



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE COMPUTAÇÃO
PROJETO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA**

GRAFOS PERFEITOS, CLIQUES E COLORAÇÕES

ANA VITÓRIA VITORIANO CORDEIRO

Julho de 2015

Manaus - AM

ANA VITÓRIA VITORIANO CORDEIRO

GRAFOS PERFEITOS, CLIQUES E COLORAÇÕES

Relatório Técnico Final de Projeto de Iniciação Científica, organizado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Amazonas, na Universidade Federal do Amazonas, apresentado como requisito obrigatório definido pelo termo de compromisso.

Orientadora: Rosiane de Freitas Rodrigues, D.Sc.

Julho de 2015

Manaus - AM

Sumário

Lista de Figuras	c
1 Introdução	1
2 Referencial teórico	3
2.1 Alguns conceitos básicos sobre grafos	3
2.2 Cliques em grafos	6
2.2.1 Clique máxima e maximal	7
2.3 Coloração de grafos	8
2.4 Grafos perfeitos	9
2.4.1 Grafos cordais	9
2.4.2 Grafos bipartidos	10
2.5 Complexidade computacional	11
2.5.1 O problema P vs NP	11
3 Grafos perfeitos	12
3.1 Caracterização	12
3.1.1 Teoremas	13
3.1.2 Subclasses de grafos perfeitos	17
3.1.3 Reconhecimento de grafos perfeitos	18
4 Resultados Obtidos	19
4.1 Algoritmo de reconhecimento de grafos cordais	19
5 Conclusão	22
5.1 Contribuições do projeto	22

SUMÁRIO

b

Referências

23

Lista de Figuras

2.1	Exemplo de grafo simples com 6 vértices e 6 arestas.	3
2.2	Grafo com laço: um dos vértices possui uma aresta cujos dois extremos incidem nele.	4
2.3	Multigrafo, em que existem arestas paralelas, ou seja, arestas que ligam os mesmos vértices.	5
2.4	Grafo direcionado, em que as arestas possuem direções que determinam como o grafo pode ser percorrido.	5
2.5	Grafos G e G' : G' representa um grafo induzido por pelo subconjunto (a, b, c, d) de $V(G)$	6
2.6	Grafo completo K_6 : possui todos os vértices conectados entre si.	6
2.7	Clique K_3 : subgrafo de 3 vértices conectados entre si.	7
2.8	(a) Clique maximal: cliques que não são subconjunto de outros subgrafos completos em um grafo G ; (b) clique máxima: clique de maior cardinalidade em G	7
2.9	Grafo simples e conexo com 5 vértices e número cromático igual a 4.	8
2.10	Exemplos de grafos cordais de 4, 5, 6 e 7 vértices. (https://en.wikipedia.org/wiki/Talk%3ALine_graph_of_a_hypergraph)	10
2.11	Exemplo de grafo bipartido com um grupo de vértices U de cardinalidade igual a 5,	11
3.1	Grafo de 5 vértices, com número cromático igual a 3, número de clique igual a 2 e número de estabilidade igual a 2. À direita, $\alpha\omega + 1$ conjuntos estáveis, tais que um número α deles cobre cada vértice do grafo.	14

3.2 Processo de eliminação de vértices de um conjunto estável arbitrário para a formação de $\alpha\omega + 1$ conjuntos estáveis tais que um número α deles cobre cada vértice do grafo. 15

3.3 As $\alpha\omega + 1$ cliques de tamanho ω de um grafo de 5 vértices, tais que para cada uma delas (K_i) existe um conjunto independente C_i que não compartilha vértices. 15

Capítulo 1

Introdução

Este projeto foi idealizado sob orientação da professora Rosiane de Freitas, a partir da realização de um Projeto de Iniciação Científica Júnior, em 2013/2014, abordando o tema *cliques em grafos*. Este projeto teve participação de alunos que ainda cursavam o Ensino Médio e seu objetivo principal era proporcionar a eles um contato com a pesquisa científica em Teoria dos Grafos e Otimização Combinatória, apresentando-lhes o arcabouço de conhecimentos relacionados a esta área. Assim, uma vez concluído o projeto, surgiu a ideia de se utilizar os saberes adquiridos e aprimorá-los, aplicando-os na realização de outro trabalho, com uma proposta mais desafiadora, porém, fortemente relacionada com a anteriormente estudada.

A motivação do projeto é a análise da classe de *grafos perfeitos*, suas principais subclasses e seus mais importantes teoremas e conjecturas. A partir de métodos encontrados na literatura, pretende-se verificar o comportamento de algoritmos eficientes a determinadas subclasses de grafos perfeitos, como também analisar a demonstração de teoremas existentes.

Metodologia de desenvolvimento

O desenvolvimento deste estudo seguiu a seguinte metodologia de pesquisa:

- Aquisição de material, revisão da literatura e realização de palestras para a aquisição do ferramental teórico necessário;
- Realização de reuniões periódicas com a orientadora e com o grupo de pesquisa de Otimização, Algoritmos e Complexidade Computacional;

- Estudo da Teoria dos Grafos, algoritmos e técnicas avançadas de programação, com ênfase nos algoritmos relacionados a grafos perfeitos;

Cronograma

Nº	Descrição	Ago 2014	Set	Out	Nov	Dez	Jan 2015	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul
1	Seminários e Estudos Dirigidos pelo Orientador	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
2	Comparação e execução de algoritmos					X	X	X	X	X	X	X	X
3	Elaboração do Relatório Parcial					X	X						
4	Elaboração do Resumo e Relatório Final											X	X
5	Preparação da Apresentação Final para o Congresso												X

Tabela 1.1: Cronograma de atividades

Organização do trabalho

Este relatório está organizado da seguinte forma:

- Capítulo 2: contém o referencial teórico do trabalho, em que há conceitos relacionados à teoria dos grafos.
- Capítulo 3: trata da caracterização de grafos perfeitos, teoremas e subclasses.
- Capítulo 4: resultados alcançados pelo desenvolvimento do projeto.
- Capítulo 5: conclusão do trabalho.

Capítulo 2

Referencial teórico

2.1 Alguns conceitos básicos sobre grafos

A área de Teoria dos Grafos fundamenta-se na utilização de uma estrutura combinatória robusta, usada para a representação de problemas: o grafo. Este consiste em um par ordenado de conjuntos (V, E) , em que E é um conjunto de elementos denominados arestas e V , um conjunto de vértices. Contidos em E , estão pares não-ordenados dos elementos de V [4]. Assim, esta estrutura pode ser representada graficamente como na figura 2.1 a seguir.

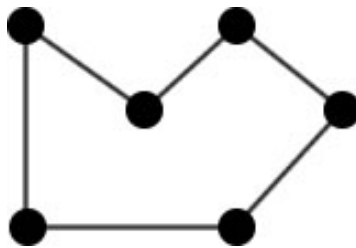


Figura 2.1: Exemplo de grafo simples com 6 vértices e 6 arestas.

Dessa forma, tem-se que, em um conjunto de vértices de um grafo, uma aresta representa a ligação entre dois deles. Estes, quando ligados, podem ser chamados de vértices adjacentes. O número de vezes em que arestas incidem sobre um vértice v , ou seja, ligam-no a outros, é chamado **grau de vértice** e pode ser simbolizado por $d(v)$ [8].

Analisando esta estrutura, pode-se perceber um padrão ao determinar a quantidade de arestas em relação aos vértices: a soma dos graus dos vértices de um grafo é sempre o

dobro do número de arestas. Ou seja, ao denotarmos um grafo por G , e seus conjuntos de vértices e arestas por $V(G)$ e $A(G)$, respectivamente, temos que:

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2 \cdot m$$

Quando, na representação de um problema, um vértice necessita estar ligado a ele mesmo, configura-se no que é chamado **laço**, representado na figura 2.2.

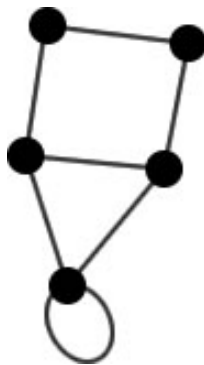


Figura 2.2: Grafo com laço: um dos vértices possui uma aresta cujos dois extremos incidem nele.

Grafos simples e multigrafos

Um grafo que não contém laços nem arestas que ligam os mesmos vértices (arestas múltiplas) pode ser denominado um **grafo simples**. Porém, quando, em um grafo G , dois vértices estão ligados por mais de uma aresta, G é denominado **multigrafo**. A figura abaixo representa um grafo com estes aspectos:

Grafos direcionados e não-direcionados

Um grafo pode ser chamado de **direcionado** quando possui pares ordenados de vértices, arestas direcionadas. Dessa forma, o grafo pode ser percorrido apenas seguindo-se as direções destas arestas. Como exemplificado na figura 2.5:

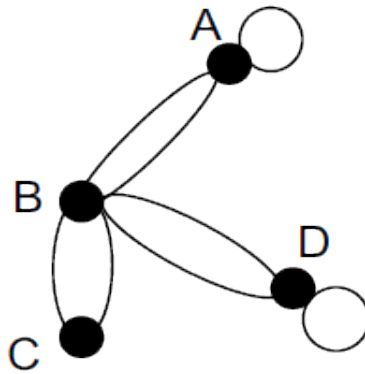


Figura 2.3: Multigrafo, em que existem arestas paralelas, ou seja, arestas que ligam os mesmos vértices.

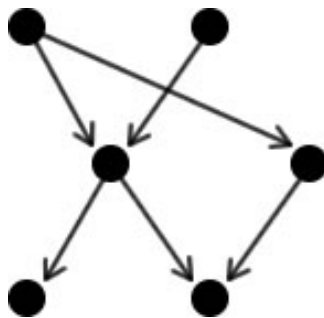


Figura 2.4: Grafo direcionado, em que as arestas possuem direções que determinam como o grafo pode ser percorrido.

Quando um grafo não possui essas características é dito **não-direcionado**.

Subgrafos

Determinado grafo G' é dito subgrafo de G quando seu conjunto de arestas está contido no conjunto de arestas de G e seu conjunto de vértices está inserido no conjunto de vértices de G . Isto é, $V(G') \subset V(G)$ e $A(G') \subset A(G)$. Quando todas as arestas incidentes a determinados vértices pertencentes a G estão presentes em G' , dizemos que este é um subgrafo induzido pelo subconjunto que contém estes vértices. Por exemplo, na figura 2.4, é visível que todas as arestas que incidem sobre os pontos a, b, c e d no grafo G aparecem também no grafo G' . Logo, G' constitui-se em um subgrafo induzido pelo subconjunto (a, b, c, d) de $V(G)$ [14].

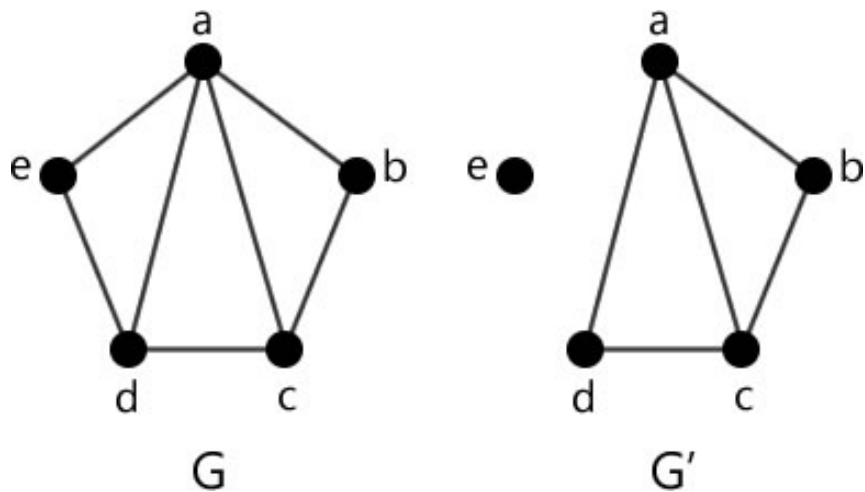


Figura 2.5: Grafos G e G' : G' representa um grafo induzido por pelo subconjunto (a, b, c, d) de $V(G)$.

Grafos completos

Uma definição importante para a fundamentação deste estudo é a de grafo completo. Conceitua-se como um grafo onde todos os vértices são ligados uns aos outros, ou seja, todo par de vértices possui sua respectiva aresta. Pode ser denotado por K_n , em que n representa o número de vértices. Na figura 2.6, há um exemplo de um grafo completo K_6 .

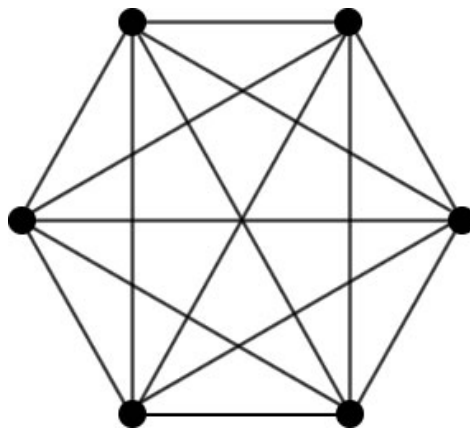


Figura 2.6: Grafo completo K_6 : possui todos os vértices conectados entre si.

2.2 Cliques em grafos

Uma clique em um grafo não-direcionado é um subconjunto de seus vértices tais que cada dois vértices são adjacentes, ou seja, um subgrafo completo deste grafo [4]. Na

representação do grafo na figura 3.1, os pontos em destaque são os vértices que constituem uma clique pertencente a ele.

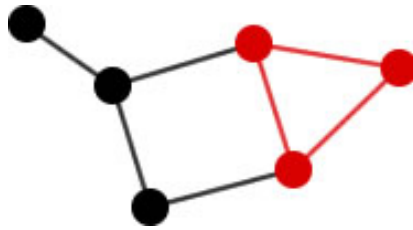


Figura 2.7: Clique K_3 : subgrafo de 3 vértices conectados entre si.

2.2.1 Clique máxima e maximal

Existem dois conceitos fundamentais para a resolução de problemas relacionados a cliques, o de clique maximal e de clique máxima. Cliques maximais são definidas como cliques que não são subconjunto de outros subgrafos completos em um grafo G . Já a clique máxima consiste na clique de maior cardinalidade em G , isto é, a que possui o maior número de vértices.

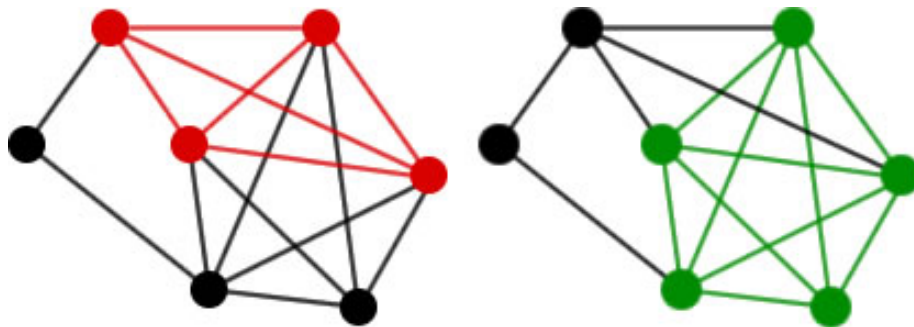


Figura 2.8: (a) Clique maximal: cliques que não são subconjunto de outros subgrafos completos em um grafo G ; (b) clique máxima: clique de maior cardinalidade em G .

Na figura 3.2, está representado o grafo não-direcionado G . Os vértices coloridos de vermelho compõem um exemplo de clique maximal, pois não estão contidos em uma clique maior. Os vértices coloridos de verde representam a clique máxima de G , já que é a clique com maior número de vértices no grafo. O tamanho (número de vértices) da maior clique de G é chamado número de clique e pode ser notado como $\omega(G)$.

Conjunto estável de um grafo

Um conjunto estável ou independente em um grafo $G = (V, E)$ é um subconjunto S de V que não possui arestas. S é um conjunto estável de G se e somente se é uma clique de \bar{G} (complemento de G). O tamanho do maior conjunto estável de G é chamado de *número de estabilidade* e pode ser denotado por $\alpha(G)$.

2.3 Coloração de grafos

O problema clássico da coloração de grafos, considerado NP-difícil, em sua forma mais simples, consiste na tarefa de colorir os vértices ou arestas de um grafo simples e conexo de forma que dois vértices (ou arestas) adjacentes não compartilhem a mesma cor. A convenção do uso de cores provém de colorir os países de um mapa. Este foi generalizado para coloração das faces de um grafo incorporado no plano. Pela dualidade planar se passou a colorir os vértices, e desta forma se generalizou a todos os grafos. O número mínimo de cores com o qual é possível colorir um grafo sob essas condições é denominado *número cromático* e dizemos que um grafo G é k -colorível se podemos atribuir um determinado número de cores k para colorir G .

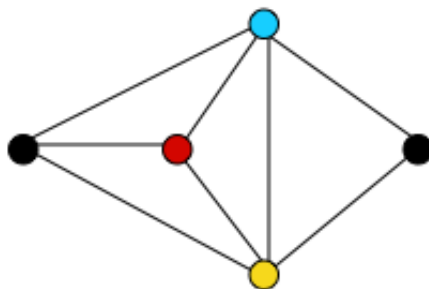


Figura 2.9: Grafo simples e conexo com 5 vértices e número cromático igual a 4.

Dado um grafo G e um conjunto C de cores para cada vértice v , uma **lista-coloração** pode ser definida como uma função que atribui a cada vértice v uma cor do conjunto C (chamado de lista). Assim como em uma coloração comum de grafos, uma lista-coloração assume como propriedade o fato de que dois vértices adjacentes não podem possuir a

mesma cor. Um grafo é *k-choosable* se é possível fazer uma lista-coloração onde cada vértice possui uma lista de k cores.

2.4 Grafos perfeitos

Um grafo perfeito é um grafo em que o *número cromático* de cada subgrafo induzido é igual ao seu *número de clique*. Em qualquer grafo, o número de clique fornece um limite inferior para o número cromático, assim como todos os vértices em uma clique devem ser atribuídos cores distintas em qualquer coloração adequada. Os grafos perfeitos são aqueles para os quais este limite inferior é pequeno, não apenas no grafo em si, mas em todos os seus subgrafos induzidos.

Grafos perfeitos incluem muitas famílias importantes de grafos, e servem para unificar os resultados relativos a colorações e cliques nessas famílias. Por exemplo, em todos os grafos perfeitos, o problema da coloração de grafos e o problema da clique máxima podem ser resolvidos em tempo polinomial (paper Lovasz). Algumas destas famílias que serão exploradas neste trabalho são: grafos de permutação, grafos bipartidos, grafos de linha e grafos divididos.

2.4.1 Grafos cordais

Um grafo é denominado *cordal* se todo ciclo de no mínimo 4 vértices possui uma corda, ou seja, uma aresta interligando dois vértices não subsequentes [12], como ilustrado na Figura 2.10.

Seja um grafo $G = (V, E)$, com $n = |V|$ e $v \in V$ um vértice qualquer de G , dizemos que v é *simplicial* quando os vizinhos de v compõem uma clique em G .

Um *esquema de eliminação perfeita (EEP)* pode ser definido como uma sequência de n vértices, de maneira que todo eles sejam simpliciais no subgrafo de G induzido por cada vértice e os que o seguem na sequência [2]. Um grafo é cordal se possui uma ordem de eliminação perfeita.

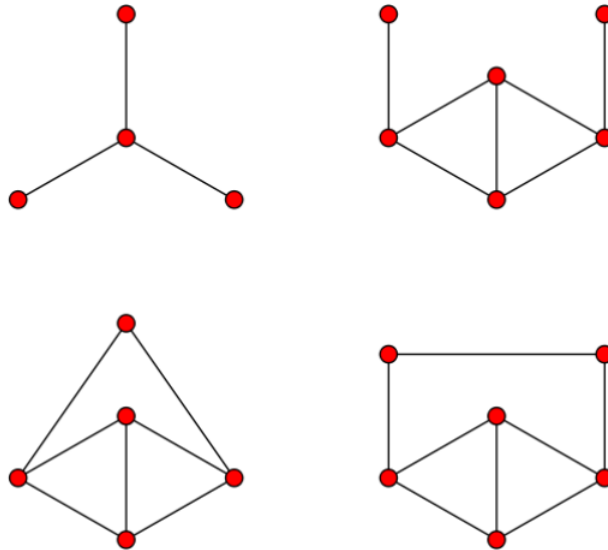


Figura 2.10: Exemplos de grafos cordais de 4, 5, 6 e 7 vértices. (https://en.wikipedia.org/wiki/Talk%3ALine_graph_of_a_hypergraph)

2.4.2 Grafos bipartidos

um grafo bipartido ou bigrafo é um grafo cujos vértices podem ser divididos em dois conjuntos disjuntos U e V tais que toda aresta conecta um vértice em U a um vértice em V ;[1] ou seja, U e V são conjuntos independentes. Equivalentemente, um grafo bipartido é um grafo que não contém qualquer ciclo de comprimento ímpar.

Algumas propriedades de grafos bipartidos:

- Um grafo é bipartido se e somente se ele não contém um ciclo ímpar. Portanto, um grafo bipartido não pode conter uma clique de tamanho maior ou igual a 3.
- Um grafo é bipartido se e somente se ele é 2-colorível, (i.e. seu número cromático é menor ou igual a 2).
- O tamanho da cobertura de vértices mínima é igual ao tamanho da clique máxima (teorema de König).
- O tamanho do conjunto independente máximo mais o tamanho do acoplamento máximo é igual ao número de vértices.
- Todo grafo bipartido é um grafo perfeito.

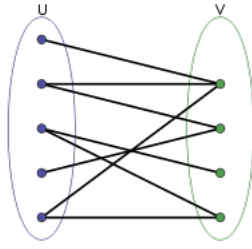


Figura 2.11: Exemplo de grafo bipartido com um grupo de vértices U de cardinalidade igual a 5,

2.5 Complexidade computacional

A complexidade computacional é uma área da Ciência da Computação que procura determinar por quais motivos certos problemas decidíveis são tão dificilmente resolvidos por computadores.

Esta área fundamenta-se na ideia de se medir a complexidade de determinadas tarefas a partir da estimativa da quantidade de recursos computacionais necessários para computá-las. Isto resulta na classificação dos problemas que podem ser resolvidos algoritmicamente de acordo com o seu grau de dificuldade. E, assim, são feitos estudos relacionados à eficiência de diversos modelos computacionais [11].

2.5.1 O problema P vs NP

P consiste no conjunto de problemas computacionais com soluções que podem ser encontradas de maneira eficiente. Por sua vez, NP é uma classe de problemas computacionais com soluções que podem ser eficientemente verificados. Logo, o problema P vs NP trata-se da relação entre essas duas classes, ou seja, se pra todo problema verificável há um algoritmo que o solucione de modo eficaz.

O problema P vs NP procura responder se essa busca exaustiva por soluções pode ser sempre evitada. Embora a maioria dos pesquisadores acredite que a busca exaustiva seja essencial, ninguém até agora foi capaz de exibir uma prova matemática para isto.

Capítulo 3

Grafos perfeitos

Nesta seção, serão apresentadas as características dos grafos perfeitos e os principais teoremas nos quais está baseada a maior parte da teoria relacionada a esta classe.

3.1 Caracterização

Tomando as seguintes propriedades de um grafo não-direcionado definidas no capítulo 2:

1. $\omega(G)$, o *número de clique*, que consiste na clique de maior cardinalidade de um grafo;
2. $\chi(G)$, o *número cromático*, que é o menor número de cores necessárias para realizar-se uma *coloração* em um grafo, ou, equivalentemente, o menor número de conjuntos independentes necessários para cobrir seus vértices;

um grafo G pode ser definido como *perfeito* se satisfizer a propriedade

$$\omega(G') = \chi(G') \quad (\forall G' \subseteq G). \quad (3.1)$$

Claude Berge (darei quem é na introdução), por meio de seus estudos pioneiros na caracterização de grafos perfeitos, notou que todas as classes de grafos que satisfaziam 3.1 analisadas também atendiam a propriedade

$$\alpha(G') = k(G') \quad (\forall G' \subseteq G). \quad (3.2)$$

Onde $\alpha(G)$ corresponde ao *número de estabilidade* de G , ou seja, o tamanho do maior conjunto estável (independente) deste grafo; e $k(G)$ consiste no *número de cobertura de clique* de G , a menor quantidade de cliques necessárias para cobrir os vértices do grafo [7].

A partir disso, definiu dois tipos de perfeição: existe uma χ -perfeição em um grafo se este satisfaz a propriedade 3.1 e α -perfeição, se atende a 3.2. Assim, conjecturou que um grafo é χ -perfeito se e somente se é α -perfeito [1] [6]. Isto foi provado em 1972 por Lovász, dando origem ao **Teorema do Grafo Perfeito**.

3.1.1 Teoremas

Em 1961, Claude Berge propôs duas conjecturas relacionadas a grafos perfeitos. São elas:

- Conjectura fraca: *um grafo é perfeito se e somente se seu complemento também é perfeito.*
- Conjectura forte: *um grafo é perfeito se e somente se não contém buracos ímpares ou complementos de buracos ímpares.*

Mais tarde, em 1972, a Conjectura Fraca de Berge foi elegantemente provada por Lovász, dando origem ao Teorema do Grafo Perfeito.

Teorema 1 (Teorema do Grafo Perfeito) Sendo $G = (V, E)$ um grafo não-direcionado, G é perfeito se e somente se seu complemento \bar{G} é perfeito.

Provar este teorema equivale a mostrar que a χ -perfeição de um grafo implica na sua α -perfeição, ou seja, sendo um grafo G perfeito, se $\omega(G') = \chi(G')$, então $\alpha(G') = k(G')$ para todo $G' \subseteq G$.

L. Lovász propôs uma nova forma de enunciar esta conjectura de Berge e a demonstrou (Teorema 2) [9] [6]. Será apresentada a prova deste teorema elaborada por Gasparian [5], sob um ponto de vista algébrico [13].

Teorema 2 Um grafo G é perfeito se e somente se $\omega(G')\alpha(G') \geq |V(G')|$ para todo subgrafo G' de G .

Uma vez que $\omega(G') = \alpha(\bar{G}')$ e $\alpha(G') = \omega(\bar{G}')$, $\alpha(\bar{G}')\omega(\bar{G}') \geq |V(\bar{G}')|$. Logo, é possível concluir que o Teorema 2 implica no Teorema do Grafo Perfeito.

Demonstração [13]: Mostrar que um grafo é perfeito se $\omega(G')\alpha(G') \geq |V(G')|$ é simples. Para qualquer grafo H , vale a inequação $\chi(H)\alpha(H) \geq |V(H)|$. Se G é perfeito, então

$\chi(G') = \omega(G')$ para todo subgrafo induzido G' de G . Logo, se $\chi(G')\alpha(G') \geq |V(G')|$, então $\omega(G')\alpha(G') \geq |V(G')|$. Porém, provar a parte "somente se" do teorema é menos trivial.

Supõe-se que existe um grafo G que satisfaça a condição do teorema mas não é perfeito ($\chi(G) > \omega(G)$), tal que todo subgrafo induzido $G' \neq G$ de G atenda a propriedade $\chi(G') = \omega(G')$, ou seja, um grafo G que é imperfeito, mas possui subgrafos induzidos perfeitos.

Sendo $\omega = \omega(G)$ e $\alpha = \alpha(G)$ e $V(G) = \{1, \dots, n\}$, será mostrado que existem conjuntos estáveis $C = C_0, \dots, C_{\alpha\omega}$ tais que cada vértice de G é coberto por exatamente α conjuntos de C .

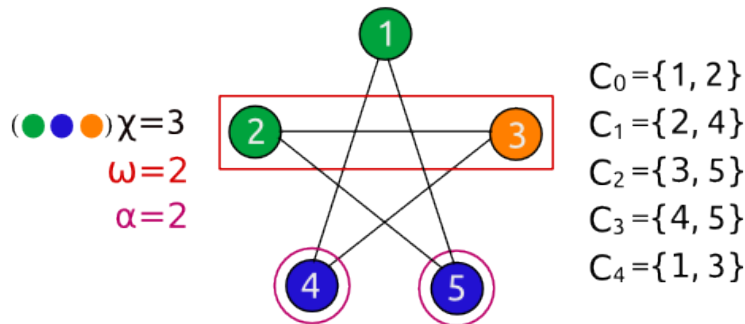


Figura 3.1: Grafo de 5 vértices, com número cromático igual a 3, número de clique igual a 2 e número de estabilidade igual a 2. À direita, $\alpha\omega + 1$ conjuntos estáveis, tais que um número α deles cobre cada vértice do grafo.

Tomando um conjunto estável C_0 de tamanho α pertencente a G . Pelas características de G , sabe-se que para cada $v \in C_0$, o subgrafo de G induzido por $V(G) \setminus \{v\}$ é perfeito e seu número de coloração é de no máximo ω (já que seu número de clique é de no máximo ω , visto que é subgrafo de G). Como o número cromático equivale à quantidade mínima de conjuntos estáveis necessários para cobrir os vértices de um grafo, é possível dizer que os vértices de $V(G) \setminus \{v\}$ podem ser cobertos por, no mínimo, ω conjuntos estáveis. Ou seja, $V(G) \setminus \{v\}$ pode ser particionado em ω conjuntos estáveis. Fazendo isso para cada $v \in C_0$, obtemos $\alpha\omega$ conjuntos estáveis diferentes que unidos com C_0 formam o conjunto C proposto anteriormente.

Para cada $i = 0, \dots, \alpha\omega$, existe uma clique K_i de tamanho ω tal que $K_i \cap C_i = \emptyset$.

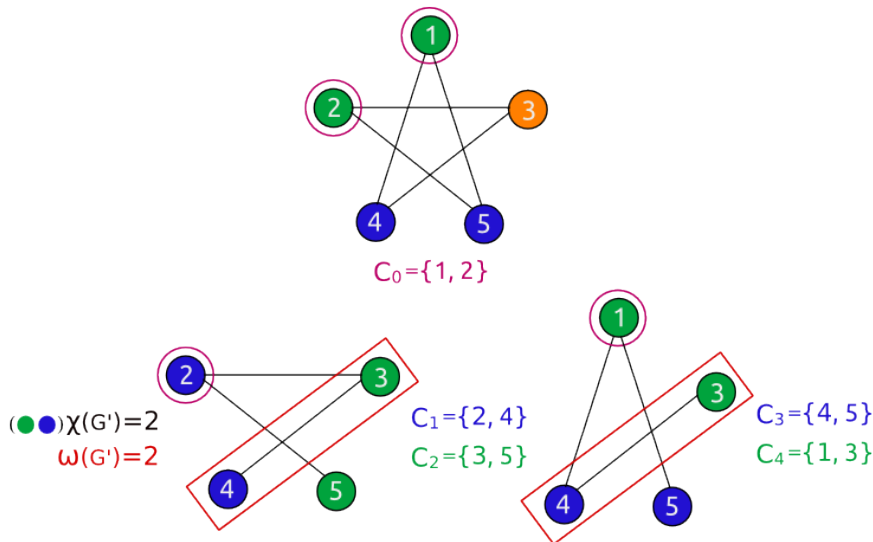


Figura 3.2: Processo de eliminação de vértices de um conjunto estável arbitrário para a formação de $\alpha\omega + 1$ conjuntos estáveis tais que um número α deles cobre cada vértice do grafo.

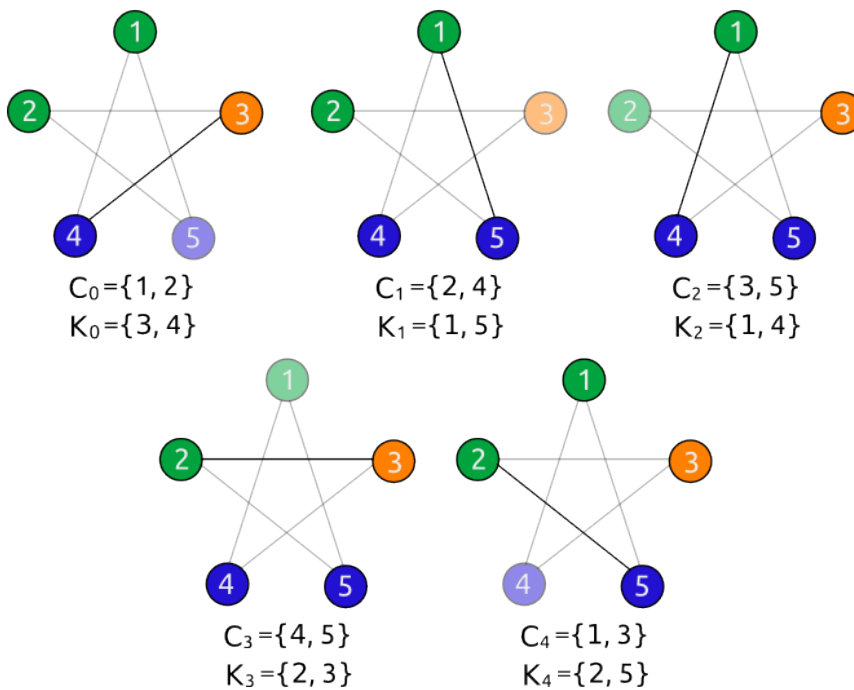


Figura 3.3: As $\alpha\omega + 1$ cliques de tamanho ω de um grafo de 5 vértices, tais que para cada uma delas (K_i) existe um conjunto independente C_i que não compartilha vértices.

Se isto não fosse verdade, um conjunto estável C_i compartilharia pelo menos um vértice com todas as cliques de G , assim, se esse conjunto fosse removido, o tamanho da maior clique seria diminuído. Portanto, o subgrafo G' de G induzido por $V(G) \setminus C_i$ teria

$\omega(G') < \omega$, assim, $\chi(G') \leq \omega - 1$. Adicionando C_i com vértices coloridos por apenas uma cor a G , será feita uma ω -coloração dos vértices de G , contradizendo a suposição de que $\chi(G) > \omega(G)$.

Assim, se $0 \leq i, j \leq \alpha\omega$ e $i \neq j$, tem-se que $|K_j \cap C_i| = 1$. Ou seja, tomando K como o conjunto das cliques citadas anteriormente e o conjunto C , também já definido, cada conjunto independente C_i compartilhará exatamente um vértice com todas as cliques de K , exceto uma, com a qual não compartilhará vértices. Essa conclusão pode ser feita a partir do fato de que cada clique do conjunto K compartilha no máximo um vértice com cada conjunto estável de C , e como mostrado anteriormente, intercepta $\alpha\omega$ conjuntos de C . Ou seja, existe apenas um conjunto estável em C que não compartilha um vértice com uma clique K_i , que pode ser chamado de C_i .

Agora, considerando as matrizes de incidência $M = (m_{i,j})$ e $N = (n_{i,j})$ com dimensão $(\alpha\omega + 1) \times n$ de C e K , respectivamente, $m_{i,j} = 1$ se $j \in C_i$ e $n_{i,j} = 1$ se $j \in K_i$, para $i = 0, \dots, \alpha\omega$ e $j = 1, \dots, n$. A partir disso, é possível verificar que $MN^T = J - I$, onde J é a matriz de dimensão $(\alpha\omega + 1) \times (\alpha\omega + 1)$ em que cada célula é preenchida por 1; e I é a matriz identidade de J .

	M	1	2	3	4	5
$C_0 = \{1, 2\}$	C_0	1	1	0	0	0
$C_1 = \{2, 4\}$	C_1	0	1	0	1	0
$C_2 = \{3, 5\}$	C_2	0	0	1	0	1
$C_3 = \{4, 5\}$	C_3	0	0	0	1	1
$C_4 = \{1, 3\}$	C_4	1	0	1	0	0

	N	1	2	3	4	5
$K_0 = \{3, 4\}$	K_0	0	0	1	1	0
$K_1 = \{1, 5\}$	K_1	1	0	0	0	1
$K_2 = \{1, 4\}$	K_2	1	0	0	1	0
$K_3 = \{2, 3\}$	K_3	0	1	1	0	0
$K_4 = \{2, 5\}$	K_4	0	1	0	0	1

$N^T =$

	K_0	K_1	K_2	K_3	K_4
1	0	1	1	0	0
2	0	0	0	1	1
3	1	0	0	1	0
4	1	0	1	0	0
5	0	1	0	0	1

$M \cdot N^T =$

	1	2	3	4	5
C_0	1	1	0	0	0
C_1	0	1	0	1	0
C_2	0	0	1	0	1
C_3	0	0	0	1	1
C_4	1	0	1	0	0

\cdot

	K_0	K_1	K_2	K_3	K_4
1	0	1	1	0	0
2	0	0	0	1	1
3	1	0	0	1	0
4	1	0	1	0	0
5	0	1	0	0	1

$=$

	K_0	K_1	K_2	K_3	K_4
C_0	0	1	1	1	1
C_1	1	0	1	1	1
C_2	1	1	0	1	1
C_3	1	1	1	0	1
C_4	1	1	1	1	0

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{c}
\mathbf{M.N^T} = \\
C_0 \\
C_1 \\
C_2 \\
C_3 \\
C_4
\end{array}
\begin{array}{c}
K_0 \quad K_1 \quad K_2 \quad K_3 \quad K_4 \\
\begin{array}{|c|c|c|c|c|}
\hline
0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
\hline
\end{array}
\end{array}
=
\begin{array}{c}
\begin{array}{|c|c|c|c|c|}
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
\end{array}
-
\begin{array}{c}
\begin{array}{|c|c|c|c|c|}
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
\end{array}
\end{array}
\end{array}
=
\begin{array}{c}
\begin{array}{|c|c|c|c|c|}
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
\end{array}
= \mathbf{J}
-
\begin{array}{c}
\begin{array}{|c|c|c|c|c|}
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
\end{array}
= \mathbf{I}
\end{array}
\end{array}$$

$$\therefore \mathbf{M.N^T} = \mathbf{J} - \mathbf{I}$$

O posto matricial de $J - I$ é $\alpha\omega + 1$, logo, temos que a cardinalidade do grafo G $n \geq \alpha\omega + 1$. Isto contradiz a condição do teorema.

A Conjectura Forte foi demonstrada em 2002 por Maria Chudnovsky, Neil Robertson, Robin Thomas e Paul Seymour, 41 anos após ser proposta por Berge. A prova está escrita em cerca de 150 páginas e uma revisão sobre ela pode fornecer apenas uma vaga ideia de como foi feita.

Teorema 3 (Teorema Forte do Grafo Perfeito) *Um grafo é perfeito se e somente se não contém um ciclo ímpar de, no mínimo, 5 vértices e nem seu complemento.*

3.1.2 Subclasses de grafos perfeitos

Os teoremas apresentados anteriormente apresentam como consequência corolários que demonstram a perfeição de diversas classes de grafos, entre elas estão a classe de grafos bipartidos e seus complementos, grafos linha de grafos bipartidos e os grafos cordais.

3.1.2.1 Grafos bipartidos e seus complementos

Pode-se observar que, trivialmente, qualquer grafo bipartido G é perfeito, pois seu número cromático é sempre equivalente a 2, assim como o número de clique. Para demonstrar a perfeição do complemento de G , existe um teorema demonstrado por König em 1931.

Corolário 1 (Teorema da cobertura de vértices de König) *A cobertura de arestas de qualquer grafo bipartido (sem vértices isolados) equivale ao seu número de estabilidade. Equivalentemente, o complemento de um grafo bipartido é perfeito [13].*

3.1.2.2 Grafos linha de bipartidos

Dado um determinado grafo G , seu *grafo linha*, denotado por $L(G)$, é o grafo cujos vértices são as arestas de G e um par de vértices define uma aresta em $L(G)$ se, e somente se, esses vértices são arestas adjacentes.

A partir do Teorema do Grafo Perfeito, segue o Teorema da coloração de arestas de König, que demonstra a perfeição dos grafos linha de grafos bipartidos.

Corolário 2 (Teorema da coloração de arestas de König) *O número de coloração de arestas, ou seja, a quantidade mínima de cores necessárias para colorir as arestas de qualquer grafo bipartido é igual ao seu grau máximo. Equivalentemente, o grafo linha $L(G)$ de um grafo bipartido G é perfeito [13].*

3.1.2.3 Grafos cordais

3.1.3 Reconhecimento de grafos perfeitos

A demonstração do Teorema Forte do Grafo Perfeito, que deu uma diferente caracterização a esta classe de grafos, não contribuiu para a elaboração de um algoritmo de reconhecimento em tempo polinomial, pois a complexidade de reconhecimento de buracos ímpares ainda não é conhecida [3] [10].

Mas apesar disso, em 2002, dois algoritmos polinomiais de reconhecimento de grafos perfeitos, independentes do Teorema Forte, foram propostos nos seguintes trabalhos:

- *Recognizing Berge Graphs*, Chudnovsky e Seymour, 2002 (algoritmo de complexidade $O(n^9)$).
- *A Polynomial Algorithm for Recognizing Perfect Graphs*, Cornuéjols, Liu e Vuskovitch, 2002 (algoritmo de complexidade $O(n^{20})$).

Capítulo 4

Resultados Obtidos

Os principais resultados deste projeto de iniciação científica consistem no detalhamento da prova algébrica do Teorema do Grafo Perfeito feita por Gasparian [5], tornando-a didática e de melhor compreensão, além da implementação de um algoritmo de reconhecimento de uma subclasse de grafos perfeitos, a dos grafos cordais.

4.1 Algoritmo de reconhecimento de grafos cordais

Os grafos cordais constituem uma importante subclasse de grafos perfeitos, muito estudada devido a sua estrutura peculiar, que favorece a solução de muitos problemas algorítmicos. Devido a isso, surgiu o interesse em estudar, em particular, o comportamento das caracterizações feitas a respeito de grafos perfeitos nesta subclasse e implementar um algoritmo polinomial de reconhecimento.

Como visto na seção 2, todo grafo cordal possui um Esquema de Eliminação Perfeita. Esta informação pode ser usada para a construção de um algoritmo baseado em uma busca em largura lexicográfica, um algoritmo para a ordenação dos vértices de um grafo, onde rótulos são atribuídos a cada vértice para determinar a sequência em que serão visitados.

Algoritmo 1 Busca em Largura Lexicográfica

```
1: Entrada:  $G$  (Grafo)
2: Saída:  $seq$  (Sequência ordenada de vértices)
3:
4: selecionar um vértice arbitrário  $s$ 
5: atribuir o rótulo 0 para todos os vértices de  $G$ 
6: atribuir o rótulo  $n$  ao vértice  $s$ 
7: para cada vértice  $v$  do grafo  $G$ 
8:     selecionar o vértice não visitado  $v$  com maior rótulo e marcar como visitado;
9:     inserir  $v$  em  $seq$ ;
10:    para cada vértice vizinho  $w$  não visitado de  $v$ 
11:        rotular  $w$  com  $n - i$ .
12:    fim para
13: fim para
```

No algoritmo implementado para a construção de uma sequência de vértices com o objetivo de verificar se é um esquema de eliminação perfeita, esta rotulação lexicográfica é baseada no número de vizinhos de cada vértice, como é melhor detalhado no Algoritmo 2. Nesta implementação, o grafo está representado por uma lista de adjacências. Foi criado um vetor $cont_{v, vizinhos}$ em que cada índice representa um vértice e cada posição armazena o número de vizinhos já visitados do vértice correspondente.

Algoritmo 2 Reconhecimento de Grafos Cordais

```
1: função GERASEQUENCIA( $G$ )
2:    enquanto h façaouver vértice não visitado
3:        Selecionar o vértice  $v$  de  $G$  com o maior número de vizinhos visitados (maior
        rótulo)
4:        Inserir  $v$  na sequência
5:        para e ste vértice selecionado  $v$ 
6:            para cada vértice  $w$  da lista de adjacência de  $v$ 
7:                se então  $w$  ainda não tiver sido visitado
8:                    adicionar mais um vizinho na posição  $w$  de  $qtde_{v, vizinhos}$ 
9:                    adicionar o vértice  $v$  ao conjunto de vizinhos de  $w$ 
10:            fim se
11:        fim para
12:    fim para
13: fim enquanto
14:    retorne  $sequencia$ 
15: fim função
```

```
16: função VERIFICACORDAL(sequencia)
17:   se então sequencia é uma EEP
18:     retorne "Grafo é cordal!"
19:   senão
20:     retorne "Grafo não é cordal!"
21:   fim se
22: fim função
```

Capítulo 5

Conclusão

Este projeto apresentou um estudo sobre conceitos relacionados à Teoria dos Grafos e Complexidade Computacional. Teve como foco principal grafos perfeitos, os principais teoremas que os caracterizam. Foi realizado um detalhamento da demonstração de um dos principais teoremas relacionados a esta classe, o Teorema do Grafo Perfeito. Além disso, foi apresentado um algoritmo de reconhecimento de uma rica subclasse de grafos perfeitos, a dos grafos cordais, baseado em um clássico algoritmo encontrado na literatura, o de busca em largura lexicográfica.

5.1 Contribuições do projeto

O desenvolvimento deste projeto proporcionou uma iniciação da aluna à pesquisa científica, a envolvendo com técnicas de programação avançada e demonstração de teoremas na área de Otimização Combinatória. Dessa forma, pode compreender como a área de Teoria dos Grafos fornece o ferramental teórico adequado para tratar problemas teóricos e aplicações diversas aplicáveis ao cotidiano das pessoas, permitindo a produção de resultados com o rigor matemático necessário. O trabalho proporcionou à aluna a experiência de ter um contato mais aprofundado com a área de pesquisa científica, fortalecendo suas capacidades para a realização de futuros projetos em outras áreas.

Referências

- [1] Michele Alberti. Small survey on perfect graphs. *ENS Lyon*, 2010.
- [2] Eliana X.L. de Andrade; Rubens Sampaio; Geraldo N. Silva. Representações computacionais de grafos. In Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional, editor, *Notas em Matemática Aplicada*. 2006.
- [3] Guillermo Durán. Graph coloring problem. *XII ELAVIO*, 2007.
- [4] John David Eblen. The maximum clique problem: Algorithms, applications, and implementations. Master's thesis, University of Tennessee, 2010.
- [5] G. S. Gasparian. Minimal imperfect graphs. pages 209 – 212, 1996.
- [6] Martin Charles Golumbic. *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*. Academic Press, Inc., New York, NY, USA, 1980.
- [7] Martin Grötschel. My favorite theorem: Characterizations of perfect graphs. *Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin*, 1999.
- [8] Samuel Jurkiewiza. Grafos - uma introdução. In *OBMEP*.
- [9] L. Lovász. A characterization of perfect graphs. *Journal Of Combinatorial Theory, Series B*, pages 95 – 98, 1972.
- [10] Martin Milanic. Perfect graphs and their subclasses. In *Algorithmic Graph Theory*. 2013.
- [11] Igor Carboni Oliveira. Complexidade computacional e o problema p vs np. Master's thesis, UNICAMP, 2010.
- [12] Information System on Graph Classes and their Inclusions. Graphclass: chordal. http://www.graphclasses.org/classes/gc_32.html. Acessado: 2015-05-18.

- [13] Alexander Schrijver. Stable sets and colourings. In *Advanced Graph Theory - Master's Course*. 2012.
- [14] P. Feofiloff; Y. Kohayakawa; Y. Wakabayashi. Uma introdução sucinta à teoria dos grafos. <http://www.ime.usp.br/~pf/teoriadosgrafos/>. Acessado: 2014-05-20.