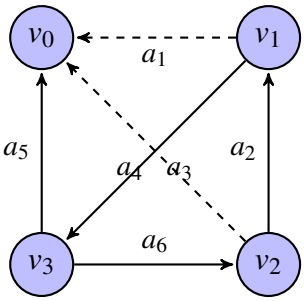

Figura 3.7: Grafo $G = (V, A)$ é um exemplo de instância para o problema do SAMRDN.

O grafo de conflito associado é apresentado a seguir, onde os arcos do grafo G tornam-se vértices no grafo de conflito $\overline{G}$. E além disso, os arcos sob restrições disjuntivas que se tornaram vértices, unidos por uma aresta representa a restrição disjuntiva.

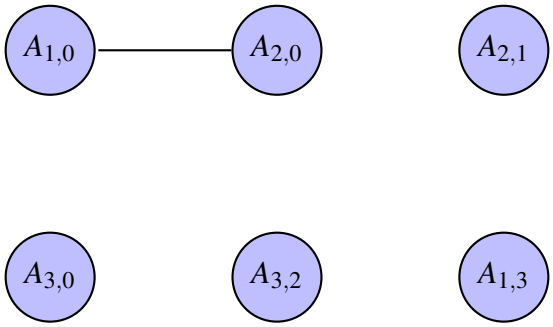

Figura 3.8: Grafo $\overline{G} = (A, E)$ de conflito associado.

O grafo seguinte mostra o conjunto de vértices A' selecionados em $\overline{G}$, que no caso das restrições disjuntivas negativas, se trata do conjunto independente. Tal que A' seja máximo e induza um subgrafo acíclico em G. Dessa maneira, o vértice $A_{2,3}$ não pertence ao conjunto A', já que com esse arco será evidente a presença de um ciclo indesejável.

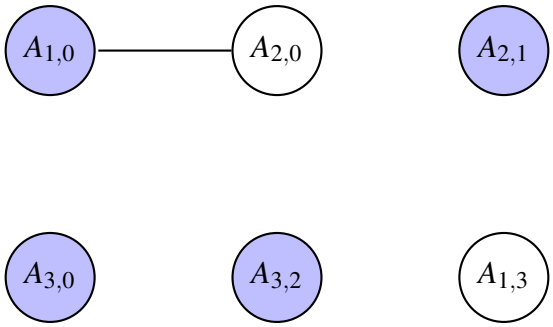

Figura 3.9: A': conjunto independente selecionado em $\overline{G}$

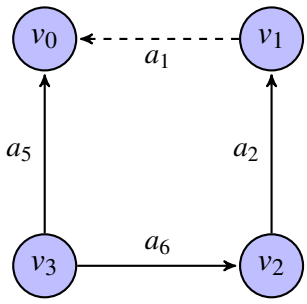

Figura 3.10: Solução dada pelo grafo $G' = (V, A')$

A aplicação do SAM é comum em projetos que exigem preferência de precedência entre tarefas. Esses problemas podem ser formulados como o problema do SAM com a inclusão de restrições disjuntivas entre pares de arcos, seja forçando que preferências consideradas importantes no projeto sejam realizadas, ou quando deseja-se atribuir uma ordenação parcial ás tarefas de forma a cumprir o maior número possível de preferências.

Capítulo 4

Considerações finais

Este relatório final apresentou o conteúdo de problemas em grafos sob restrições disjuntivas. O objetivo deste projeto é, estudar e investigar classes de grafos que tendem a ter uma melhor performance quando usados em algoritmos que são pelo menos 1/2 aproximativos. Além disso, foram estudados problemas relcionados de teoremas já verificados até aqui.

Referências

[1] E. G. Coffman Jr ; R. L. Graham. *Optimal scheduling for two-processor system*. Acta Inf, 1972.

[2] V. Kann. *Polynomially bounded minimization problems which are hard to approximate*. Springer Berlin/Heidelberg, 1993.

[3] R. M. Karp. *Reducibility among combinatorial problems*. Complexity of Computer Computations, 1972.

[4] Silvia Maria Santana Mapa. Algoritmos para o problema do subgrafo aciclico maximo sob restricoes disjuntivas. Master's thesis, Instituto de Ciencias Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais, 2014.

[5] R. Zhang; S. N. Kabadi; A. P. Punnen. *The minimum spanning tree problem with conflict constraints and its variations*. Discrete Optimization, 2011.

[6] V. Ramachandran. *Finding a minimum feedback arc set in reducible flow graphs*. J. Algorithms, 1988.

[7] A. Darmann; U. Pferschy; J. Schauer. *Determining a minimum spanning tree with disjunctive constraints*. Springer Berlin Heidelberg, 2009.

[8] U. Pferschy; J. Schauer. *The maximum flow problem with disjunctive constraints*. Journal of Combinatorial Optimization, 2013.

[9] T. H. CORMEN; C. E. LEISERSON; R. L. RIVEST; C. I. STEIN. *Introduction to Algorithms*. MIT Press, 2009.