UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

DEPARTAMENTO DE APOIA A PESQUISA

PROGRAMA INSTITUCIONAL DE BOLSA DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA

Estudo de Ondas Solitárias e Sólitons via Teoria Clássica de Campos

Bolsista: Dafny da Silva Santos, CNPQ

Manaus - AM

Julho 2016

Bolsista: Dafny da Silva Santos, CNPQ

Estudo de Ondas Solitárias e Sólitons via Teoria Clássica de Campos

Orientador

Dr.Igor Tavares Padilha

Universidade Federal do Amazonas

Pró-Reitoria de Pesquisa e pós-graduação

Departamento de apoia a pesquisa

Programa institucional de bolsa de iniciação científica

Manaus - AM

Julho 2016

Estudo de Ondas Solitárias e Sólitons via Teoria Clássica de Campos

Autor: Bolsista: Dafny da Silva Santos, CNPQ

Orientador: Dr.Igor Tavares Padilha

Resumo

O estudo de ondas solitárias e sólitons utilizando o método da equação de Sine-Gordon é o principal tema abordado nesse trabalho. Após desenvolver o formalismo matemático e físico necessário podemos encontrar a energia e o momento linear para um determinado sistema físico descrito por esses tipos de ondas (através de uma lagrangiana de cada sistema encontramos essas informações), esses tipos de ondas geralmente são descritos por equações não lineares e foram descritas por J. Scott Russell (1844). O estudo da teoria de campos é importante para entender esse o comportamento dessas ondas, uma vez que essa teoria é usada para descrever sistemas contínuos com infinitos graus de liberdade.

Palavras-chave: Sólitons, Ondas solitárias, Teoria de Campos.

Lista de figuras

Figura 1 – Propagação de duas ondas solitárias em sentidos opostos com velocidade constante 7

Sumário

1 INTRODUÇÃO 5

1.1 Contextualização e definição do problema 5

1.2 Objetivos 5

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA 6

2.1 A descoberta 6

2.2 Definição 7

3 MÉTODOS UTILIZADOS 8

3.1 Teoria de Campos na Forma Lagrangiana 8

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES 10

4.1 Modelo que admite solução do tipo Sóliton 10

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS 15

Referências 16

6 CRONOGRAMA 17

1 Introdução

1.1 Contextualização e definição do problema

Durante o século XX, o interesse por fenômenos não lineares cresceu imensamente, pois percebeu-se que sistemas físicos importantes eram descritos por equações diferenciais não lineares. Sabemos que esses fenômenos são caracterizados por não apresentarem a propriedade de linearidade, levando geralmente a inexistência de soluções na forma fechada.

Na natureza existem ondas que são descritas por esse tipo de equações e possuem uma solução, o sóliton é um exemplo.

A primeira observação de uma onda solitária foi feita por Scott Russell em 1834, mas a equação que descrevia as propriedades dessa onda só foi elaborada em 1895 por Korteweg-de Vries. Soluções do tipo sóliton também aparecem nas equações de Sine-Gordon e nas equações de Schrödinger não-lineares. Explorando com certa profundidade sistemas físicos descritos por equações não lineares, vê-se uma importância crescente das soluções solitônicas, pois essas tem as seguintes características: energia finita e localizada, comportamento topológico e uma extensa variedade de aplicações.

1.2 Objetivos

A finalidade dessa monografia é estudar ondas do tipo sóliton, e observar as propriedades dessa onda.

- Objetivos gerais – Exemplificar um modelo físico que admite soluções do tipo sóliton.
- Objetivos específicos – Encontrar a energia mecânica e o momento linear para lagrangianas cujas equações de movimento são equações diferenciais não lineares.

2 Revisão bibliográfica

2.1 A descoberta

No século XIX a Inglaterra, praticamente, detinha o monopólio dos transportes marítimos do mundo, possuía a maior frota mercante, bem como a maior e melhor equipada marinha de guerra. A Inglaterra era o único país do mundo que já se encontrava em plena revolução industrial. Deste modo, os pesquisadores eram motivados a resolver problemas relacionados as construções navais, e John Scott Russell, engenheiro civil e arquiteto naval escocês, também foi inspirado a estudar tais problemas (JÚNIOR, 1980). Foi nesse contexto histórico que J. Scott Russell (1808-1882) deu o primeiro relato, ocorrido em Agosto de 1834, encontrado na literatura científica sobre onda solitária:

> *"Eu estava observando o movimento de um baco, que era puxado ao longo de um canal estreito por um par de cavalos, quando o barco parou de repente - mas não a massa de água no canal que ele havia posto em movimento; esta acumulou-se ao redor da proa do barco num estado de violenta agitação e, em seguida, deixando-o repentinamente para trás, rolou para frente a grande velocidade, assumindo a forma de uma grande elevação solitária, um monte de água arredondado, suave e bem definido que continuou seu curso ao longo do canal aparentemente sem forma ou diminuição de velocidade. Eu a segui a cavalo e a alcancei ainda rolando a uma velocidade de umas oito ou nove milhas por hora, preservando seu contorno original de uns trinta pés de comprimento por um pé a um pé e meio de altura. Sua altura diminuiu gradualmente e, depois de uma perseguição por uma ou duas milhas, eu a perdi nos meandros do canal".* (LEMOS, 2007)

Este evento ocorreu no canal União em Hermiston, muito perto do campus da universidade de Riccarton Heriot-Watt, de Edimburgo.

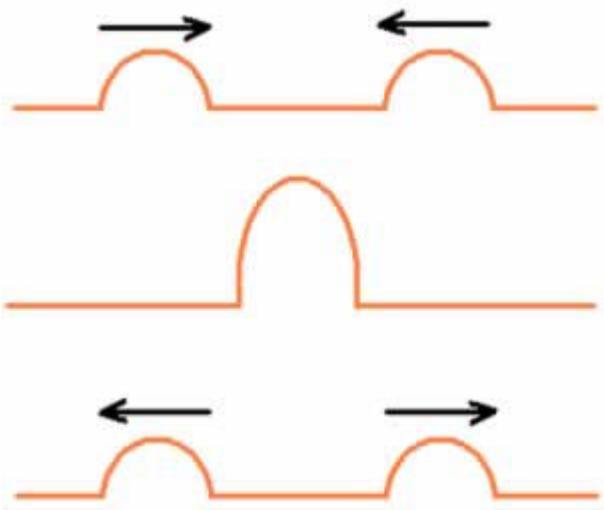

Figura 1 – Propagação de duas ondas solitárias em sentidos opostos com velocidade constante

2.2 Definição

Os sólitons são um tipo específico de ondas solitárias. Ambos obtiveram muita atenção nos últimos trinta anos e aparecem em diversas áreas, tais como comunicações ópticas e modelos biológicos. As ondas solitárias são configurações de campo com energia finita que se propagam em uma direção particular sem mudança de forma e nem diminuição de velocidade. Essas ondas aparecem tipicamente em teoria de campos não-lineares, a não linearidade por si só tende a instabilizar a forma da onda, mas esse efeito é contrabalançado pela dispersão causada pelo meio. Os sólitons, mas especificamente, são ondas solitárias que interagem elasticamente, ou seja, preservam a sua forma em colisões (MARTINS, 2012).

A Figura 1 mostra duas ondas solitárias que se propagam com velocidade constante ao longo do eixo x (uma se propaga para a esquerda e a outra para a direita), após a colisão as ondas podem, ou não, se restabelecer ao que eram antes da interação, para o caso que após a interação elas se recompõe, ou seja, a integridade de cada onda individual não é destruída pela interferência que ocorre quando as ondas colidem, temos um sólitons.

3 Métodos utilizados

3.1 Teoria de Campos na Forma Lagrangiana

O estudo de sistemas contínuos é de grade importância para compreender a física de partículas. Tais sistemas possuem um número infinito de graus de liberdade e são expresso por campos, que podem ser descritos pelos formalismos de Lagrange e Hamilton.

No caso de um sistema mecânico com um número finito de graus de liberdade sua configuração é descrito por um número finito de coordenadas generalizadas:

$$q_k(t) = (q_1(t), \ldots, q_n(t)) \tag{3.1.1}$$

No caso de um sistema contínuo a configuração é descrito pela quantidade:

$$\varphi_{\vec{x}}(t) \quad , \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \tag{3.1.2}$$

$\varphi_{\vec{x}}(t)$ é um conjunto de coordenadas que a cada t está associada a um ponto do espaço. O sistema contínuo mais simples é descrito por uma coordenada $\varphi_x(t)$ associada a cada ponto x do espaço, ou seja, o índice discreto k é substituído pelo índice contínuo x, um exemplo é uma corda vibrando (cada ponto da corda tem um deslocamento em relação a sua posição de equilíbrio).

Todas as teorias físicas fundamentais podem ser formuladas na linguagem lagrangiana. A lagrangiana de um sistema discreto envolve uma soma sobre todos os graus de liberdade, de modo que a lagrangiana de um sistema contínuo deve ser expressa em termos da integral espacial da função $\mathcal{L}$ (densidade lagrangiana).

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}, \varphi', x, t) dx \tag{3.1.3}$$

Onde

$$\delta\dot{\varphi} = \frac{\partial}{\partial t}(\delta\varphi)\ ,\ \delta\varphi' = \frac{\partial}{\partial x}(\delta\varphi) \tag{3.1.4}$$

Sendo $\delta\dot{\varphi}$ e $\delta\varphi'$ as variações de $\dot{\varphi}$ e φ' respectivamente.

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{L}\left(\varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial t}, x, t\right) dx \tag{3.1.5}$$

As condições sobre as variações de φ são:

$$\delta\varphi(x, t_1) = \delta\varphi(x, t_2) = 0\ ,\ \delta\varphi(x_1, t) = \delta\varphi(x_2, t) = 0 \tag{3.1.6}$$

Nos extremos de uma corda em vibração, a variação de φ é zero, bem como a variação de φ no instante t_1 e t_2.

Tendo em mente tais condições de variação podemos escrever as equações que decorrem do princípio de Hamilton para o campo φ.

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}\delta\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}\delta\dot{\varphi} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi'}\delta\varphi'\right) dx = 0 \tag{3.1.7}$$

Integrando por parte apenas a região que contém φ':

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi'}\frac{\partial}{\partial x}(\delta\varphi)\right] dx = -\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi'}\right)\delta\varphi\right] dx \tag{3.1.8}$$

Integrando por partes apenas a região que contém $\dot{\varphi}$:

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}\frac{\partial}{\partial t}(\delta\varphi)\right] dt = -\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}\right)\delta\varphi\right] dt \tag{3.1.9}$$

Substituindo a equação (1.1.10) e a equação (1.1.11) em (1.1.9):

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{x_1}^{x_2} dx \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi'}\right)\right]\delta\varphi = 0 \tag{3.1.10}$$

Como $\delta\varphi$ é arbitrário, a equação de Lagrange para o caso unidimensional:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi'}\right) = 0 \tag{3.1.11}$$

4 Resultados e discussões

4.1 Modelo que admite solução do tipo Sóliton

Considere um campo escalar real Φ em uma dimensão espacial com a lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2\right] - m^2(1-\cos\Phi) \tag{4.1.1}$$

Utilizando as equações de Euler-Lagrange encontramos:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + m^2\sin\Phi = 0 \tag{4.1.2}$$

A densidade Hamiltoniana é dada por:

$$\mathcal{H} = \Pi\dot{\Phi} - \mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2\right] - m^2(1-\cos\Phi) \tag{4.1.3}$$

Note que a solução estática da equação de movimento da equação (4.1.2) ocorre quando $\Phi = 0$ ou $\Phi = 2\pi$, para esses dois valores de Φ o sistema está no menor nível de energia. Para uma solução estática temos:

$$-\Phi'' + m^2\sin\Phi = 0 \tag{4.1.4}$$

Multiplicando por Φ'

$$-\Phi''\Phi' + m^2\Phi'\sin\Phi = \frac{d}{dx}\left\{-\frac{1}{2}(\Phi')^2 - m^2\cos\Phi\right\} = 0 \tag{4.1.5}$$

Para a derivada da equação (4.1.5) ser zero isso significa que o termo entre colchetes tem que ser uma constante. Sabendo que no limite de $x \to \pm\infty \Rightarrow \Phi = 0$ ou $\Phi = 2\pi$, obtemos o valor da constante:

$$C = -m^2 \tag{4.1.6}$$

Para encontrar o valor de Φ para o caso estático, basta resolver a equação diferencial acima.

$$\Phi = 4\arctan\left\{\tan\left(\frac{\Phi_0}{4}\right)\exp[m(x-x_0)]\right\} \tag{4.1.7}$$

Uma vez encontrado o valor de Φ pode-se achar a densidade hamiltoniana através da equação (4.1.3):

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 - m^2(1-\cos\Phi) \tag{4.1.8}$$

Substituindo a equação (4.1.7) na equação (4.1.8), obtemos:

$$\mathcal{H}_0 = \frac{Bexp[2m(x-x_0)]}{\{1+A^2exp[2m(x-x_0)]\}^2} - m^2\left\{1-\cos\left[4\arctan\left[A\exp m(x-x_0)\right]\right]\right\} \tag{4.1.9}$$

Sendo

$$B = 8A^2m^2 \tag{4.1.10}$$

$$A = \tan\left(\frac{\Phi_0}{4}\right) \tag{4.1.11}$$

Portanto o valor da energia para esse caso será:

$$E - E_0 = B\int_{x_0}^{x}\frac{\exp[2m(x-x_0)]}{[1+A^2\exp^2 m(x-x_0)]^2}dx - m^2\int_{x_0}^{x}\{1-\cos[4\arctan[A\exp m(x-x_0)]]\}dx \tag{4.1.12}$$

Resolvendo a primeira integral, fazendo a seguinte substituição $u = A^2(\exp[2m(x-x_0)]) \Rightarrow du = 2mA^2(\exp[2m(x-x_0)])dx$

$$\Rightarrow B\int_{x_0}^{x}\frac{\exp[2m(x-x_0)]}{\{1+A^2\exp[2m(x-x_0)]\}^2}=-4m\left\{\frac{1}{[1+A^2\exp[2m(x-x_0)]]}-\frac{1}{M}\right\} \tag{4.1.13}$$

Em que

$$M=\frac{1}{(1+A^2)} \tag{4.1.14}$$

Resolvendo a segunda integral, definindo $\theta = A\exp[m(x-x_0)] \Rightarrow d\theta = m\theta dx$, encontramos:

$$-m^2\int_{x_0}^{x}\{1-\cos[4\arctan[A\exp m(x-x_0)]]\}dx=-m^2(x-x_0)+J+S \tag{4.1.15}$$

Onde

$$S=-\frac{m}{2}\ln[\csc(2\arctan\theta)+\cot(2\arctan\theta)]+2m\cos(2\arctan\theta) \tag{4.1.16}$$

e

$$J=\frac{m}{2}\ln[\csc(2\arctan A)+\cot(2\arctan A)]-2m\cos(2\arctan A) \tag{4.1.17}$$

Portanto a o valor da energia total é:

$$E=-m^2(x-x_0)-4m\left\{\frac{1}{[1+\theta^2]}-\frac{1}{M}\right\}+S+J+E_0 \tag{4.1.18}$$

A energia que encontramos (equação 4.1.18) é para uma onda no caso estático. Entretanto se essa onda for vista de um referencial que se movimenta para a esquerda com velocidade constante em relação ao referencial em que se encontra a onda estacionária, essa solução estática aparecerá como uma onda viajante que se propaga no sentido oposto com velocidade constante sem se deformar. Utilizando as transformações de Lorentz a equação (4.1.7) para esse caso é dada abaixo:

$$\Phi = 4\arctan\{A\exp m[\gamma(x-vt)-x_0]\} \tag{4.1.19}$$

Através da equação (4.1.3) determinamos a densidade hamiltoniana para essa função.

$$\mathcal{H} = \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} \tag{4.1.20}$$

Sendo

$$\mathrm{I} = \frac{8(Am\gamma v)^2\exp\{2m[\gamma(x-vt)-x_0]\}}{\{1+A^2\exp 2m[\gamma(x-vt)-x_0]\}^2} \tag{4.1.21}$$

$$\mathrm{II} = +\frac{8(Am\gamma)^2\exp\{2m[\gamma(x-vt)-x_0]\}}{\{1+A^2\exp 2m[\gamma(x-vt)-x_0]\}^2} \tag{4.1.22}$$

$$\mathrm{III} = -m^2\{1-\cos\{4\arctan\{A\exp m[\gamma(x-vt)-x_0]\}\}\} \tag{4.1.23}$$

Com a integral da densidade hamiltoniana obtém-se a energia.

Integrando a equação (4.1.21). Realizando a substituição: $u = A^2\exp 2m[\gamma(x-vt)-x_0)]$ temos:

$$\int_{x_0}^{x} I dx = -4m\gamma v^2\left\{\frac{1}{1+A^2\exp 2m[\gamma(x-vt)-x_0]} - \frac{1}{1+A^2\exp 2m[\gamma(x_0-vt)-x_0]}\right\} \tag{4.1.24}$$

Integrando a segunda parte:

$$\int_{x_0}^{x} \mathrm{II}\mathrm{dx} = -4m\gamma\left\{\frac{1}{1+A^2\exp 2m[\gamma(x-vt)-x_0]} - \frac{1}{1+A^2\exp 2m[\gamma(x_0-vt)-x_0]}\right\} \tag{4.1.25}$$

Integrando a equação (4.1.14)

$$\int_{x_0}^{x} \mathrm{III}\mathrm{dx} = -m^2(x - x_0) + S' + J' \tag{4.1.26}$$

Sendo

$$S' = \frac{2m}{\gamma}\cos[2\arctan(\theta')] - \frac{m}{2\gamma}\ln\{\csc[2\arctan(\theta')] + \cot[2\arctan(\theta')]\} \tag{4.1.27}$$

$$J' = -\frac{2m}{\gamma}\cos[2\arctan(\alpha')] + \frac{m}{2\gamma}\ln\{\csc[2\arctan(\alpha')] + \cot[2\arctan(\alpha')]\} \tag{4.1.28}$$

Onde

$$\alpha' = A\exp m[\gamma(x_0 - vt) - x_0] \tag{4.1.29}$$

Uma vez que x é invariante sob a transformação $\gamma(x - vt)$, Temos:

$$I = -4m\gamma v^2\left(\frac{1}{1+\theta^2} - M\right) \tag{4.1.30}$$

$$II = -4m\gamma\left(\frac{1}{1+\theta^2} - M\right) \tag{4.1.31}$$

$$\begin{aligned} III = &-m^2\gamma(x - x_0) + \frac{2m}{\gamma}\cos[2\arctan(\theta)] - \frac{m}{2\gamma}\ln\{\csc[2\arctan(\theta)] + \cot[2\arctan(\theta)]\} \\ &- \frac{2m}{\gamma}\cos[2\arctan(A)] + \frac{m}{2\gamma}\ln\{\csc[2\arctan(A)] + \cot[2\arctan(A)]\} \end{aligned} \tag{4.1.32}$$

A energia para esse caso é:

$$\mathcal{E} = \gamma(E - E_0)(1 - v^2) - \left\{8m\left[\frac{1}{(1+v^2)} - M\right] - m^2(x - x_0)\right\}\gamma v^2 + \mathcal{E}_0 \tag{4.1.33}$$

O momento linear transportado pelo campo Φ é dado pela equação abaixo:

$$P = -\int \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\Phi}}\Phi' dx = \frac{8m\gamma v}{\{1 + A^2\exp 2m(x - x_0)\}} + P_0 \tag{4.1.34}$$

5 Considerações finais

No exemplo feito nesse trabalho, foi encontrado uma solução estática para o campo, depois imaginamos que o nosso referencial (observador) está em movimento para a esquerda em relação ao referencial em que a onda está estática, portanto nesse referencial que passamos a adotar a onda se propaga com velocidade constante em relação a nós, com isso se fabrica uma distribuição de energia localizada que viaja sem se deformar com velocidade constante. Essa energia tem um comportamento que é muito semelhante, em relação as suas propriedades dinâmicas, de uma partícula relativística.

A presença do fator gama se deve ao fato da teoria trabalhada ser relativística, ou seja, trata-se de uma teoria de campos relativística onde φ representa uma solução dinâmica para a equação de campo dessa teoria, e que representa uma distribuição localizada de energia que se desloca com velocidade constante sem deformação. Esses resultados obtido lembra a descrição feita por J.Scott Russell do que ele observou no canal, uma massa d'água de forma bem definida (formada devido a movimentação de um barco) que se propagava aparentemente sem diminuição de velocidade e sem mudança de forma.

Referências

JÚNIOR, J. L. C. *Sólitons*. [S.l.]: Rev. Brasileira de Física, 1980. 6

LEMOS, N. A. *Mecânica analítica*. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2007. 6

MARTINS, G. V. Localizaçao de férmions em um anel imerso em (3, 1) dimensoes. 2012. 7

6 Cronograma

Nº	Descrição	Ago 2015	Set	Out	Nov	Dez	Jan 2016	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul
1	Levantamento Bibliográfico	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
2	Revisão: Mecânica Analítica	x	x	x									
3	Introdução à Teoria Clássica de Campos		x	x	x								
4	Resolução de algumas lagrangeanas que apresentam ondas solitárias como solução			x	x	x	x	x	x				
5	Resolução da equação de sine-Gordon, que apresentam sólitons como solução.						x	x	x	x	x	x	
	- - Elaboração do Resumo e Relatório Final (atividade obrigatória) - Preparação da Apresentação Final para o Congresso (atividade obrigatória)												X