



UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
FACULDADE DE TECNOLOGIA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA



LUCAS DE SOUZA YAMANE

**PROJETO MECÂNICO E SÍNTESE DO CONTROLADOR DE UM PÊNDELO DE
FURUTA**

MANAUS

2020

LUCAS DE SOUZA YAMANE

**PROJETO MECÂNICO E SÍNTESE DO CONTROLADOR DE UM PÊNULO DE
FURUTA**

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação,
apresentado à Faculdade de Tecnologia da Universidade
Federal do Amazonas – UFAM, como requisito parcial
para obtenção do título de Bacharel em Engenharia
Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Danilo de Santana Chui

Coorientador: Prof. MSc. Junout Martins Louzada Neto

MANAUS

2020

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Y19p Yamane, Lucas de Souza
Projeto mecânico e síntese do controlador de um pêndulo de Furuta / Lucas de Souza Yamane . 2021
99 f.: il. color; 31 cm.

Orientador: Danilo de Santana Chui
Coorientador: Junout Martins Louzada Neto
TCC de Graduação (Engenharia Mecânica) - Universidade Federal do Amazonas.

1. modelagem. 2. espaço de estados. 3. pêndulo invertido. 4. motor CC. 5. controlador LQR. I. Chui, Danilo de Santana. II. Universidade Federal do Amazonas III. Título



Ministério da Educação
Universidade Federal do Amazonas
Coordenação do Curso de Engenharia Mecânica

DECISÃO DA BANCA EXAMINADORA DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO (TCC)

A **BANCA EXAMINADORA DE TCC**, em reunião realizada em 20 de janeiro de 2021, após a sessão de apresentação oral perante a Faculdade de Tecnologia/UFAM, conforme Resolução nº 02/2013 do Colegiado do Curso de Engenharia Mecânica, **APROVOU**, por unanimidade, o TCC do aluno **LUCAS DE SOUZA YAMANE**, com o título "**PROJETO MECÂNICO E SÍNTESE DO CONTROLADOR DE UM PÊNDULO DE FURUTA**".

Prof. Dr. Danilo de Santana Chui
Orientador (DEMEC/UFAM)

Prof. Dr. Gustavo Cunha da Silva Neto
Membro (DEMEC/UFAM)

Prof. Paulo Roberto Oliveira Martins
Membro (DEMEC/UFAM)

Em Manaus, 25 de janeiro de 2021.



Documento assinado eletronicamente por **Danilo de Santana Chui, Professor do Magistério Superior**, em 25/01/2021, às 21:33, conforme horário oficial de Manaus, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Paulo Roberto Oliveira Martins, Professor do Magistério Superior**, em 26/01/2021, às 15:24, conforme horário oficial de Manaus, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Gustavo Cunha da Silva Neto, Professor do Magistério Superior**, em 26/01/2021, às 15:51, conforme horário oficial de Manaus, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufam.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0428352** e o código CRC **27930C54**.

Av. Octávio Hamilton Botelho Mourão - Bairro Coroado 1 Campus Universitário Senador Arthur Virgílio Filho,
Setor Norte - Telefone: (92) 3305-1181
CEP 69080-900, Manaus/AM, cmecanica@ufam.edu.br

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Antônio e Ana, por acreditarem e contribuírem com minha educação e formação de caráter, sem eles, nada disso seria possível.

À minha noiva, Miza, pela compreensão, paciência e parcerismo durante o período do projeto.

Aos meus colegas de curso, que ofereceram suporte e dedicação durante os anos de aprendizado, em especial: Alexandre Krul, Cláudio Soares, Matheus David e Richard Lagares.

Aos meus orientador e coorientador, Danilo Chui e Junout Louzada, por todo o suporte e condução no trabalho de pesquisa.

À Universidade Federal do Amazonas e seu corpo docente por possibilitar a realização desse curso.

À todas as outras pessoas que colaboraram direta ou indiretamente para a realização desse trabalho.

RESUMO

Esse trabalho apresenta o projeto e a construção de um Pêndulo de Furuta, sua modelagem matemática e aquisição de seus parâmetros físicos com posterior síntese e simulação de um método de controle através do regulador linear quadrático (LQR). O sistema de pêndulo invertido pode ser dividido em até dois subsistemas, o subsistema mecânico, composto pelo braço e pêndulo e o subsistema eletromecânico, composto pelo motor de corrente contínua (CC) - o atuador da planta. A modelagem do subsistema mecânico é realizada através do Lagrangiano do sistema. Já em relação ao modelamento do subsistema eletromecânico, a abordagem é realizada através da identificação das equações dinâmicas de seus componentes elétricos e mecânicos. A representação para ambos os subsistemas será feita em espaço de estados. Após a modelagem dos sistemas, o projeto de um sistema real será abordado, seus parâmetros serão obtidos através de métodos experimentais e matemáticos para as diferentes componentes dos subsistemas. A abordagem de controle através do LQR para o sistema controlável possui a finalidade de alocar os polos desse sistema em posições estratégicas, esse recurso se utiliza de um processo ótimo e exclui a tentativa e erro associada ao também conhecido método de Alocação de Polos. O controlador LQR busca minimizar ou não a função de custo do sistema, por meio da manipulação do erro em regime permanente e energia consumida pelo atuador. A simulação do método de controle apresentado nesse trabalho é capaz de gerar um controle satisfatório e robusto, possibilitando manipulação do desempenho do sistema e disponibilidade de energia do atuador para garantir essa operação através da função de custo.

Palavras-chaves: modelagem; espaço de estados; pêndulo invertido; motor CC; controlador LQR.

ABSTRACT

This work presents the design and construction of a Furuta Pendulum, its mathematical modelling and acquisition of its physical parameters with subsequent synthesis and simulation of a control method using the linear quadratic regulator (LQR). The inverted pendulum system can be divided into two subsystems, the mechanical subsystem, consisting of a rotating arm and pendulum and the electromechanical subsystem, composed of the direct current (DC) motor - the plant actuator. The modelling of the mechanical subsystem is performed using the Lagrangian of the system. Regarding the modelling of the electromechanical subsystem, the approach is carried out through the identification of the dynamic equations of its electrical and mechanical components. The representation for both subsystems will be made in state space. After modelling the subsystems, the design of a real system will be covered, its parameters will be obtained through experimental and mathematical methods for the different components of the subsystems. The LQR control approach to the controllable system has the purpose of placing the poles of this system in strategic positions, this resource uses an optimal process and excludes the trial and error associated with the also known Pole Placement method. The LQR controller seeks to minimize or not the system cost function by manipulating the steady state error and energy expended by the actuator. The simulation of the control method presented in this work is capable of generating a satisfactory and robust control, allowing manipulation of the system's performance and availability of energy for the actuator to guarantee this operation through the cost function.

Keywords: modelling; state space; inverted pendulum; DC motor; LQR controller.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – <i>Robonaut</i> montado sobre a base móvel <i>Segway</i>	12
Figura 2 – (a) Pêndulo Invertido Linear. (b) Pêndulo Invertido Rotacional.	16
Figura 3 – (a) Modelo do Pêndulo Invertido Rotacional e seus Principais Componentes. (b) Modelo do Pêndulo Invertido Rotacional em Perspectiva.	16
Figura 4 – Esquema do Motor CC.....	21
Figura 5 – Circuito de Armadura do Motor CC.	21
Figura 6 – Carga Mecânica Equivalente de um Motor.....	22
Figura 7 – Variáveis do Pêndulo Invertido Rotacional.....	30
Figura 8 – Projeção do Sistema no Plano xy	31
Figura 9 – Projeção do Sistema no Plano xz	32
Figura 10 – Bloco do Sistema no <i>Matlab Simulink</i>	36
Figura 11 – Equação do Braço Implementada no <i>Simulink</i>	37
Figura 12 – Equação do Pêndulo Implementada no <i>Simulink</i>	38
Figura 13 – Modelo do Subsistema Elétrico para Obtenção do Estado da Corrente....	38
Figura 14 – Projeto Pêndulo Invertido Rotacional.	39
Figura 15 – Detalhamento dos Conjuntos do Sistema.....	40
Figura 16 – Pêndulo de Furuta Real.	45
Figura 17 – Braço e Pêndulo do Subsistema.	46
Figura 18 – Resposta Livre de um Sistema Subamortecido.	49
Figura 19 – Esquema Elétrico para Procedimento Experimental de Aquisição do Coeficiente de Atrito Viscoso.....	50
Figura 20 – Posições de Lançamento do Pêndulo.	50
Figura 21 - Esquema Elétrico para Procedimento Experimental de Aquisição da Resistência do Circuito de Armadura.	52
Figura 22 - Esquema Elétrico para Procedimento Experimental de Aquisição da Constante do Motor CC.....	54
Figura 23 - Esquema Elétrico para Procedimento Experimental de Aquisição da Resposta do Sistema Real.	56
Figura 24 – Comparação das Respostas Experimentais do Pêndulo.	65
Figura 25 – Resposta Livre a Partir da Posição de θ_1 igual a 45°	66
Figura 26 – Resposta Livre a Partir da Posição de θ_1 igual a 90°	67
Figura 27 – Resposta Livre a Partir da Posição de θ_1 igual a 135°	67

Figura 28 – Simulações Paralelas e Resposta do Sistema Real para θ_1 .	70
Figura 29 – Resposta de θ_0 para o Sistema Acoplado dada uma Entrada Degrau no Atuador.	71
Figura 30 – Resposta de θ_1 para o Sistema Acoplado dada uma Entrada Degrau no Atuador.	72
Figura 31 – Resposta do Sistema Acoplado Não Controlado.	73
Figura 32 – Diagrama de Blocos do Controle Regulador.	74
Figura 33 – (a) Tensão de Entrada Aplicada ao Braço. (b) Torque de Distúrbio no Pêndulo. (c) Resposta do Sistema com Controle Regulador para Amplitude 0,01 Nm.	75
Figura 34 – (a) Tensão de Entrada Aplicada ao Braço. (b) Torque de Distúrbio no Pêndulo. (c) Resposta do Sistema com Controle Regulador para Amplitude 0,025 Nm.	75
Figura 35 – Diagrama de Blocos do Controle de Rastreamento.	77
Figura 36 – (a) Tensão de Entrada Aplicada ao Braço. (b) Resposta do Sistema com Controle Servo para Referência 10° .	78
Figura 37 – (a) Tensão de Entrada Aplicada ao Braço. (b) Resposta do Sistema com Controle Servo para Referência 105° .	78

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Variáveis do Pêndulo Invertido.	30
Tabela 2 – Estrutura de Produto do Pêndulo Invertido Rotacional.	44
Tabela 3 – Parâmetros Físicos da Chapa do Motor.	46
Tabela 4 – Parâmetros Físicos do Encoder.	47
Tabela 5 – Parâmetros Físicos da Chapa do Encoder.	47
Tabela 6 – Parâmetros Físicos do Pêndulo.	47
Tabela 7 – Posicionamento do Eixo do Motor CC.	53
Tabela 8 – Experimento de Entrada Degrau.	54
Tabela 9 - Identificação de b_0 e L_a	55
Tabela 10 – Amortecimentos Viscosos.	66
Tabela 11 – Parâmetro R_a	68
Tabela 12 – Parâmetro K_m	69
Tabela 13 – Parâmetros do Pêndulo Invertido Acoplado.	71

Sumário

1	INTRODUÇÃO	12
1.1	Contextualização.....	12
1.2	Objetivos.....	13
1.2.1	Geral.....	13
1.2.2	Específicos	14
1.3	Metodologia.....	14
1.4	Organização do Trabalho.....	15
2	REVISÃO DA LITERATURA.....	16
2.1	Estado da Arte.....	16
2.2	Modelagem	19
2.2.1	Representação Dinâmica de um Sistema	19
2.2.2	Equações de Lagrange	19
2.2.3	Modelagem de um Motor de Corrente Contínua	20
2.2.4	Modelagem em Espaço de Estados.....	23
2.2.5	Linearização	24
2.3	Autovalores, Autovetores e Resposta de um Sistema.....	25
2.3.1	Autovalores e Autovetores.....	26
2.4	Estabilidade.....	26
2.5	Controle	26
2.5.1	Controlabilidade.....	27
2.5.2	Alocação de Polos.....	27
2.5.3	Controlador Linear Quadrático Regulador	28
3	MODELAGEM DO SISTEMA.....	30
3.1	Modelagem do Pêndulo Invertido.....	30
3.1.1	Posicionamento do Centro de Massa do Pêndulo Invertido	31
3.1.2	Energias Atuantes no Pêndulo Invertido.....	33
3.1.3	Equações de Lagrange	34

3.2	Modelo Não Linear Acoplado	35
4	PROJETO E CONSTRUÇÃO DE UM PROTÓTIPO	39
4.1	Projeto do Sistema	39
4.1.1	Peças Usinadas	40
4.1.2	Seleção do <i>Encoder</i>	43
4.1.3	Seleção do Atuador	43
4.1.4	Seleção do Arduino	44
4.2	Estrutura de Produto	44
4.3	Obtenção dos Parâmetros do Sistema Real.....	45
4.3.1	Parâmetros do Braço	46
4.3.2	Parâmetros do Pêndulo.....	48
4.3.3	Parâmetros do Atuador.....	51
4.3.4	Obtenção dos Parâmetros Desconhecidos.....	55
5	CONTROLE.....	58
5.1	Linearização e Análise do Modelo Acoplado.....	58
5.1.1	Linearização	58
5.2	Estabilidade.....	62
5.3	Controlabilidade.....	62
5.4	Controlador Linear Quadrático Regulador	63
6	RESULTADOS.....	65
6.1	Obtenção e Validação do Coeficiente de Amortecimento Viscoso do Pêndulo	65
6.2	Obtenção e Validação dos Parâmetros do Atuador	68
6.2.1	Obtenção da Resistência do Circuito de Armadura	68
6.2.2	Obtenção da Constante de Proporcionalidade do Motor	68
6.3	Obtenção e Validação do Coeficiente de amortecimento Viscoso do Braço e Indutância do Circuito de Armadura.....	69
6.4	Comparação da Resposta do Protótipo com a Resposta Simulada.....	70

6.5	Aplicação do Controlador Linear Quadrático no <i>Simulink</i>	72
6.5.1	Controle do Equilíbrio do Pêndulo	73
6.5.2	Controle do Equilíbrio do Pêndulo com Rastreamento de Movimento do Braço	76
7	CONCLUSÕES.....	80
7.1	Trabalhos Futuros	81
	APÊNDICES	84
	APÊNDICE A – DESENHOS TÉCNICOS DO PÊNDULO REAL	84
	APÊNDICE B – CÓDIGO ARDUINO PARA AQUISIÇÃO DE DADOS DO SISTEMA REAL.....	94
	ANEXOS	97
	ANEXO A – FOLHA DE ESPECIFICAÇÕES DO MOTOR CHR-GM25-370.....	97
	ANEXO B – FOLHA DE ESPECIFICAÇÕES DO ENCODER LPD3806-360BM...	99

1 INTRODUÇÃO

1.1 Contextualização

O sistema de pêndulo invertido pode ser representado de duas principais formas, linear e rotacional. No modelo linear, o pêndulo é equilibrado por um carrinho, atuado indiretamente através de uma guia. No modelo rotacional, objeto de estudo desse trabalho, o pêndulo é equilibrado pelo braço giratório acoplado diretamente ao atuador. O objetivo do sistema continua o mesmo para ambos os casos: equilibrar uma haste aplicando controle por realimentação.

O estudo apresentado nesse trabalho é direcionado ao Pêndulo de Furuta, que, segundo Houck et al. (2013) foi inventado em 1992 no Instituto de Tecnologia de Tokyo por Katsuhita Furuta. Desde então, se tornou um sistema clássico para aplicação da teoria do controle linear e não linear pois é um sistema subatuado, com dois graus de liberdade, apresenta comportamentos não lineares e é instável. O sistema físico, composto por um pêndulo fixado por um elo atuado por um motor, que por sua vez, gira no plano horizontal.

Aplicações práticas do sistema de pêndulo invertido são viáveis como visto em Ambrose et al. (2004) no projeto de um robô autônomo da Administração Nacional da Aeronáutica e Espaço – NASA. O projeto foi realizado utilizando a combinação de um *Robonaut* (robô humanoide da NASA) montado sobre uma base móvel *Segway*, apresentado na Figura 1.

Figura 1 – *Robonaut* montado sobre a base móvel *Segway*.



Fonte: NASA, 2004.

A analogia interessante dessa abordagem é que a base móvel *Segway* nada mais é do que um pêndulo invertido sobre rodas. Foi possível concluir que essa combinação com um sistema de movimentação baseado em pêndulo invertido superou a configuração tradicional do *Robonaut*, pois esse sistema possui uma velocidade superior em 3 vezes a de um *Robonaut* tradicional.

Outra aplicação é demonstrada por Tirmant et al. (2002), onde foi realizada a síntese de um controlador preliminar de um veículo de duas rodas chamado B2, esse veículo se comporta como um pêndulo invertido, pois o passageiro fica acomodado no mesmo eixo geométrico das rodas. Por conta disso, o controle em malha fechada do sistema é necessário para realizar o equilíbrio e movimentação do veículo.

O pêndulo invertido tem sido amplamente utilizado como objeto de estudo pois apresenta muitos empecilhos em seu estudo como comportamentos não lineares, perturbações externas e restrições físicas em algumas variáveis, além de ser um sistema com menos entradas do que saídas controladas. (OLTEAN; DUKA, 2014).

Segundo Vendramini e Silva (2010), apesar de se tratar de um sistema mecânico relativamente simples, o pêndulo invertido pode ser utilizado como planta alvo para avaliar o desempenho de diferentes técnicas de controle devido às suas características dinâmicas instáveis.

Diferentes técnicas e abordagens podem ser utilizadas para modelamento e síntese de controlador de um Pêndulo de Furuta. Esse trabalho realiza o modelamento do sistema através das equações diferenciais que o regem, utiliza parâmetros obtidos experimentalmente com base na construção de um protótipo desse sistema e elabora a síntese de controlador no *Matlab Simulink* para simular o controle do sistema real.

1.2 Objetivos

1.2.1 Geral

Propor a síntese de um controlador LQR para um pêndulo de Furuta, utilizando parâmetros obtidos experimentalmente, e simular o comportamento do sistema controlado.

1.2.2 Específicos

- Realizar a modelagem do subsistema de um Pêndulo de Furuta;
- Realizar a modelagem do subsistema do servo motor de corrente contínua;
- Realizar o acoplamento do subsistema de pêndulo invertido com o subsistema de servo motor;
- Construir o protótipo de um sistema de Pêndulo de Furuta;
- Obter os parâmetros do protótipo por meios matemáticos e experimentais;
- Linearizar o sistema acoplado como forma de simplificação para a síntese do controlador;
- Elaborar a síntese de um controlador LQR com os parâmetros do sistema real;
- Simular o comportamento do sistema controlado;
- Avaliar e discutir os resultados obtidos.

1.3 Metodologia

O estudo iniciará-se através da revisão de literatura acerca do tema, abordando as modelagens já existentes do sistema proposto, a fim de se obter um modelo que represente as características físicas do Pêndulo de Furuta.

Um protótipo de pêndulo invertido será projetado e construído a fim de possibilitar a extração de parâmetros reais do sistema a serem utilizados nas simulações. Diferentes métodos experimentais e matemáticos serão aplicados para a obtenção dos parâmetros desse protótipo com a finalidade de se obter dados relevantes para realizar simulações que representem o comportamento de um pêndulo real. Essas simulações serão comparadas com o comportamento do sistema real a partir do cálculo do erro médio absoluto.

Após a modelagem e identificação dos parâmetros do sistema, e também o acoplamento dos subsistemas mecânico e eletromecânico, será realizada a linearização do sistema acoplado, ou seja, do pêndulo invertido e motor de corrente contínua, para então se iniciar os estudos acerca da síntese de controlador linear quadrático do Pêndulo de Furuta no *Matlab Simulink*. Após a síntese do controlador, serão realizadas simulações numéricas para avaliar o desempenho do sistema modelado.

1.4 Organização do Trabalho

A partir desta seção, o trabalho será dividido conforme abaixo:

No capítulo 2 do trabalho, é apresentada a fundamentação teórica para desenvolvimento da obra e também uma breve explicação sobre o funcionamento de um pêndulo invertido. O propósito nesse capítulo é estabelecer a base teórica para os cálculos que serão apresentados ao decorrer do trabalho.

No capítulo 3, é apresentada a modelagem do pêndulo invertido rotacional, demonstrando os equacionamentos e considerações para o modelo. São apresentadas as equações dinâmicas, equações de energia e representações em espaço de estados. Além disso, o modelo acoplado não linear que foi obtido através da construção do diagrama de blocos no software *Matlab Simulink* é apresentado. Esse modelo foi construído através das relações matemáticas entre as equações dinâmicas dos subsistemas apresentadas nesse capítulo.

No capítulo 4, o projeto e construção de um sistema de pêndulo invertido rotacional será abordado. Etapas como concepção do protótipo, seleção de materiais e componentes, além da construção e usinagem das peças serão descritas. Também é nessa etapa que os parâmetros físicos de cada subsistema são obtidos experimentalmente e matematicamente.

No capítulo 5, os estudos acerca da síntese do controlador no *Matlab Simulink* são iniciados, abordando as condições de estabilidade e controlabilidade, além do desenvolvimento do controlador LQR são abordados.

No capítulo 6, são apresentados os resultados obtidos como a análise das respostas reais e simuladas de um lançamento livre do pêndulo, simulação de uma entrada no atuador do sistema e também a comparação da resposta do sistema não linear em malha aberta com os controles regulatório e servo.

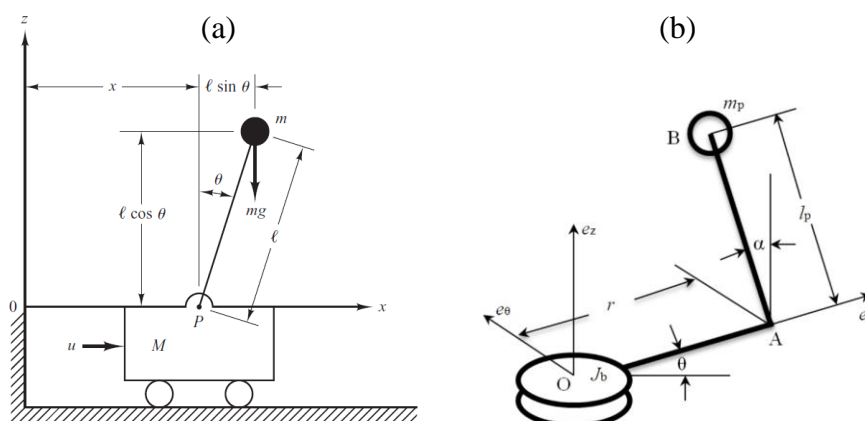
No capítulo 7, serão apresentadas as conclusões obtidas a partir das discussões dos resultados do capítulo anterior.

2 REVISÃO DA LITERATURA

2.1 Estado da Arte

O sistema de pêndulo invertido pode ser representado de duas principais formas, linear e rotacional, conforme visualizado na Figura 2.

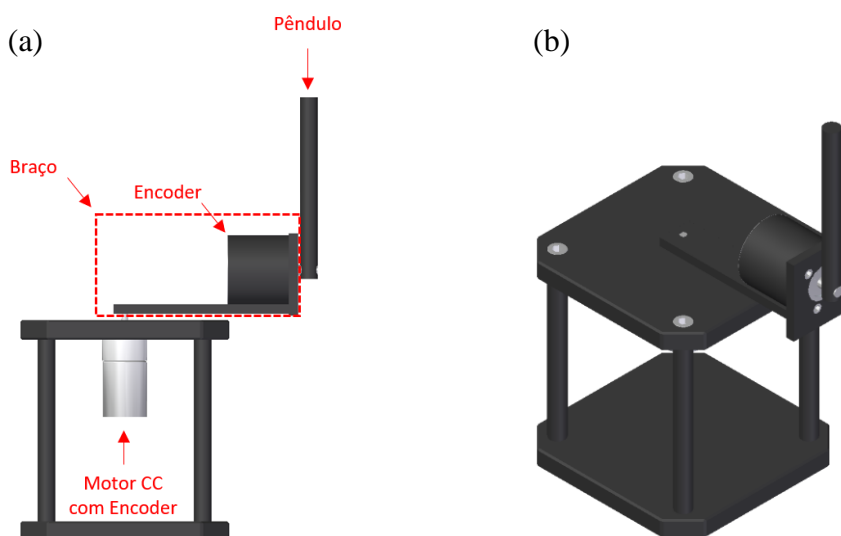
Figura 2 – (a) Pêndulo Invertido Linear. (b) Pêndulo Invertido Rotacional.



Fonte: (OGATA, 2010) e (NATH & MITRA, 2014).

O objeto de estudo desse projeto é o pêndulo invertido rotacional ou, Pêndulo de Furuta representado na Figura 3.

Figura 3 – (a) Modelo do Pêndulo Invertido Rotacional e seus Principais Componentes. (b) Modelo do Pêndulo Invertido Rotacional em Perspectiva.



Fonte: Autor.

O atuador do sistema é um servo motor CC – corrente contínua, responsável por fornecer o torque ao braço acoplado em seu eixo. *Encoder* é um sensor eletromecânico cuja a função é converter movimentos angulares em pulsos elétricos. Há dois *Encoders* no sistema: um embutido no motor para monitoramento da posição angular do braço giratório e outro acoplado ao pêndulo do sistema para monitoramento de sua posição angular.

Segundo Oltean e Duka (2014), o sistema de pêndulo invertido rotacional apresenta comportamentos não lineares, possui características instáveis, é suscetível a perturbações externas e, por possuir mais graus de liberdade do que atuadores, é considerado um sistema subatuado.

A modelagem realizada por Cazzolato e Prime (2011) representa a dinâmica do sistema através de dois métodos diferentes que retornam o mesmo resultado: utilizando o tensor de inércia com a formulação de Lagrange e através de um método alternativo utilizando a abordagem Newton-Euler. Após a obtenção das equações de movimento, o sistema acoplado é linearizado na posição para cima.

O modelo obtido através dos dois métodos de modelagem foi o mesmo, no entanto, para esse sistema, como decisão de projeto o momento de inércia em relação ao eixo x tanto do braço quanto do pêndulo foram negligenciados devido à característica delgada dos componentes. É reforçado que para controles mais agressivos, essa tomada de decisão deve ser cautelosa.

Em Duart et al. (2017), foi realizada a modelagem do Pêndulo de Furuta através do Lagrangiano do sistema e a representação das equações dinâmicas em espaço de estados. Apesar de não ter sido realizada a modelagem e nem o acoplamento do sistema eletromecânico, é ressaltado que a utilização do Lagrangiano do sistema permite essa modelagem através de um método simples. Além disso, é simulado no *Matlab Simulink* a resposta do sistema em malha aberta para uma entrada de torque aplicada ao braço, essa resposta é comparada com um modelo CAD construído em *SolidWorks*, o comportamento de ambas as curvas é o mesmo, no entanto nenhum método de quantificação de erro entre elas foi aplicado.

Em Tirmant et al. (2002), foram utilizadas duas leis de controle diferentes para o controle do veículo B2: controle linear quadrático e compensação paralela distribuída. Simulações foram geradas para apresentar a efetividade de cada método de controle. A proposta do controle é equilibrar a posição angular do veículo enquanto esse faz o rastreamento de uma velocidade predefinida. O objetivo do trabalho é demonstrar que o veículo consegue rastrear a

trajetória de velocidade, objetivo atingido por meio dos dois controladores implementados em simulações.

No trabalho realizado por Sainzaya et al. (2017), são aplicados os métodos de controle PID (Proporcional Integral Derivativo) e LQR para o manter o equilíbrio do pêndulo, além disso, o método de energias foi utilizado para realizar o movimento de *swing-up*, que consiste em balançar o pêndulo em amplitudes crescentes até que ele alcance a posição vertical para cima.

A modelagem foi realizada através da obtenção das matrizes de inércia do sistema e posterior utilização do Lagrangiano do sistema. A combinação de controles PID e LQR é utilizada para manter o sistema estabilizado na posição de equilíbrio para cima, enquanto o método baseado em energias é aplicado principalmente para realizar o movimento de *swing-up*. Como resultado, foi possível obter um sistema de controle estável a interferências ou distúrbios externos aplicados ao pêndulo.

Foi demonstrado por Houck et al. (2013) a proposta de um projeto e construção de um protótipo de Pêndulo de Furuta, assim como os componentes utilizados no projeto. A metodologia utilizada para obter as equações dinâmicas do subsistema mecânico (braço e pêndulo) foi através do Lagrangiano, para o subsistema eletromecânico, foram utilizadas as Leis de Kirchhoff e Newton.

Métodos experimentais foram utilizados para obter os parâmetros do protótipo, a partir desses parâmetros foi possível realizar a síntese do controlador LQR para equilíbrio do pêndulo na posição de referência para cima e o movimento de *swing up* foi possível graças a utilização do controle de modelagem de energia.

Sirisantisamrid et al. (2018) apresentaram a utilização de um controlador PID baseado em LQR a fim de controlar o sistema de pêndulo invertido, obtendo máxima performance do sistema através da minimização da função de custo. Nesse trabalho, o pêndulo foi dividido em duas regiões: uma região de pêndulo tradicional onde as não linearidades são inerentes e a região de equilíbrio do pêndulo invertido, onde o sistema pode ser aproximado através da linearização.

As matrizes Q e R do controlador LQR foram obtidas através de um método algébrico sistemático, possibilitando respostas controladas mais estáveis quando comparadas por meio de simulações com matrizes Q e R obtidas através do método de tentativa e erro.

2.2 Modelagem

A etapa de modelagem de um sistema de controle é a construção de modelos matemáticos desses sistemas. O grau de equivalência e quanto o modelo matemático consegue representar fielmente o comportamento de um sistema físico dependem diretamente da simplificação utilizada durante o equacionamento matemático.

O modelo matemático dado um determinado sistema pode não ser único, pois esse mesmo sistema pode ter sua dinâmica representada de diferentes formas, portanto, diferentes representações matemáticas que dependem da perspectiva do autor (OGATA, 2010).

2.2.1 Representação Dinâmica de um Sistema

A dinâmica de um sistema pode ser representada a partir de equações diferenciais, as quais podem ser obtidas a partir das leis físicas que regem o sistema a ser estudado. No caso do pêndulo invertido, como se trata de um sistema mecânico composto por juntas e elos (braço e pêndulo do sistema), atuado por meio de um componente eletromecânico (atuador do sistema), pode-se aplicar a equação de Lagrange para o equacionamento do subsistema mecânico e as leis de Kirchhoff e Newton para o equacionamento do subsistema eletromecânico.

2.2.2 Equações de Lagrange

A aplicação do método de Lagrange para sistemas conservativos consiste na definição do Lagrangiano do sistema – L , definido pela equação (2.1):

$$L = K_t - U_t \quad (2.1)$$

onde K_t é a energia cinética total do sistema e U_t é a energia potencial total do sistema, ambos em termos de coordenadas generalizadas, ou seja, um conjunto de parâmetros numéricos que determinam a configuração de um mecanismo ou sistema mecânico com um número finito de graus de liberdade.

Para definir a posição de um sistema com n graus de liberdade são necessárias n variáveis independentes, essas variáveis são as coordenadas generalizadas. A etapa de escolha das coordenadas generalizadas é chamada de parametrização (INMAN, 2014).

Através do Lagrangiano do sistema, é possível obter as equações de movimento de um sistema somente através das energias atuantes nesse sistema, sem a necessidade de identificar as forças nele envolvidas – como por exemplo através das leis de Newton.

De acordo com Inman (2014), a equação de Lagrange aplicável para sistemas de um grau de liberdade ou mais é da forma:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K_t(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q_i} \right) = \tau_i \quad (2.2)$$

onde τ_i representa forças ou distúrbios externos nas juntas do sistema, como por exemplo, na junta do eixo do atuador com o braço giratório.

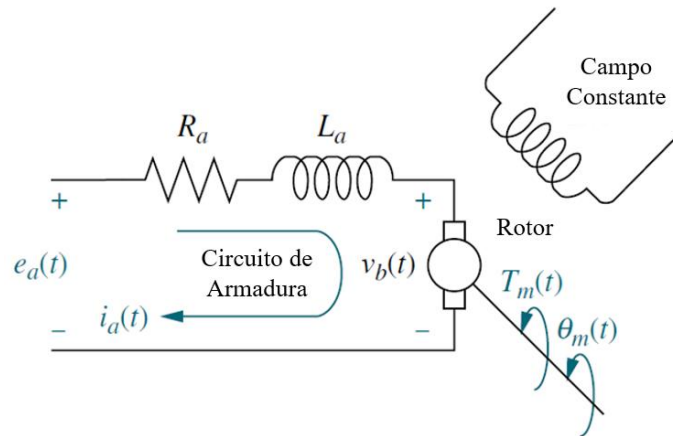
Portanto, a formulação de Lagrange afirma que as equações de movimento de um sistema mecânico podem ser obtidas a partir da equação (2.2).

2.2.3 Modelagem de um Motor de Corrente Contínua

Um motor é um componente eletromecânico que produz uma saída de deslocamento para uma entrada de tensão, isto é, uma saída mecânica gerada por uma entrada elétrica. Os sistemas eletromecânicos são sistemas híbridos que possuem variáveis elétricas e mecânicas (NISE, 2011).

A Figura 4 demonstra o esquema de um motor CC, onde um campo magnético – campo constante, é gerado por ímãs estacionários. Segundo Nise (2011), um circuito rotativo por onde circula a corrente $i_a(t)$ – conhecido como circuito de armadura, passa através desse campo magnético e é submetido a uma força $F = Bli_a(t)$, em que B é a intensidade do campo magnético e l é o comprimento do condutor, o torque resultante T_m gira o rotor do motor.

Figura 4 – Esquema do Motor CC



Fonte: Nise (2011).

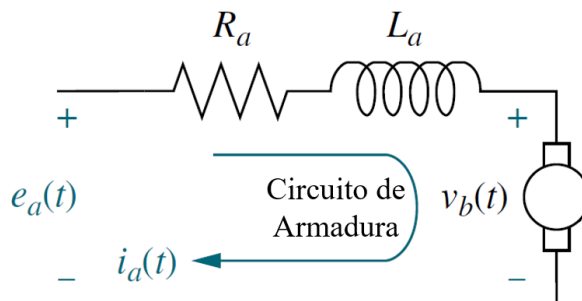
Um motor de corrente contínua é um sistema eletromecânico pois possui variáveis elétricas e mecânicas que regem o comportamento do sistema. Essas variáveis podem ser visualizadas nas próximas seções, onde será realizado o modelamento desse atuador.

2.2.3.1 Equações Dinâmicas do Motor

A identificação das equações dinâmicas do motor pode ser dividida em duas etapas, a primeira do equacionamento do circuito de armadura, e a segunda de equacionamento do rotor.

A Figura 5 representa o circuito de armadura e suas principais variáveis para o modelamento.

Figura 5 – Circuito de Armadura do Motor CC.



Fonte: Adaptado de Nise (2011).

A relação entre a corrente da armadura, i , a tensão aplicada a armadura, E_a , e a força contraeletromotriz, v_{ce} , pode ser obtida através da equação da malha do circuito de armadura.

Aplicando-se Lei de Kirchhoff das Malhas e posteriormente a transformada de Laplace, obtém-se:

$$E_a = R_a i + L_a \dot{i} + v_{ce} \quad (2.3)$$

Segundo Nise (2011), já que o circuito de armadura está girando em um campo magnético, sua tensão é proporcional à velocidade, logo:

$$v_{ce} = K_{ce} \dot{\theta}_m \quad (2.4)$$

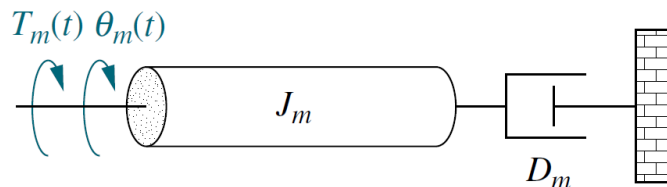
onde v_{ce} é uma tensão conhecida como força contraeletromotriz, K_{ce} é uma constante de proporcionalidade conhecida por constante de força contraeletromotriz e $\dot{\theta}_m$ é a velocidade angular do motor.

Substituindo a equação (2.4) em (2.3), é possível relacionar o circuito elétrico à velocidade angular do motor por meio da equação (2.5), restando portanto o equacionamento da parte mecânica.

$$E_a = R_a i + L_a \dot{i} + K_{ce} \dot{\theta}_m \quad (2.5)$$

O equacionamento da parte mecânica pode ser realizado com auxílio do diagrama representado na Figura 6, onde a carga mecânica de um motor é representada.

Figura 6 – Carga Mecânica Equivalente de um Motor



Fonte: Nise (2011).

A equação dessa carga mecânica é representada por:

$$T_m = J_m \ddot{\theta}_m + D_m \dot{\theta}_m \quad (2.6)$$

onde T_m é o torque desenvolvido pelo motor, J_m é a inércia equivalente na armadura e inclui a inércia da armadura e a inércia equivalente da carga refletida para a armadura e D_m é o amortecimento viscoso equivalente na armadura e inclui também o amortecimento da carga refletido para a armadura.

O torque desenvolvido pelo motor é proporcional à corrente de armadura, portanto, pode ser representado pela equação (2.7).

$$T_m = K_t i \quad (2.7)$$

onde K_t é uma constante de proporcionalidade conhecida por constante de torque do motor e i é a corrente do circuito de armadura.

Substituindo (2.7) em (2.6) é possível relacionar a corrente do circuito de armadura com o restante das componentes mecânicas correlacionando portanto as equações elétricas e mecânicas para se obter a velocidade no eixo do rotor.

$$J_m \ddot{\theta}_m + D_m \dot{\theta}_m = K_t i \quad (2.8)$$

Dessa forma, é possível estudar as duas equações que regem o comportamento de um motor de corrente contínua. Além disso, segundo Nise (2011), em um conjunto consistente de unidades, o valor de K_t é igual ao de K_{ce} , logo:

$$K_t = K_{ce} = K_m \quad (2.9)$$

Para o estudo do pêndulo rotacional invertido, é possível isolar a derivada da corrente em função da tensão de entrada na equação (2.5), para assim, obter o quinto estado do sistema, a corrente, conforme a equação (2.10).

$$\dot{i} = \frac{(E_a - R_a i - K_m \dot{\theta}_m)}{L_a} \quad (2.10)$$

É possível obter a saída de torque, conforme a equação (2.7) realizando a substituição de K_t por K_m , e conforme enunciado por Cazzolato e Prime (2011):

$$T_m = K_m i \quad (2.11)$$

2.2.4 Modelagem em Espaço de Estados

Segundo Ogata (2010), a modelagem em espaço de estados, ou, teoria do controle moderno, contrasta com a teoria do controle convencional no sentido em que se pode aplicar a primeira em sistemas com múltiplas entradas e saídas, lineares ou não lineares e variantes ou não no tempo.

Devido ao fato do Pêndulo de Furuta desse projeto possuir somente um atuador e o objetivo é controlar tanto a posição do braço quanto do pêndulo, esse é um sistema subatuado. Além disso, é um sistema não linear, portanto, por conta desses dois motivos é necessária a utilização da modelagem em espaço de estados.

A abordagem em espaço de estados pode ser realizada em até cinco passos (NISE, 2011):

1. Seleção de um subconjunto de todas as variáveis do sistema, essas variáveis são chamadas de variáveis de estado;
2. Para um sistema de ordem n , são escritas n equações diferenciais de primeira ordem em termo das variáveis de estado, essas equações são conhecidas como equações de estado;
3. Se as condições iniciais de todas as variáveis de estado em t_0 são conhecidas, assim como a entrada para $t \geq t_0$, as equações podem ser resolvidas para esses novos estados;
4. As variáveis de estado são combinadas algebricamente com as entradas do sistema, a partir disso, todas as outras variáveis do sistema no instante $t \geq t_0$ podem ser encontradas, essas equações são conhecidas como equações de saída do sistema;
5. Após esses quatro passos, é obtida uma representação viável do sistema, conhecida como representação em espaço de estados, a saber, equações (2.12) e (2.13).

Um sistema linear qualquer pode ser representado em espaço de estados a partir das equações:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.12)$$

$$y = Cx + Du \quad (2.13)$$

onde x é o vetor de estado, \dot{x} é a derivada do vetor de estado em relação ao tempo, y é o vetor de saída, u é a entrada ou vetor de controle, A é a matriz do sistema, B é a matriz de entrada, C é a matriz de saída e D é a matriz de transmissão direta.

2.2.5 Linearização

Segundo Ogata (2010), um sistema é não linear se o princípio da superposição não se aplica a esse sistema. Portanto, para um sistema não linear, a saída de um sinal formado pela combinação linear de diferentes sinais não é igual a mesma combinação aplicada aos sinais de saída gerados por cada sinal original separadamente, ou, de forma simplificada, não é possível obter a resposta de duas entradas simultâneas considerando as entradas individualmente e

somando os resultados. Nos estudos de modelagem e controle, a operação normal de um sistema pode estar em torno de um ponto de equilíbrio,

Além disso, os sinais podem ser considerados pequenas perturbações em torno desse ponto. Por conseguinte, se o sistema opera em torno de um ponto de equilíbrio e os sinais envolvidos são considerados ínfimos, por meio da teoria do controle moderno pode-se aproximar um sistema não linear por meio de um sistema linear. Esse modelo linear e invariante no tempo é equivalente ao sistema não linear considerando uma limitada faixa de operação.

Para obter essa aproximação linear, admite-se que as variáveis desviam minimamente de alguma condição de operação. Considerando um sistema não linear cuja a saída y é uma função de duas entradas, x_1 e x_2 , portanto:

$$y = f(x_1, x_2) \quad (2.14)$$

E se a condição de operação normal corresponde a \bar{x}_1 , \bar{x}_2 e \bar{y} então a equação (2.14) pode ser expandida em uma série de Taylor em torno desse ponto, como representado abaixo.

$$\begin{aligned} y = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) &+ \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} (x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2} (x_2 - \bar{x}_2) \right] \\ &+ \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} (x_1 - \bar{x}_1)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} (x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2) \right. \\ &\left. + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} (x_2 - \bar{x}_2)^2 \right] + \dots \end{aligned} \quad (2.15)$$

As derivadas parciais são analisadas em $x_1 = \bar{x}_1$ e $x_2 = \bar{x}_2$. A partir da utilização da equação (2.15), o modelo pode ser linearizado.

2.3 Autovalores, Autovetores e Resposta de um Sistema

A partir da modelagem de um sistema qualquer, é necessário analisar a resposta transitória e em regime permanente desse sistema, a fim de se verificar se o comportamento da planta está de acordo com o desejado. Essas análises podem ser realizadas a partir da observação e estudo dos autovalores e autovetores.

Segundo Nise (2011), a resposta de saída de um sistema é a soma de duas respostas: a resposta forçada ou solução particular e a resposta natural ou solução homogênea, a utilização dos autovalores e autovetores do sistema e de sua relação com a resposta no domínio do tempo é uma técnica que permite determinar a resposta natural do sistema.

2.3.1 Autovalores e Autovetores

Definem-se como autovalores (λ) de uma matriz de sistema A , as raízes da equação característica: e autovetores (ξ) de uma matriz de sistema A , a solução da equação:

$$A\xi = \lambda\xi \quad (2.16)$$

Ou ainda:

$$(\lambda I - A)\xi = 0 \quad (2.17)$$

Cuja a solução, desprezando a trivial, exige que o termo $(\lambda I - A)$ seja singular (não inversível) e, portanto:

$$\det(\lambda I - A) = 0 \quad (2.18)$$

A análise dos autovalores do sistema é importante pois pode determinar a estabilidade do sistema. Numericamente, a estabilidade de um sistema em espaço de estados pode ser determinada através dos autovalores da matriz A .

2.4 Estabilidade

Considerando o sistema dinâmico não linear descrito na equação (2.19):

$$\dot{x} = f(x(t)) \quad (2.19)$$

onde $x(0) = x_0$.

Segundo o conceito de estabilidade do matemático Aleksandr Lyapunov, esse sistema só é estável se $f(x(t))$ for positiva em todos os pontos com exceção da origem e sua primeira derivada seja negativa em todos os pontos com exceção de zero (BOBKO, 2010).

Além disso, se a primeira derivada for sempre negativa, o sistema sempre retorna ao ponto x_0 , a origem, esse sistema também é conhecido como assintoticamente estável. Caso a primeira derivada seja positiva, a variável de estado do sistema tende ao infinito, levando o sistema para longe do ponto de equilíbrio, evidenciando-o como um sistema instável.

2.5 Controle

Segundo Nise (2011), os sistemas de controle são subsistemas e processos (ou plantas) que possuem o objetivo de se obter uma saída desejada com um desempenho desejado, dada

uma entrada especificada. Através de um controle por realimentação de estados por exemplo, pode-se compensar perturbações no pêndulo invertido, controlando a posição angular do pêndulo por meio da entrada de tensão no atuador.

2.5.1 Controlabilidade

Um sistema é dito controlável se é possível obter uma entrada capaz de transferir todas as variáveis de estado de um estado inicial desejado para um estado final desejado. Portanto, para controlar a posição dos autovalores no sistema em malha fechada, o sinal de controle u deve ser capaz de controlar o comportamento de cada variável de estado em x (NISE, 2011).

A fim de determinar a controlabilidade ou projetar a realimentação de estados para uma planta qualquer, é definida uma matriz, a partir dessa matriz é possível determinar se todas as variáveis de estado podem ser controladas pela entrada u .

Dado um sistema qualquer de ordem n de equação conforme exemplificado em (2.12), esse sistema é totalmente controlável se a matriz de controlabilidade, M_c é de posto n , ou seja, o posto da matriz de controlabilidade deve ser igual a ordem do sistema, a formulação da matriz pode ser visualizada abaixo.

$$M_c = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B] \quad (2.20)$$

2.5.2 Alocação de Polos

O controle pelo método de alocação de polos assume que todas as variáveis são mensuráveis e estão disponíveis para realimentação do sistema. Sendo assim, se o sistema é controlável, os polos do sistema em malha fechada podem ser alocados em qualquer lugar do plano por meio da realimentação de estados e através da matriz de ganho (OGATA, 2010).

Considerando o sistema de controle definido nas equações (2.12) e (2.13), considera-se que o sinal de controle é definido por:

$$u = -Kx \quad (2.21)$$

onde K é a matriz de ganho $1 \times n$, para um sistema de uma entrada.

Esse sistema não possui entrada, seu único objetivo é manter a saída estabilizada em um valor desejado, é conhecido como sistema regulador. Devido a distúrbios externos que podem

existir, a saída do sistema pode desviar da referência, no entanto, o valor retornará ao desejado devido a realimentação dos estados.

Substituindo (2.21) em (2.12), obtém-se:

$$\dot{x} = (A - BK)x \quad (2.22)$$

Segundo Ogata (2010), se a matriz K é escolhida apropriadamente, a matriz $A - BK$ pode ser transformada em uma matriz estável. Os autovalores da matriz $A - BK$ são chamados de polos reguladores, se esses polos são alocados no lado esquerdo do plano s , então a resposta da função é estabilizada.

Há três formas algébricas de solucionar problemas através do método de alocação de polos: através da equação característica do sistema, definindo a matriz de ganho K , e através da fórmula de Ackermann, além de outros métodos computacionais.

2.5.3 Controlador Linear Quadrático Regulador

O controlador linear quadrático regulador, ou LQR, assim como o controle por alocação de polos também é uma estratégia de controle voltada para sistemas representados em espaço de estados, sua vantagem em relação ao método de alocação de polos é que o método LQR é um controle ótimo, capaz de minimizar ou maximizar um funcional, esse método pode levar em consideração o esforço do atuador por exemplo. O método LQR minimiza ou maximiza o índice de desempenho do sistema, apresentando assim, um sistema de controle estável (Ogata, 2010).

O objetivo do LQR é um controlador ótimo que minimiza a função de custo do sistema, representada por (SIRISANTISAMRID et al, 2018):

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (2.23)$$

onde Q é a matriz que determina a importância relativa ao erro, ou seja, o desvio dos estados em relação ao equilíbrio, R é a matriz que determina a magnitude da entrada, ou seja, o consumo de energia pelo sistema.

A lei de controle ótima que minimiza a função de custo é (OGATA, 2010):

$$K = R^{-1} B^T P \quad (2.24)$$

Onde a matriz P ($n \times n$), é a solução algébrica da equação de Riccati, descrita em (2.25).

$$A^T P + P A + Q - P B R^{-1} B^T P = 0 \quad (2.25)$$

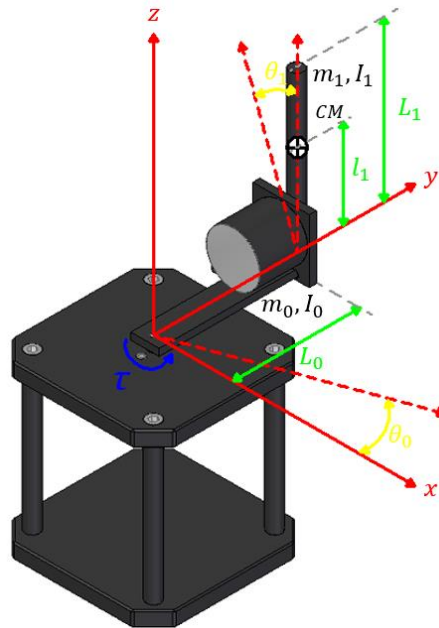
O método de controle LQR pode ser facilmente resolvido através de meios computacionais, assim como visto nos próximos capítulos desse trabalho.

3 MODELAGEM DO SISTEMA

3.1 Modelagem do Pêndulo Invertido

A Figura 7 apresenta alguns dos principais parâmetros envolvidos na modelagem do subsistema do pêndulo invertido rotacional.

Figura 7 – Variáveis do Pêndulo Invertido Rotacional.



Fonte: Autor.

Esses parâmetros podem ser identificados a partir da Tabela 1.

Tabela 1 – Variáveis do Pêndulo Invertido.

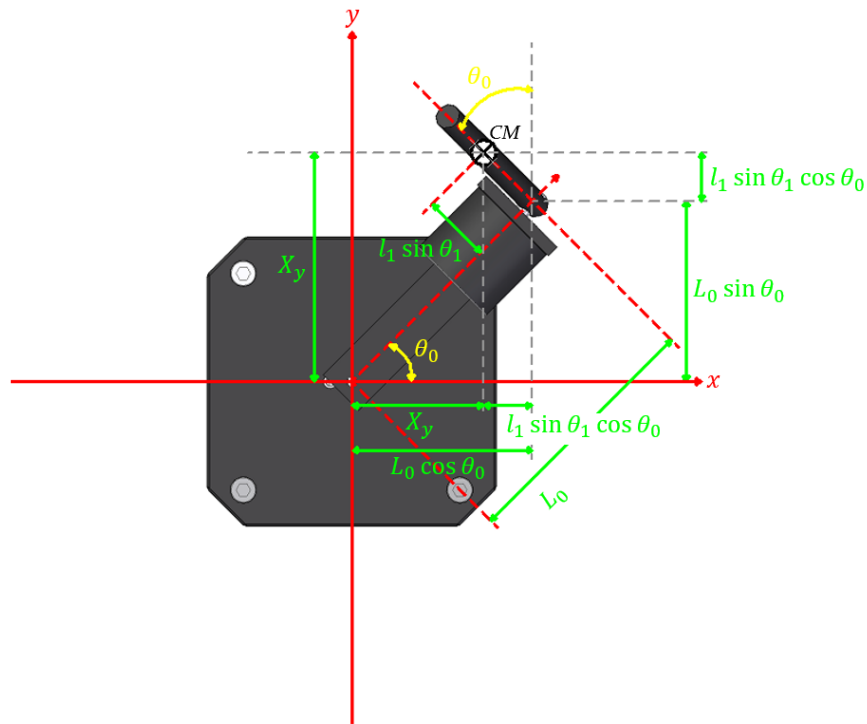
Variável	Simbologia
Massa do Pêndulo	m_1
Comprimento do Pêndulo	L_1
Comprimento do plano de referência ao centro de massa do pêndulo	l_1
Momento de Inércia do Pêndulo	I_1
Posição Angular do Pêndulo	θ_1
Massa do Braço	m_0
Comprimento do Braço	L_0
Momento de Inércia do Braço	I_0
Posição Angular do Braço	θ_0
Torque de Entrada no Sistema	τ

Fonte: Autor.

3.1.1 Posicionamento do Centro de Massa do Pêndulo Invertido

A primeira etapa para a modelagem do pêndulo invertido é o equacionamento da posição do centro de massa do pêndulo através de coordenadas no plano cartesiano tridimensional. As análises serão feitas a partir da seleção de dois planos, sendo esses o plano xy e o plano xz (DUART et al., 2017).

Figura 8 – Projeção do Sistema no Plano xy .



Fonte: Autor.

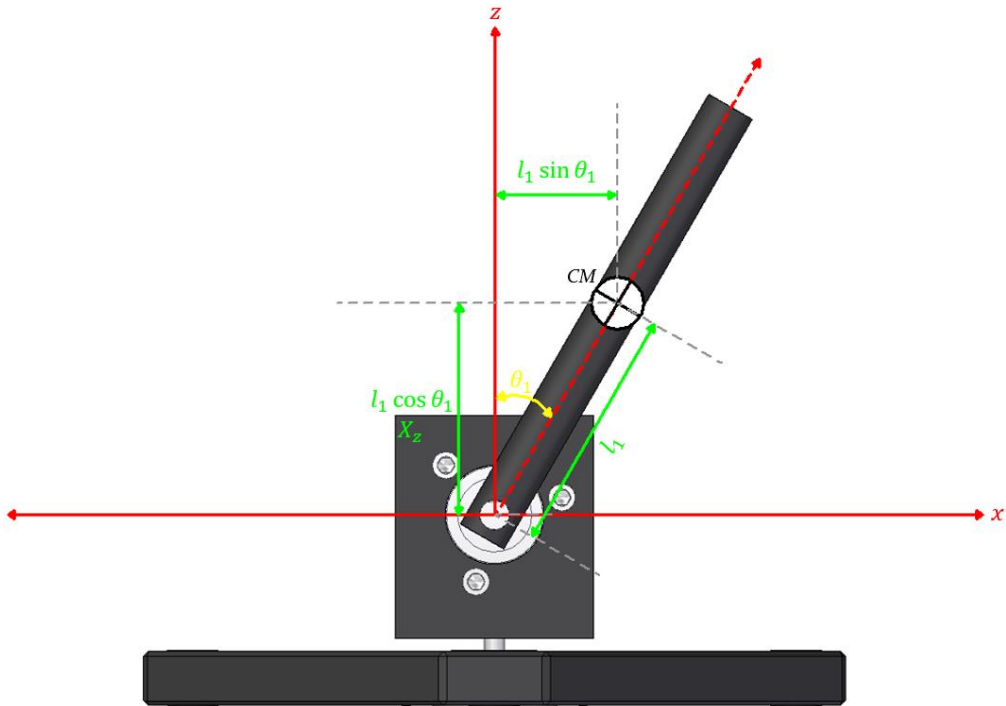
A partir da posição do braço e do pêndulo nesse plano e projeção das componentes, é possível deduzir as equações de posição (3.1) e (3.2), que representam, respectivamente, a coordenada de posição do centro de massa do pêndulo em x e y .

$$x = L_0 \cos \theta_0 - l_1 \sin \theta_1 \sin \theta_0 \quad (3.1)$$

$$y = L_0 \sin \theta_0 + l_1 \sin \theta_1 \cos \theta_0 \quad (3.2)$$

O terceiro componente do vetor de posição do pêndulo é a posição em z , essa pode ser obtida através da análise do plano xz , conforme visualizado na imagem a seguir.

Figura 9 – Projeção do Sistema no Plano xz.



Fonte: Autor.

A equação obtida através dessa análise é:

$$z = l_1 \cos \theta_1 \quad (3.3)$$

A partir das equações (3.1), (3.2) e (3.3), é possível expressar a posição do centro de massa através da equação (3.4).

$$X_{CM} = [x \quad y \quad z]^T \quad (3.4)$$

A velocidade no centro de massa do pêndulo pode ser obtida através da derivada da equação (3.4), a componente da velocidade será necessária na modelagem do sistema através do método de energia.

$$\frac{d}{dt} \langle X_{CM} \rangle = V_{CM} \quad (3.5)$$

Obtendo-se assim as coordenadas de velocidade abaixo.

$$\dot{x} = -\dot{\theta}_0 L_0 \sin \theta_0 - l_1 (\dot{\theta}_0 \sin \theta_1 \cos \theta_0 + \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \sin \theta_0) \quad (3.6)$$

$$\dot{y} = \dot{\theta}_0 L_0 \cos \theta_0 + l_1 (\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \cos \theta_0 - \dot{\theta}_0 \sin \theta_1 \sin \theta_0) \quad (3.7)$$

$$\dot{z} = -\dot{\theta}_1 l_1 \sin \theta_1 \quad (3.8)$$

Portanto, o vetor de velocidade ao quadrado no centro de massa pode ser deduzido como:

$$v_1^2 = [\dot{x} \quad \dot{y} \quad \dot{z}] \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \quad (3.9)$$

A componente está elevada ao quadrado pois no equacionamento do método de energias atuantes a velocidade é elevada a segunda potência, portanto, o quadrado da velocidade será calculado antecipadamente.

O quadrado das componentes da velocidade deduzidos separadamente é:

$$\begin{aligned} \dot{x}^2 = & \dot{\theta}_0^2 L_0^2 \sin^2 \theta_0 - 2(\dot{\theta}_0 L_0 \sin \theta_0) [l_1 (\dot{\theta}_0 \sin \theta_1 \cos \theta_0 \\ & + \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \sin \theta_0)] \\ & + l_1^2 (\dot{\theta}_0 \sin \theta_1 \cos \theta_0 + \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \sin \theta_0)^2 \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}^2 = & \dot{\theta}_0^2 L_0^2 \cos^2 \theta_0 + 2(\dot{\theta}_0 L_0 \cos \theta_0) [l_1 (\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \cos \theta_0 \\ & - \dot{\theta}_0 \sin \theta_1 \sin \theta_0)] \\ & + l_1^2 (\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \cos \theta_0 - \dot{\theta}_0 \sin \theta_1 \sin \theta_0)^2 \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\dot{z}^2 = \theta_1^2 l_1^2 \sin^2 \theta_1 \quad (3.12)$$

Realizando o somatório dessas componentes, a equação final para a velocidade linear no centro de massa do pêndulo elevada ao quadrado é:

$$v_1^2 = L_0^2 \dot{\theta}_0^2 + l_1^2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_0^2 \sin^2 \theta_1) + 2m_1 L_0 l_1 \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \quad (3.13)$$

3.1.2 Energias Atuantes no Pêndulo Invertido

A modelagem através do método de energias é uma abordagem para determinar as equações dinâmicas de um sistema através da análise das energias envolvidas. Esse método não necessita de diagramas de corpo livre e análises de forças, somente do entendimento das energias atuantes no sistema (INMAN, 2014).

As energias atuantes no sistema do pêndulo invertido rotacional podem ser divididas em cinética e potencial, para a aplicação do método de energias, é necessário considerar o princípio da conservação de energia para o sistema. Portanto, a soma das energias cinética e potencial permanece constante para cada intervalo de tempo durante o movimento do sistema.

No sistema do pêndulo invertido é possível identificar as energias cinéticas associadas ao pêndulo e ao braço. No braço do sistema, o único movimento observado é rotacional em torno do eixo z, assim como visualizado na Figura 9, portanto a energia cinética do braço é regida pela equação:

$$K_0 = \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}_0^2 \quad (3.14)$$

O pêndulo apresenta dois tipos de movimento, o translacional e rotacional. Portanto, as energias cinéticas atuantes no pêndulo são:

$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 \quad (3.15)$$

Logo, a energia cinética total no sistema pode ser equacionada como:

$$K_T = \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}_0^2 + \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 \quad (3.16)$$

Substituindo a velocidade do centro de massa do pêndulo ao quadrado, equação (3.13), na equação (3.16) obtém-se:

$$K_T = \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}_0^2 + \frac{1}{2} m_1 [L_0^2 \dot{\theta}_0^2 + l_1^2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_0^2 \sin^2 \theta_1) + 2m_1 L_0 l_1 \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1] + \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 \quad (3.17)$$

Esse sistema apresenta energia potencial gravitacional somente no pêndulo, portanto:

$$U_T = m_1 g l_1 (\cos \theta_1 - 1) \quad (3.18)$$

3.1.3 Equações de Lagrange

Através do Lagrangiano do sistema, é possível relacionar as energias cinéticas e potencial do sistema, além disso através desse método é possível determinar as equações dinâmicas de qualquer sistema mecânico (Duart et al., 2017).

O Lagrangiano do sistema é definido pela equação (2.1), fazendo as substituições das equações (3.16) e (3.18) nos termos de energia cinética e potencial da equação, obtém-se:

$$L = \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}_0^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} (m_1 L_0^2 \dot{\theta}_0^2) + \frac{1}{2} (m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2) + \frac{1}{2} (m_1 l_1^2 \dot{\theta}_0^2 \sin^2 \theta_1) + m_1 L_0 l_1 \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + m_1 g l_1 (1 - \cos \theta_1) \quad (3.19)$$

Como o pêndulo invertido é um sistema de múltiplos graus de liberdade, a equação de Lagrange para o sistema é da forma apresentada na formulação (2.2). O pêndulo invertido rotacional possui dois graus de liberdade, sendo eles θ_0 e θ_1 , portanto, as duas equações são:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_0} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_0} \right) = \tau_0 - b_0 \dot{\theta}_0 \quad (3.20)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_1} \right) = \tau_1 - b_1 \dot{\theta}_1 \quad (3.21)$$

onde $b_0 \dot{\theta}_0$ e $b_1 \dot{\theta}_1$ representam, respectivamente, o atrito nas juntas do braço e do pêndulo e τ_0 e τ_1 são os torques atuantes no braço proveniente do atuador do sistema e no pêndulo devido a perturbações externas, respectivamente.

Realizando a substituição da equação (3.19) em (3.20) e (3.21), as seguintes equações de movimento do braço e do pêndulo do sistema, respectivamente, são obtidas.

$$\begin{aligned} (I_0 + m_1 L_0^2 + m_1 l_1^2 \sin^2 \theta_1) \ddot{\theta}_0 + (m_1 l_1 L_0 \cos \theta_1) \ddot{\theta}_1 \\ = \tau_0 - b_0 \dot{\theta}_0 - 2m_1 l_1^2 \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \cos \theta_1 + m_1 L_0 l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1 \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} (m_1 l_1 L_0 \cos \theta_1) \ddot{\theta}_0 + (I_1 + m_1 l_1^2) \ddot{\theta}_1 \\ = \tau_1 - b_1 \dot{\theta}_1 + m_1 l_1^2 \dot{\theta}_0 \sin \theta_1 \cos \theta_1 + m_1 g l_1 \sin \theta_1 \end{aligned} \quad (3.23)$$

3.2 Modelo Não Linear Acoplado

De posse das três equações do sistema acoplado: a equação dinâmica do braço (3.22), a equação dinâmica do pêndulo (3.23) a equação diferencial do subsistema elétrico do atuador (2.10) e também da relação apresentada em (2.11), é possível construir o modelo apresentado nessa seção no software *Simulink*, onde pode-se analisar o sistema de pêndulo invertido acoplado ao atuador.

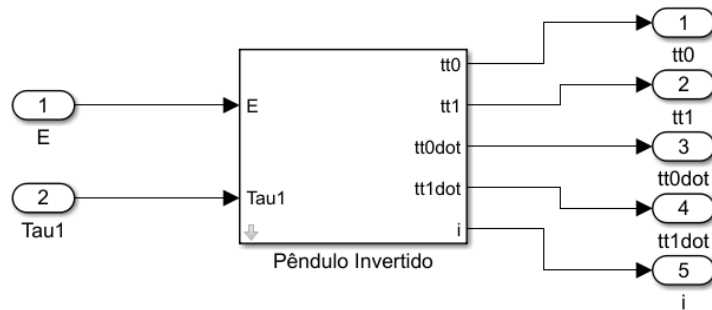
Para realizar essa substituição, deve-se correlacionar o torque no eixo do motor com o torque de entrada no braço do sistema, portanto:

$$T_m = \tau_0 \quad (3.24)$$

Nesse modelo, as entradas do sistema são a tensão aplicada ao atuador e os distúrbios físicos externos aplicados ao pêndulo. As saídas do sistema são as posições e velocidades angulares do braço e do pêndulo e a corrente elétrica do circuito de armadura do atuador.

A Figura 10 demonstra o bloco criado no *Matlab Simulink* que contém as três equações dinâmicas acima.

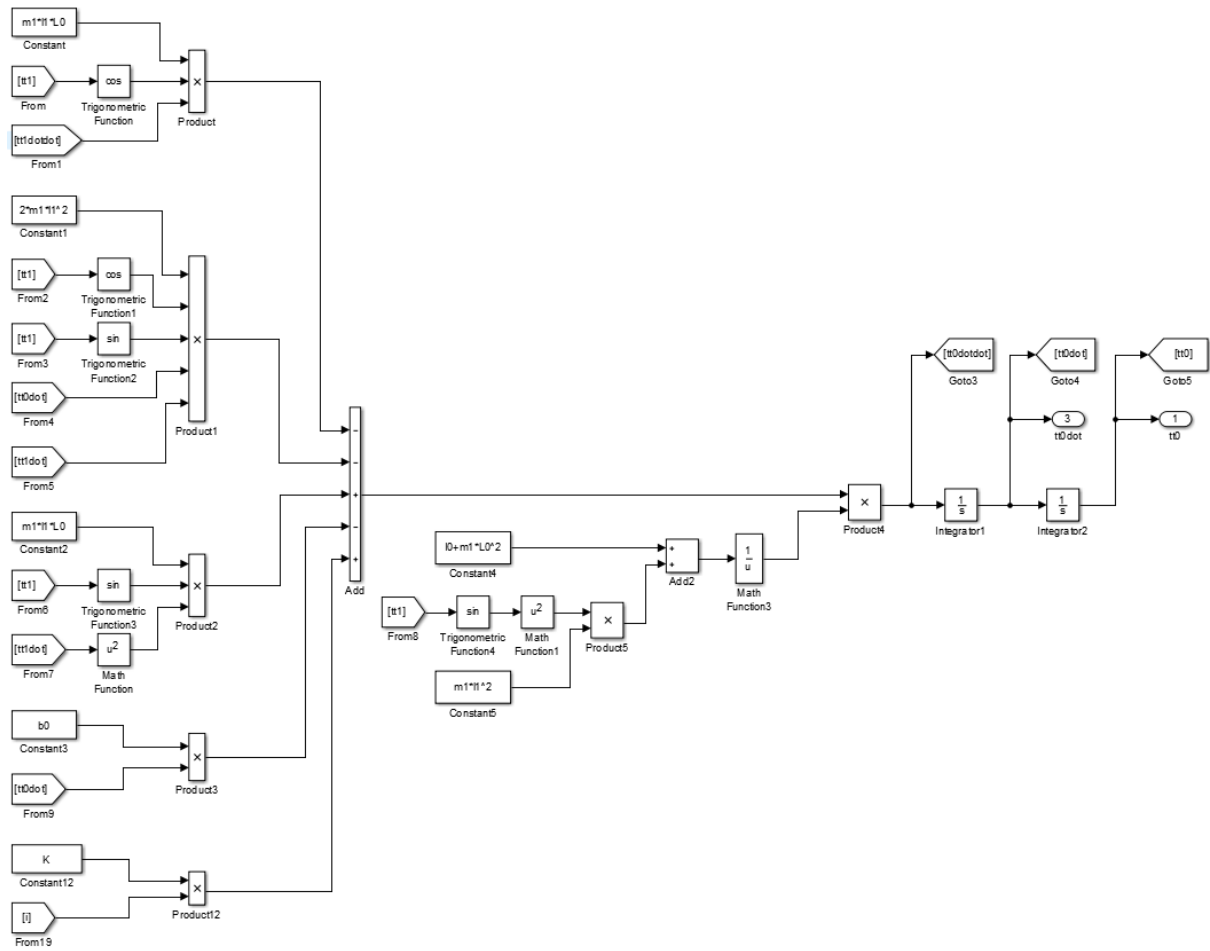
Figura 10 – Bloco do Sistema no *Matlab Simulink*.



Fonte: Autor.

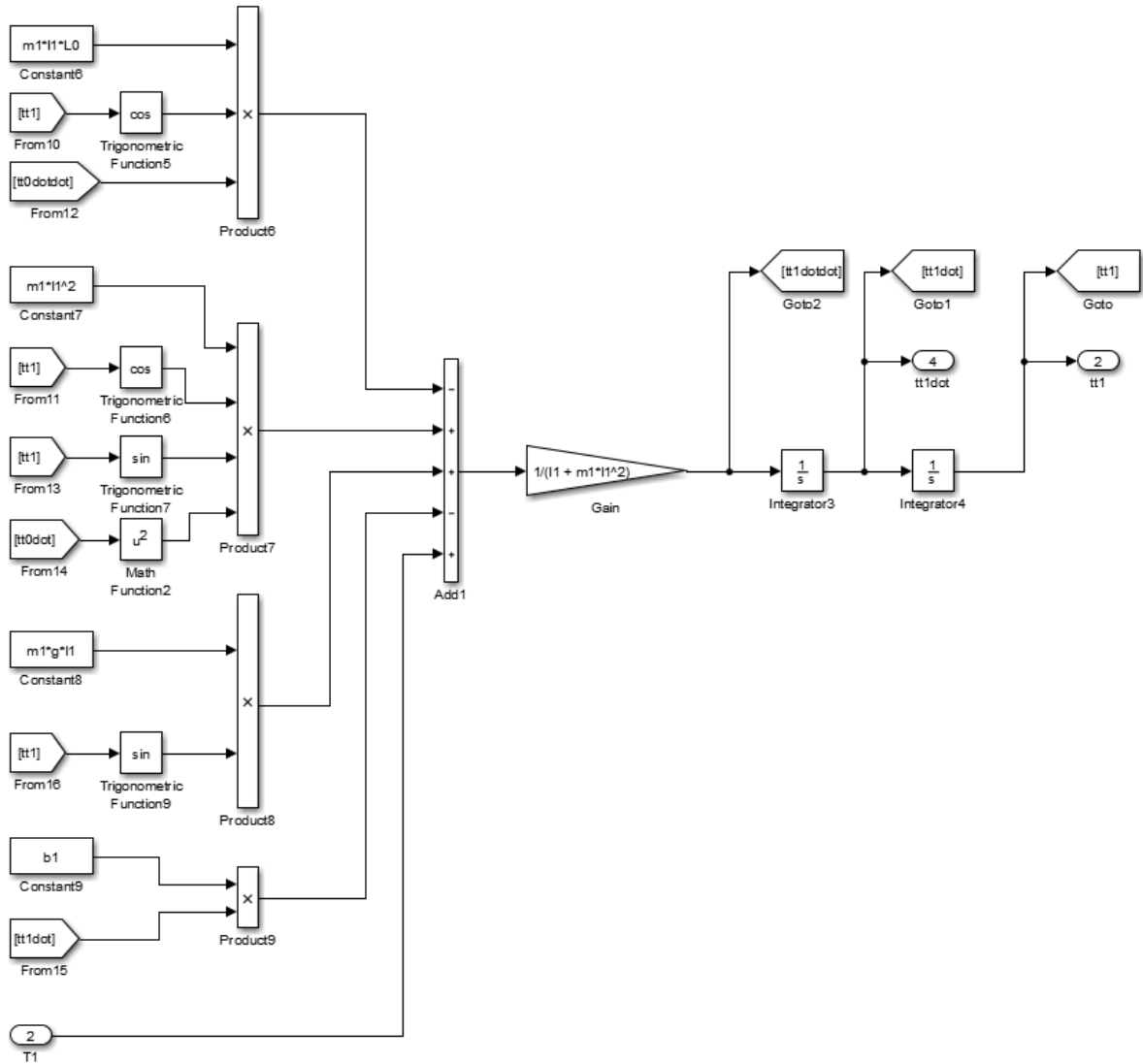
A máscara Pêndulo Invertido contém o modelo das equações dinâmicas do pêndulo, braço e atuador do sistema, esses modelos estão representados nas Figuras 11, 12 e 13.

Figura 11 – Equação do Braço Implementada no *Simulink*.



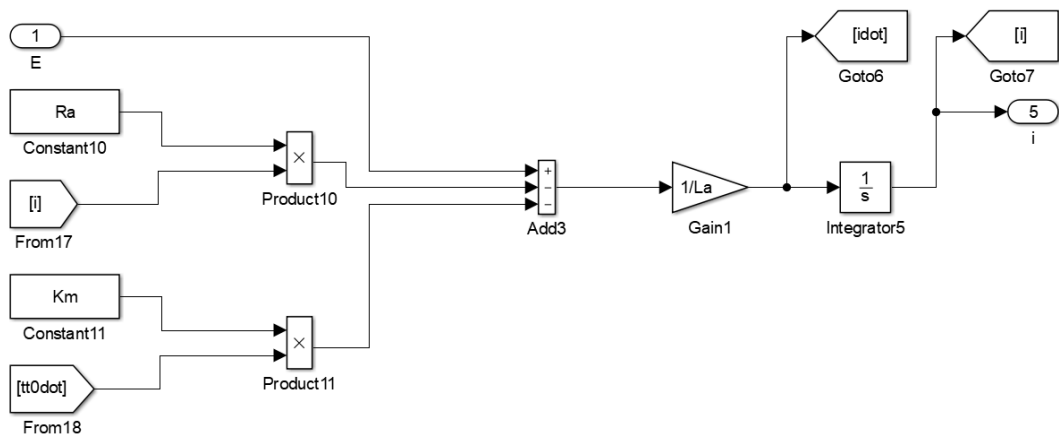
Fonte: Autor.

Figura 12 – Equação do Pêndulo Implementada no *Simulink*.



Fonte: Autor.

Figura 13 – Modelo do Subsistema Elétrico para Obtenção do Estado da Corrente.



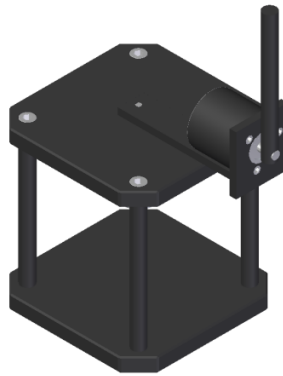
Fonte: Autor.

4 PROJETO E CONSTRUÇÃO DE UM PROTÓTIPO

4.1 Projeto do Sistema

O conceito inicial do sistema foi definido com base em outros pêndulos invertidos rotacionais, pode ser visualizado na Figura 14.

Figura 14 – Projeto Pêndulo Invertido Rotacional.

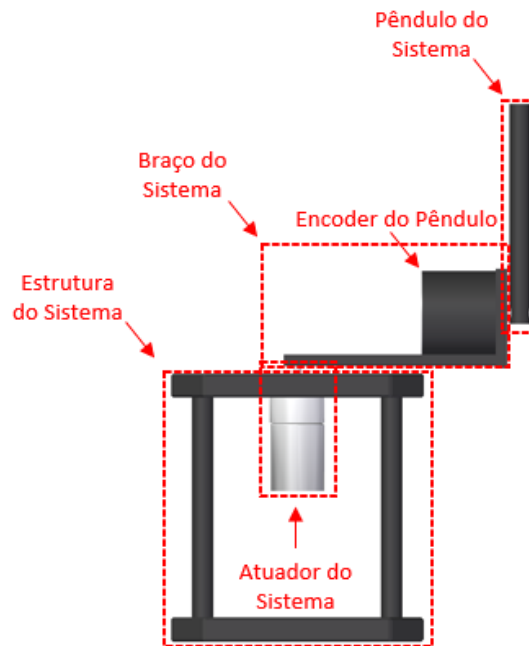


Fonte: Autor.

As peças foram projetadas dessa forma tendo em vista a etapa de usinagem, portanto, com o modelo tridimensional escolhido foi possível construir cada peça utilizando os seguintes processos de usinagem: torno e fresa; todos os equipamentos e maquinários utilizados para a usinagem são do Laboratório de Usinagem do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Amazonas.

A Figura 15 ilustra cada conjunto do sistema, dessa forma será melhor para entender a estrutura de produto e compreender as seções seguintes.

Figura 15 – Detalhamento dos Conjuntos do Sistema.



Fonte: Autor.

O processo de usinagem para cada peça, bem como a seleção do encoder e atuador do sistema, serão discutidos nas seções a seguir. Os desenhos técnicos das peças estão anexadas no Apêndice A do trabalho.

4.1.1 Peças Usinadas

O material escolhido para as peças usinadas foi o poliacetal, devido a custo, facilidade para usinar e sua alta resistência e durabilidade.

4.1.1.1 Base

A base é uma das peças mais simples de usinagem, sua única função é estrutural, fixando os suportes do sistema.

As etapas de usinagem para a base foram:

1. Utilização da CNC para realizar o desbaste da chapa bruta;
2. Utilização do torno e fresa para acabamento das superfícies;
3. Utilização da fresa para chanfrar os cantos vivos;

4. Utilização da fresa para furos passantes e rebaixos na peça responsáveis pela fixação dos suportes.

4.1.1.2 Suporte

Os suportes interfaceiam a base com o topo, garantindo rigidez e suporte estrutural para o sistema, essa fixação é realizada com parafusos Allen M6x25. As interações entre esses quatro componentes podem ser visualizadas na vista explodida do desenho técnico.

As etapas de usinagem para os suportes foram:

1. Utilização do torno mecânico para ajustar o comprimento e faceamento da extremidade dos suportes;
2. Utilização do torno mecânico para furação das extremidades dos suportes;
3. Rosqueamento com macho.

4.1.1.3 Topo

O topo é bastante semelhante à base, no entanto, seu processo de usinagem é maior pois essa peça faz interface com o atuador do sistema através da fixação do mesmo utilizando parafusos Allen M3x6. Portanto, há etapas de usinagem extras para garantir essa fixação do motor.

Com as peças apresentadas até então – base, suporte e topo, é possível visualizar o conjunto Estrutura do Sistema, representado na Figura 15, apresentada anteriormente.

As etapas de usinagem para o topo foram:

1. Utilização da CNC para realizar o desbaste da chapa bruta;
2. Utilização do torno e fresa para acabamento das superfícies;
3. Utilização da fresa para chanfrar os cantos vivos;
4. Utilização da fresa para furos passantes e rebaixos na peça responsáveis pela fixação dos suportes;
5. Utilização da fresa para furos passantes e rebaixos na peça responsáveis pela fixação do motor.

4.1.1.4 Chapa do Motor

A chapa do motor é outra peça com simples fabricação, essa peça é encaixada no eixo do atuador do sistema e também faz parte do conjunto braço do sistema, portanto tem interface com a chapa do encoder e o encoder.

As etapas de usinagem para a chapa do motor foram:

1. Utilização da CNC para realizar o desbaste da chapa bruta;
2. Utilização da fresa para acabamento das superfícies;
3. Utilização da fresa para furo passante que faz encaixe no eixo do atuador.

4.1.1.5 Chapa do Encoder

A chapa do encoder é uma peça com fabricação crítica, pois essa peça serve de suporte e fixação do encoder do sistema, essa fixação é realizada com parafusos Allen M3x6. Portanto, os dimensionais dos furos passantes devem se ajustar com os pontos de parafusamento do encoder, além de ser fixada à chapa do motor.

A chapa do motor, chapa do encoder e parafusos de fixação, juntamente com o próprio encoder compõe o conjunto Braço do Sistema; é possível visualizar esse conjunto através da Figura 15, apresentada anteriormente.

As etapas de usinagem para a chapa do encoder foram:

1. Utilização da CNC para realizar o desbaste da chapa bruta;
2. Utilização da fresa para acabamento das superfícies;
3. Utilização da fresa para furos passantes responsáveis pela fixação do encoder;
4. Utilização da fresa para rebaixo responsável pelo encaixe na chapa do motor.

4.1.1.6 Pêndulo do Sistema

O pêndulo do sistema é bastante semelhante aos suportes, seu processo de usinagem difere somente pois no pêndulo não há necessidade de furar as extremidades, mas sim realizar um furo passante na direção radial do pêndulo, furo esse necessário para encaixe no eixo do encoder.

Essa é a única peça que compõe o conjunto Pêndulo do Sistema, representado na Figura 15, apresentada anteriormente.

As etapas de usinagem para o pêndulo foram:

1. Utilização do torno mecânico para ajustar o comprimento e faceamento da extremidade do pêndulo;
2. Utilização da fresa para furação radial no pêndulo.

4.1.2 Seleção do *Encoder*

Há dois tipos de *encoders*: incremental e absoluto. O incremental indica a posição angular através de uma sequência de pulsos, já o absoluto indica a posição angular através da leitura de um código único para cada posição de seu curso. No caso de *encoders* incrementais a resolução é dada pelo número de pulsos gerados por rotação, para *encoders* absolutos é o número de *bits* (AGUIRRE, 2013).

Os absolutos costumam ser mais caros devido a sua complexidade de construção de acordo com o número de *bit*, por conta disso, o tipo de *encoder* escolhido será o incremental. O *encoder* incremental selecionado para o projeto foi o LPD3806-600BM, da *China Sanfeng*, com resolução de 1200 *pulsos/volta*. A folha de especificação desse encoder se encontra no Anexo B do trabalho.

4.1.3 Seleção do Atuador

O sistema de pêndulo invertido rotacional é naturalmente instável e necessita de um rápido tempo de resposta para manter seu equilíbrio quando sofre perturbações externas. Por conta dessas necessidades de projeto, o tipo de motor a ser escolhido como atuador do sistema é o síncrono, ou, corrente contínua pois possui melhor tempo de aceleração quando comparados com motores assíncronos ou de passo, por exemplo.

Além disso, o ângulo do braço do sistema também deve ser instrumentado, como forma de simplificar o projeto utilizando um encoder dedicado somente para o pêndulo do sistema, o motor CC a ser selecionado deve possuir um encoder embutido.

O modelo do motor de corrente contínua selecionado foi o CHR-GM25-370, da *CHIHAI MOTOR*, por possuir um encoder incremental embutido com resolução de 450 *pulsos/volta*. As folhas de especificação desse motor se encontram no Anexo A do trabalho.

4.1.4 Seleção do Arduino

O Arduino selecionado para comunicação e aquisição dos dados foi o Arduino Mega, pois esse possui quatro portas seriais, necessárias para monitoramento dos dois encoders.

4.2 Estrutura de Produto

A estrutura de produto, ou lista técnica, contendo os conjuntos e componentes do sistema pode ser visualizada na Tabela 2.

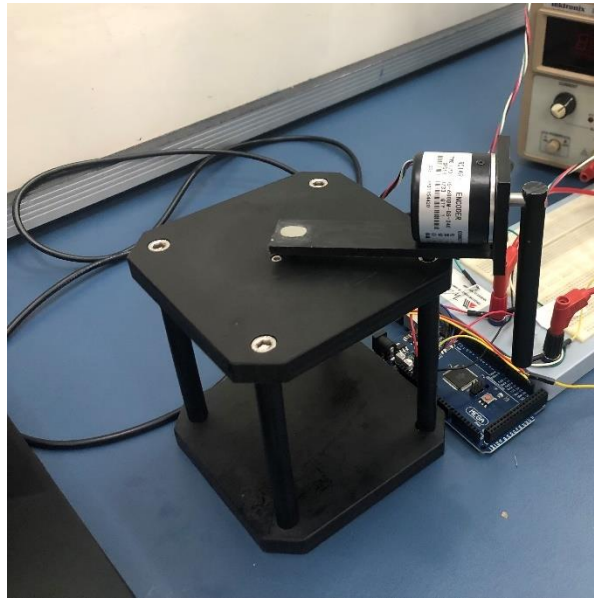
Tabela 2 – Estrutura de Produto do Pêndulo Invertido Rotacional.

Nível	Peça	Quantidade
1	Estrutura do Sistema	1
1.1	Base	1
1.2	Suporte	4
1.3	Topo	1
1.4	Parafuso M6x25	8
2	Atuador do Sistema	1
2.1	Motor CHR-GM25-370	1
2.2	Parafuso M3x6	2
3	Braço do Sistema	1
3.1	Chapa do Motor	1
3.2	Chapa do Encoder	1
3.3	Encoder LPD3806-600BM	1
3.4	Parafuso M3x6	3
4	Pêndulo do Sistema	1

Fonte: Autor.

Além disso, pode-se observar o projeto de construção finalizado através da fotografia do Pêndulo de Furuta real na Figura 16.

Figura 16 – Pêndulo de Furuta Real.



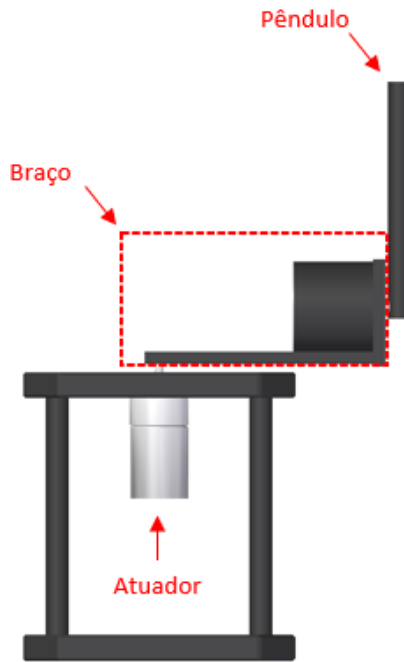
Fonte: Autor.

4.3 Obtenção dos Parâmetros do Sistema Real

Os parâmetros a serem identificados são referentes ao pêndulo e ao braço do subsistema. O braço é composto por uma chapa fixada ao motor CC, um encoder e uma chapa para fixação do encoder, esses componentes serão analisados separadamente em relação aos seus momentos de inércia, no entanto, o braço é o conjunto dos três componentes. O pêndulo, a chapa fixada ao motor e a chapa de fixação do encoder são confeccionados utilizando-se peças de poliacetal.

A Figura 17 mostra em mais detalhes as características físicas das peças a serem modeladas.

Figura 17 – Braço e Pêndulo do Subsistema.



Fonte: Autor.

4.3.1 Parâmetros do Braço

As dimensões da chapa do motor, chapa do encoder e o próprio encoder podem ser visualizadas nessa seção, as massas das peças foram obtidas com auxílio de uma balança digital da marca *Digital Scale* com 0,1 g de precisão e suas dimensões com um paquímetro da Marca *Mitutoyo* com 0,05 mm de precisão. As dimensões serão necessárias para o cálculo do momento de inércia de cada componente e o momento de inércia final do braço. Além disso, é possível visualizar o desenho técnico das peças no Apêndice A do trabalho.

Tabela 3 – Parâmetros Físicos da Chapa do Motor.

Parâmetro	Variável	Valor
Massa	m_{cm}	0,014 (kg)
Comprimento	l_{cm}	0,099 (m)
Largura	a_{cm}	0,02 (m)
Espessura	b_{cm}	0,005 (m)

Fonte: Autor.

A partir desses valores é possível calcular o momento de inércia no centroide dessa chapa, um paralelepípedo regular e homogêneo, a partir da equação abaixo (MERIAM, 2009).

$$I_{cm} = \frac{1}{12} m_{cm} (a_{cm}^2 + l_{cm}^2) \quad (4.1)$$

As dimensões físicas do encoder são:

Tabela 4 – Parâmetros Físicos do Encoder.

Parâmetro	Variável	Valor
Massa	m_e	0,1 (kg)
Comprimento	l_e	0,034 (m)
Raio	r_e	0,019 (m)

Fonte: Autor.

Pelo fato do encoder ser aproximado de um cilindro, o momento de inércia desse componente pode ser calculado a partir da equação (MERIAM, 2009):

$$I_e = \frac{1}{4} m_e r_e^2 + \frac{1}{12} m_e l_e^2 \quad (4.2)$$

As dimensões físicas para a chapa de fixação do encoder são:

Tabela 5 – Parâmetros Físicos da Chapa do Encoder.

Parâmetro	Variável	Valor
Massa	m_{ce}	0,01 (kg)
Comprimento	l_{ce}	0,005 (m)
Largura	a_{ce}	0,04 (m)
Espessura	b_{ce}	0,045 (m)

Fonte: Autor.

Como a chapa de fixação do encoder também pode ser aproximada como um paralelepípedo regular, a equação (4.1) pode ser utilizada para calcular I_{ce} .

Por último, é calculado o momento de inércia do pêndulo em sua posição de equilíbrio, noventa graus para cima.

Tabela 6 – Parâmetros Físicos do Pêndulo.

Parâmetro	Variável	Valor
Massa	m_p	0,011 (kg)
Altura	l_p	0,1 (m)
Raio	r_p	0,005 (m)

Fonte: Autor.

O pêndulo também pode ser modelado como um cilindro, no entanto, diferentemente do momento de inércia apresentado em (4.2), o momento de inércia do pêndulo é calculado em relação a sua extremidade, logo (MERIAM, 2009):

$$I_p = \frac{1}{3} m_p l_p^2 \quad (4.3)$$

Os momentos de inércia foram calculados em torno do centro de massa dos componentes, exceto o do pêndulo que foi em relação ao seu raio de giração, portanto agora faz-se necessário a transferência desses momentos de inércia para o eixo do motor de corrente contínua. Essa transferência pode ser realizada através da utilização do teorema dos eixos paralelos, descrito abaixo (MERIAM, 2009).

$$I = \bar{I} + md^2 \quad (4.4)$$

onde \bar{I} é o momento de inércia no centroide, m é a massa do componente, d é a distância do centro de massa ao eixo para onde o momento será transferido.

O valor obtido nessa relação é referente a I_0 , ou seja, o momento de inércia do braço do conjunto, igual a $8,351 \times 10^{-4} (kg \cdot m^2)$.

4.3.2 Parâmetros do Pêndulo

O cálculo do momento de inércia do pêndulo em seu raio de giração foi demonstrado na seção anterior, esse valor é de $3,667 \times 10^{-5} (kg \cdot m^2)$.

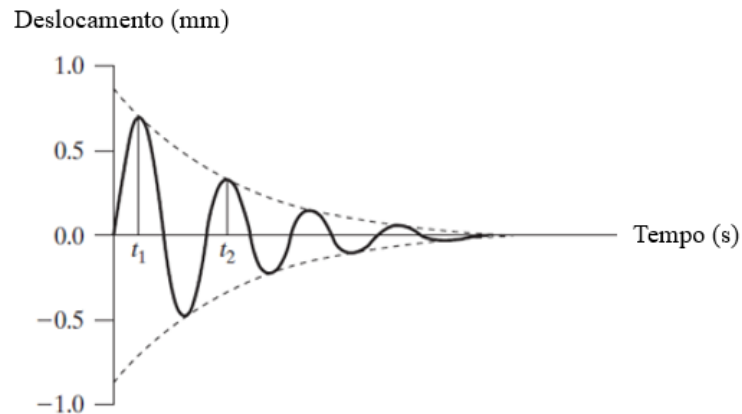
O parâmetro que ainda deve ser calculado é o coeficiente de atrito viscoso, a estratégia para se obter esse valor experimentalmente é através da resposta livre do pêndulo e cálculo do decremento logarítmico.

Segundo Inman (2014), o decremento logarítmico pode ser obtido através da equação (4.5).

$$\delta = \ln \frac{x(t)}{x(t+T)} \quad (4.5)$$

O período T pode ser obtido através do gráfico da resposta, como exemplificado na Figura 18.

Figura 18 – Resposta Livre de um Sistema Subamortecido.



Fonte: Inman (2014).

4.3.2.1 Procedimento Experimental para Aquisição do Decremento Logarítimo

O procedimento experimental para aquisição do decremento logarítimo está baseado na obra de Houck et al. (2013).

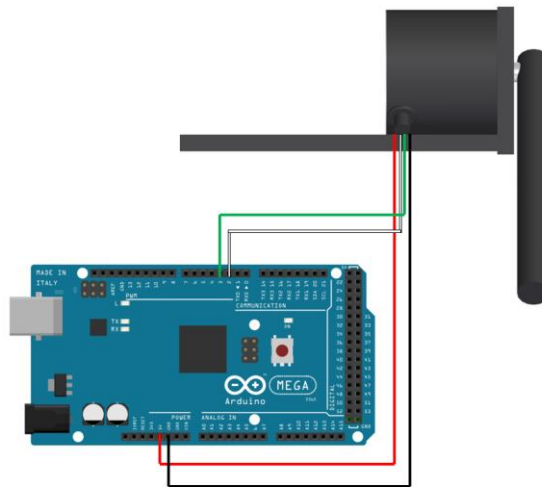
Os materiais necessários para a realização desse experimento são:

- Conjunto Braço do pêndulo;
- Pêndulo;
- Arduino;
- Computador.

O método da experimentação é descrito a seguir:

1. Fixar o conjunto braço do pêndulo em uma superfície livre de vibrações externas;
2. Realizar as ligações do encoder no Arduino conforme ilustração da Figura 19;

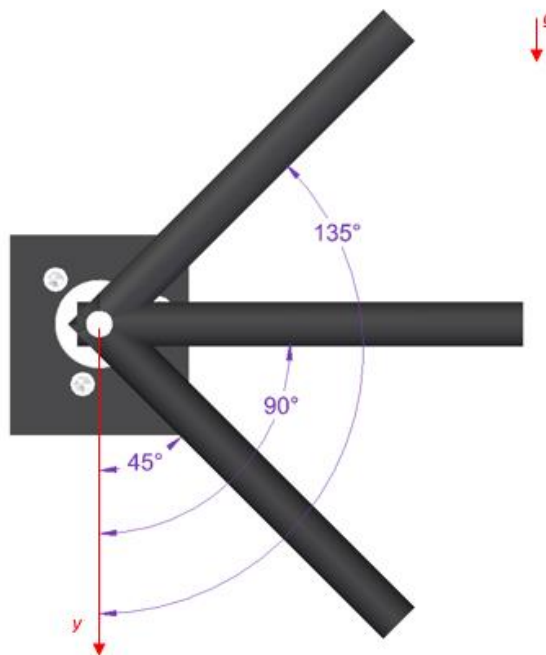
Figura 19 – Esquema Elétrico para Procedimento Experimental de Aquisição do Coeficiente de Atrito Viscoso.



Fonte: Autor.

3. Ligar o arduino ao computador que será utilizado para monitorar o experimento;
4. Verificar e realizar upload do código localizado no Apêndice B do trabalho no Arduino;
5. Posicionar o pêndulo nas posições ilustradas na Figura 20 e realizar dois lançamentos para cada posição;

Figura 20 – Posições de Lançamento do Pêndulo.



Fonte: Autor.

6. Registrar os resultados de posição angular e tempo da interface do Arduino.

A partir das respostas obtidas experimentalmente, é possível determinar os decrementos logarítmicos δ , conforme a equação (4.5). Outra importante relação apresentada por Inman (2014) é a da razão de amortecimento com o decremento logarítmico, enunciada por:

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}} \quad (4.6)$$

Possuindo o conhecimento das razões de amortecimento, é possível calcular o coeficiente de amortecimento viscoso através da equação da razão de amortecimento abaixo.

$$\zeta = \frac{c_{eq}}{2m_{eq}\omega_n} \quad (4.7)$$

Sabendo que a equação de segunda ordem do pêndulo é representada por:

$$\frac{mL^2}{3}\ddot{\theta} + A_p\dot{\theta} + \frac{mgL}{2}\theta = 0 \quad (4.8)$$

onde m é a massa do pêndulo, L é o comprimento total do pêndulo e g é a aceleração da gravidade.

Observa-se que:

$$m_{eq} = \frac{mL^2}{3} \quad (4.9)$$

$$c_{eq} = A_p \quad (4.10)$$

$$K_{eq} = \frac{mgL}{2} \quad (4.11)$$

Portanto, torna-se possível isolar o valor de A_p , o amortecimento viscoso do pêndulo. Por fim, a metodologia de validação do amortecimento consiste em comparar as curvas experimentais com simulações utilizando os parâmetros obtidos do protótipo, essa comparação será realizada através do cálculo do erro médio absoluto.

4.3.3 Parâmetros do Atuador

Os parâmetros do motor CC podem ser identificados através de experimentos, como demonstrado a seguir.

4.3.3.1 Procedimento Experimental para Aquisição da Resistência do Circuito de Armadura

A resistência do circuito de armadura, R_a , pode ser obtida através da medição com um multímetro (HOUCK et al., 2013).

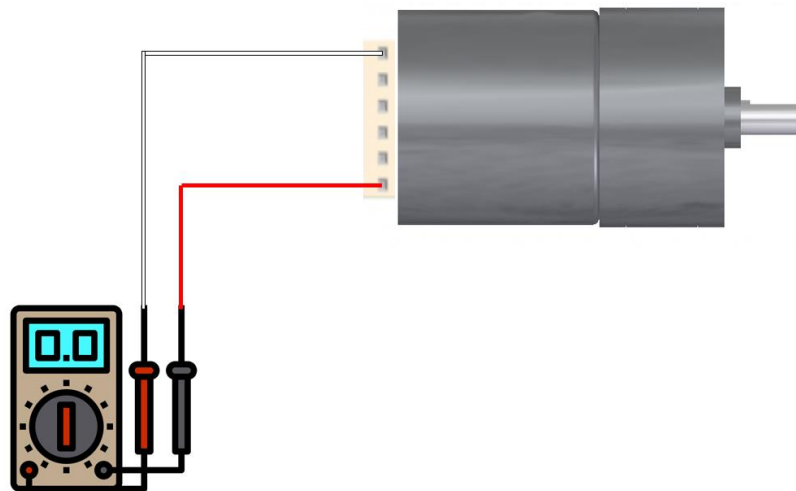
Os materiais necessários para a realização desse experimento são:

- Atuador do sistema;
- Multímetro.

O método da experimentação é descrito a seguir:

1. Realizar a ligação dos terminais positivo e negativo do motor CC no multímetro, conforme ilustração da Figura 21.

Figura 21 - Esquema Elétrico para Procedimento Experimental de Aquisição da Resistência do Circuito de Armadura.



Fonte: Autor

2. Ligar o multímetro e selecionar a função de ohmímetro;
3. Variar a posição angular do eixo do motor conforme a Tabela 7;

Tabela 7 – Posicionamento do Eixo do Motor CC.

Posição	Ângulo (Graus)
1	0
2	45
3	90
4	135
5	180
6	225
7	270
8	315

Fonte: Autor

4. Registrar os resultados de resistência da interface do multímetro.

4.3.3.2 Procedimento Experimental para Aquisição da Constante do Motor CC

A constante K_m , pode ser obtida através da resposta do motor CC ao degrau, portanto, diversas entradas de tensão foram utilizadas e a constante pode ser calculada através da relação de velocidade e tensão no motor (HOUCK et al., 2013).

$$K_m = \frac{E_a - iR_a}{\dot{\theta}_0} \quad (4.12)$$

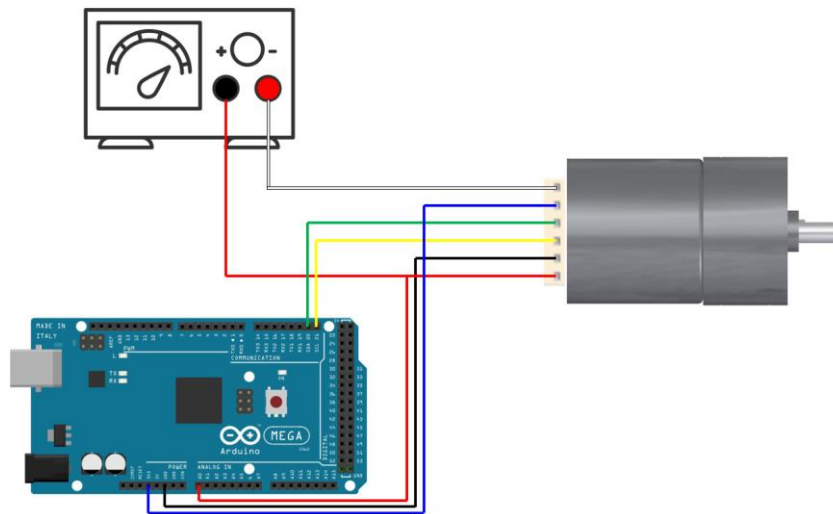
Os materiais necessários para a realização desse experimento são:

- Atuador do sistema;
- Fonte de alimentação;
- Arduino;
- Computador

O método da experimentação é descrita a seguir:

1. Fixar o motor CC em uma superfície;
2. Realizar as ligações do motor CC na fonte e no Arduino, conforme ilustração da Figura 22;

Figura 22 - Esquema Elétrico para Procedimento Experimental de Aquisição da Constante do Motor CC.



Fonte: Autor

3. Ligar o arduino ao computador que será utilizado para monitorar o experimento;
4. Verificar e realizar upload do código localizado no Apêndice B do trabalho no Arduino;
5. Realizar uma entrada degrau no sistema, variando a tensão da fonte conforme a Tabela 8;

Tabela 8 – Experimento de Entrada Degrau.

Degrau	E_a (V)
1	1
2	1,5
3	2
4	2,5
5	3
6	3,5
7	4
8	4,5
9	5

Fonte: Autor.

6. Registrar os resultados de tensão e velocidade angular da interface do Arduino.

4.3.4 Obtenção dos Parâmetros Desconhecidos

Há dois parâmetros que não puderam ser calculados ou obtidos experimentalmente, são eles: o coeficiente de atrito viscoso na junta do braço e a indutância do circuito de armadura do motor de corrente contínua.

O coeficiente de atrito viscoso na junta do braço, b_0 , não pôde ser calculado pois o motor de corrente contínua utilizado no projeto possui uma caixa de redução que impede a observação e cálculo experimental desse valor. A caixa de redução não permite o mesmo movimento observado no pêndulo, não sendo possível calcular o decremento logarítmico.

Já a indutância do circuito de armadura, L_a , pode ser obtida através de um medidor LCS. No entanto, como não há esse medidor disponível nos laboratórios do Departamento de Engenharia Mecânica da UFAM para se obter essa medida experimentalmente. Além disso, segundo Nise (2011), pode-se assumir que a indutância do circuito de armadura é pouco significativa quando comparada a resistência do circuito.

A estratégia utilizada para obter os dois valores restantes foi realizar uma série de simulações no modelo implementado no *Simulink*, variando esses parâmetros desconhecidos, como demonstrado na Tabela 9. Sendo n^n o número total de simulações.

Tabela 9 - Identificação de b_0 e L_a .

	L_{a1}	L_{a2}	L_{a3}	...	L_{an}
b_{01}	<i>Simulação₁</i>
b_{02}	<i>Simulação₂</i>B	...
b_{03}
...
b_{0n}	<i>Simulação_{n^n}</i>

Fonte: Autor.

Cada simulação foi comparada com a resposta real do sistema dada uma entrada de tensão 5 V. O procedimento experimental para aquisição da resposta do sistema real será descrito a seguir.

4.3.4.1 Procedimento Experimental para Aquisição da Resposta do Sistema Real

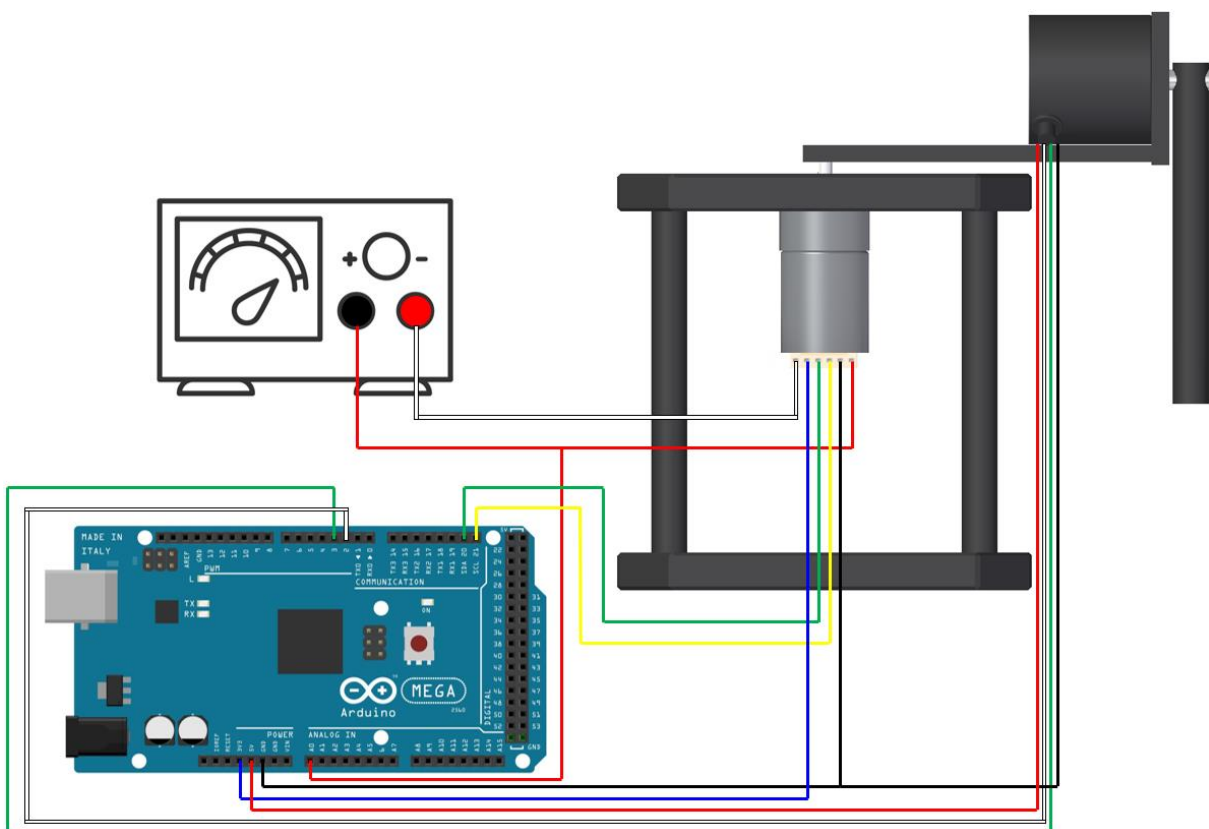
Os materiais necessários para a realização desse experimento são:

- Pêndulo invertido rotacional – sistema acoplado;
- Fonte de alimentação;
- Arduino;
- Computador.

O método da experimentação é descrito a seguir:

1. Fixar o pêndulo invertido rotacional em uma superfície livre de vibrações externas;
2. Realizar as ligações do encoder, motor CC, fonte de alimentação e Arduino conforme ilustração da Figura 23.

Figura 23 - Esquema Elétrico para Procedimento Experimental de Aquisição da Resposta do Sistema Real.



Fonte: Autor

3. Ligar o arduino ao computador que será utilizado para monitorar o experimento;

4. Verificar e realizar upload do código localizado no Apêndice B do trabalho no Arduino.
5. Realizar entrada degrau de 5 V no sistema;
6. Registrar os resultados de posição angular do braço e pêndulo, tensão de entrada e tempo da interface do Arduino.

A comparação das respostas simuladas e experimentais foi realizada através do cálculo do erro médio absoluto entre as curvas.

5 CONTROLE

5.1 Linearização e Análise do Modelo Acoplado

5.1.1 Linearização

Já que o sistema de Pêndulo de Furuta é não linear, como forma de simplificar o projeto será realizada a linearização das equações do sistema em torno de uma operação normal, para então seguir com a representação em espaço de estados e posterior aplicação e validação do controle no *Matlab Simulink*, conforme a subseção 2.2.5.

As variáveis de estado do sistema serão:

$$x_1 = \theta_0 \quad (5.1)$$

$$x_2 = \theta_1 \quad (5.2)$$

$$x_3 = \dot{\theta}_0 \quad (5.3)$$

$$x_4 = \dot{\theta}_1 \quad (5.4)$$

$$x_5 = i \quad (5.5)$$

A condição de operação normal do sistema será analisada como sendo em torno das condições iniciais nulas do pêndulo invertido em equilíbrio, portanto:

$$f = [\theta_0 \ \theta_1 \ \dot{\theta}_0 \ \dot{\theta}_1 \ i] = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \quad (5.6)$$

É necessário realizar a substituição das variáveis de estado nas equações dinâmicas do sistema, portanto, pode-se dizer que:

$$\dot{x}_1 = \dot{\theta}_0 = x_3 \quad (5.7)$$

$$\dot{x}_2 = \dot{\theta}_1 = x_4 \quad (5.8)$$

$$\dot{x}_3 = \ddot{\theta}_0 \quad (5.9)$$

$$\dot{x}_4 = \ddot{\theta}_1 \quad (5.10)$$

$$\dot{x}_5 = \dot{i} \quad (5.11)$$

As equações de estado \dot{x}_1 e \dot{x}_2 são, respectivamente:

$$f_1 = \dot{x}_1 = x_3 \quad (5.12)$$

$$f_2 = \dot{x}_2 = x_4 \quad (5.13)$$

As equações de estado \dot{x}_3 e \dot{x}_4 podem ser obtidas através das equações dinâmicas do braço e do pêndulo, representadas respectivamente, por (3.22) e (3.23). Realizando a substituição das variáveis de estado nessas equações obtém-se:

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= \frac{-(m_1 l_1 L_0 \cos x_2) \dot{x}_4 - 2m_1 l_1^2 x_3 x_4 \sin x_2 \cos x_2 + m_1 L_0 l_1 x_4^2 \sin x_2 + \tau_0 - b_0 x_3}{(I_0 + m_1 L_0^2 + m_1 l_1^2 \sin^2 x_2)} \quad (5.14) \end{aligned}$$

$$\dot{x}_4 = \frac{-(m_1 L_0 l_1 \cos x_2) \dot{x}_3 + m_1 l_1^2 x_3 \sin x_2 \cos x_2 + m_1 g l_1 \sin x_2 + \tau_1 - b_1 x_4}{(I_1 + m_1 l_1^2)} \quad (5.15)$$

Após o isolamento de \dot{x}_3 e \dot{x}_4 e a aplicação da relação de $\tau_0 = T_m$, as funções de estado são obtidas:

$$f_3 = \dot{x}_3 = \frac{E + F + G}{H} \quad (5.16)$$

onde

$$E = -(m_1 l_1 L_0 \cos x_2)(m_1 l_1^2 x_3 \sin x_2 \cos x_2 + m_1 g l_1 \sin x_2 + \tau_1 - b_1 x_4) \quad (5.17)$$

$$F = (I_1 + m_1 l_1^2)(-2m_1 l_1^2 x_3 x_4 \sin x_2 \cos x_2 + m_1 L_0 l_1 x_4^2 \sin x_2 + K_m x_5 - b_0 x_3) \quad (5.18)$$

$$G = (m_1 l_1 L_0 \cos x_2) \quad (5.19)$$

$$H = (I_1 + m_1 l_1^2)(I_0 + m_1 L_0^2 + m_1 l_1^2 \sin^2 x_2) - (m_1^2 l_1^2 L_0^2 \cos^2 x_2) \quad (5.20)$$

$$f_4 = \dot{x}_4 = \frac{I + J}{K} \quad (5.21)$$

$$I = -(m_1 l_1 L_0 \cos x_2)(-2m_1 l_1^2 x_3 x_4 \sin x_2 \cos x_2 + m_1 L_0 l_1 x_4^2 \sin x_2 + K_m x_5 - b_0 x_3) \quad (5.22)$$

$$J = (I_0 + m_1 L_0^2 + m_1 l_1^2 \sin^2 x_2)(m_1 l_1^2 x_3 \sin x_2 \cos x_2 + m_1 g l_1 \sin x_2 + \tau_1 - b_1 x_4) \quad (5.23)$$

$$K = (I_0 + m_1 L_0^2 + m_1 l_1^2 \sin^2 x_2)(I_1 + m_1 l_1^2) - (m_1^2 l_1^2 L_0^2 \cos^2 x_2) \quad (5.24)$$

Para se obter equação de estado de \dot{x}_5 , é necessário realizar a substituição das variáveis de estado na equação (2.10), conforme abaixo.

$$f_5 = \dot{x}_5 = \frac{(E_a - R_a x_5 - K_m x_3)}{L_a} \quad (5.25)$$

Essas equações representam o sistema não linear em espaço de estados. A fim de se obter a representação do sistema linearizado, é necessária a utilização da equação descrita em (2.15) em torno de f .

A linearização do sistema em torno de f pode ser descrita como:

$$\delta \dot{x} = A\delta x + B\delta u \quad (5.26)$$

$$\delta y = C\delta x + D\delta u \quad (5.27)$$

onde δx , δu e δy são os pequenos desvios em torno da condição de linearização.

$$A = \left[\frac{\delta f}{\delta x} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta x_1} & \dots & \frac{\delta f_1}{\delta x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\delta f_n}{\delta x_1} & \dots & \frac{\delta f_n}{\delta x_n} \end{bmatrix}_{(n \times n)} \quad (5.28)$$

$$B = \left[\frac{\delta f}{\delta u} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta u_1} & \dots & \frac{\delta f_1}{\delta u_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\delta f_n}{\delta u_1} & \dots & \frac{\delta f_n}{\delta u_m} \end{bmatrix}_{(n \times m)} \quad (5.29)$$

$$C = \left[\frac{\delta h}{\delta x} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\delta h_1}{\delta x_1} & \dots & \frac{\delta h_1}{\delta x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\delta h_p}{\delta x_1} & \dots & \frac{\delta h_p}{\delta x_n} \end{bmatrix}_{(p \times n)} \quad (5.30)$$

$$D = \left[\frac{\delta h}{\delta u} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\delta h_1}{\delta u_1} & \dots & \frac{\delta h_1}{\delta u_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\delta h_p}{\delta u_1} & \dots & \frac{\delta h_p}{\delta u_m} \end{bmatrix}_{(p \times m)} \quad (5.31)$$

Para simplificação dos equacionamentos e visualização mais compacta do sistema, as seguintes relações serão realizadas.

$$J = I_0 I_1 + m_1 I_0 l_1^2 + m_1 I_1 L_0^2 \quad (5.32)$$

$$A_{32} = \left[\frac{\delta f_3}{\delta x_2} \right]_0 = -\frac{m_1^2 l_1^2 L_0 g}{J} \quad (5.33)$$

$$A_{33} = \left[\frac{\delta f_3}{\delta x_3} \right]_0 = -\frac{(I_1 + m_1 l_1^2) b_0}{J} \quad (5.34)$$

$$A_{34} = \left[\frac{\delta f_3}{\delta x_4} \right]_0 = \frac{m_1 L_0 l_1 b_1}{J} \quad (5.35)$$

$$A_{35} = \left[\frac{\delta f_3}{\delta x_5} \right]_0 = \frac{(I_1 + m_1 l_1^2) K_m}{J} \quad (5.36)$$

$$A_{42} = \left[\frac{\delta f_4}{\delta x_2} \right]_0 = \frac{(I_0 + m_1 L_0^2)(m_1 g l_1)}{J} \quad (5.37)$$

$$A_{43} = \left[\frac{\delta f_4}{\delta x_3} \right]_0 = \frac{m_1 L_0 l_1 b_0}{J} \quad (5.38)$$

$$A_{44} = \left[\frac{\delta f_4}{\delta x_4} \right]_0 = -\frac{(I_0 + m_1 L_0^2) b_1}{J} \quad (5.39)$$

$$A_{45} = \left[\frac{\delta f_4}{\delta x_5} \right]_0 = -\frac{m_1 L_0 l_1 K_m}{J} \quad (5.40)$$

$$A_{53} = \left[\frac{\delta f_5}{\delta x_3} \right]_0 = -\frac{K_m}{L_a} \quad (5.41)$$

$$A_{55} = \left[\frac{\delta f_5}{\delta x_5} \right]_0 = -\frac{R_a}{L_a} \quad (5.42)$$

$$B_{32} = \left[\frac{\delta f_3}{\delta u_2} \right]_0 = -\frac{m_1 L_0 l_1}{J} \quad (5.43)$$

$$B_{42} = \left[\frac{\delta f_4}{\delta u_2} \right]_0 = \frac{I_0 + m_1 L_0^2}{J} \quad (5.44)$$

$$B_{51} = \left[\frac{\delta f_5}{\delta u_1} \right]_0 = \frac{1}{L_a} \quad (5.45)$$

Portanto, as matrizes do sistema em espaço de estados são:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ 0 & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} \\ 0 & 0 & A_{53} & 0 & A_{55} \end{bmatrix} \quad (5.46)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & B_{32} \\ 0 & B_{42} \\ B_{51} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.47)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.48)$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.49)$$

Logo, o sistema representado conforme a equação (2.12) é:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ 0 & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} \\ 0 & 0 & A_{53} & 0 & A_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ B_{51} \end{bmatrix} E_a + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B_{32} \\ B_{42} \\ 0 \end{bmatrix} \tau_1 \quad (5.50)$$

5.2 Estabilidade

De acordo com as subseções 2.3.1 e 2.4, A estabilidade de um sistema pode ser determinada após a análise dos autovalores da matriz A do sistema representado em espaço de estados. Com a obtenção da equação (5.50), é possível analisar a estabilidade do sistema de pêndulo invertido acoplado através dos autovalores da matriz do sistema.

Com auxílio do *software Matlab*, os autovalores foram obtidos, sendo:

$$P = \begin{bmatrix} -0,00 \\ -216,77 \\ 9,02 \\ -17,09 \\ -9,05 \end{bmatrix} \quad (5.51)$$

Como esse sistema apresenta um autovalor positivo (no semiplano direito do plano real imaginário), é provado que é um sistema instável.

5.3 Controlabilidade

A controlabilidade do sistema pode ser analisada conforme demonstrado na subseção 2.5.1. A equação (2.20) para o sistema de estudo é:

$$M_c = \begin{bmatrix} 0,00 & 0,00 & 4,52x10^3 & -1,05x10^6 & 2,30x10^8 \\ 0,00 & 0,00 & -4,37x10^3 & 1,02x10^6 & -2,23x10^8 \\ 0,00 & 4,52x10^3 & -1,05x10^6 & 2,30x10^8 & -4,98x10^{10} \\ 0,00 & -4,37x10^3 & 1,02x10^6 & -2,23x10^8 & 4,84x10^{10} \\ 1,00x10^2 & -2,21x10^4 & 4,80x10^6 & -1,04x10^9 & 2,26x10^{11} \end{bmatrix} \quad (5.52)$$

Como o posto de M_c é igual a 5, que é o número de estados do sistema, esse sistema pode ser controlado.

5.4 Controlador Linear Quadrático Regulador

Como o sistema de pêndulo invertido apresentado nesse trabalho é controlável, pode-se aplicar a estratégia de controle em espaço de estados, o controlador Linear Quadrático Regulador – LQR.

Conforme visto na subseção 2.5.3, o método visa obter um controlador otimizado que minimiza a função de custo do sistema, representada por (5.53)(2.23). Logo, precisa-se definir as matrizes Q e R .

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (5.53)$$

A matriz Q é uma matriz 5×5 pois o sistema possui cinco estados, a matriz está representada abaixo.

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,05 \end{bmatrix} \quad (5.54)$$

Os valores foram escolhidos com base na estratégia de reduzir o erro relativo aos ângulos do pêndulo e do braço, melhorando portanto a performance do sistema. Por conta disso, Q_{11} e Q_{22} são os maiores valores, indicando que nesses estados específicos o erro tem elevada importância quando desviados do equilíbrio e o controlador sempre busca reduzi-los com prioridade.

A matriz R é uma matriz 1×1 pois a entrada onde o sinal de controle será aplicado é a tensão do atuador, apesar do sistema apresentar duas entradas. A matriz R foi definida como:

$$R = [0,1] \quad (5.55)$$

No caso de R , quanto maior o valor, menor o esforço no atuador, em outras palavras, menos energia será disponibilizada para realizar o equilíbrio do sistema. Essa análise é importante caso o atuador do sistema tenha um gasto de energia ou custo elevado como em propulsor de satélite alimentado por combustível por exemplo, nesse caso, um alto R implicaria em uma reação mais lenta e em mais erro relativo aos estados para que se possa economizar combustível.

No caso do pêndulo invertido, como o atuador é um motor de corrente contínua conectado em uma fonte de tensão, o valor escolhido para R foi baixo, implicando em uma reação mais rápida.

O próximo passo é a definição da matriz P e sua substituição na equação (2.24), no *Software Matlab* é possível determinar a matriz através da função $[K, P, E]=lqr(A,B,Q,R)$, sendo K a matriz de ganho, P a solução algébrica da equação de Riccati e E os autovalores do sistema em malha fechada. Após a substituição, a seguinte matriz de ganho K foi obtida.

$$K = [-3,162 \quad -46,966 \quad -3,068 \quad -5,017 \quad 0,435] \quad (5.56)$$

6 RESULTADOS

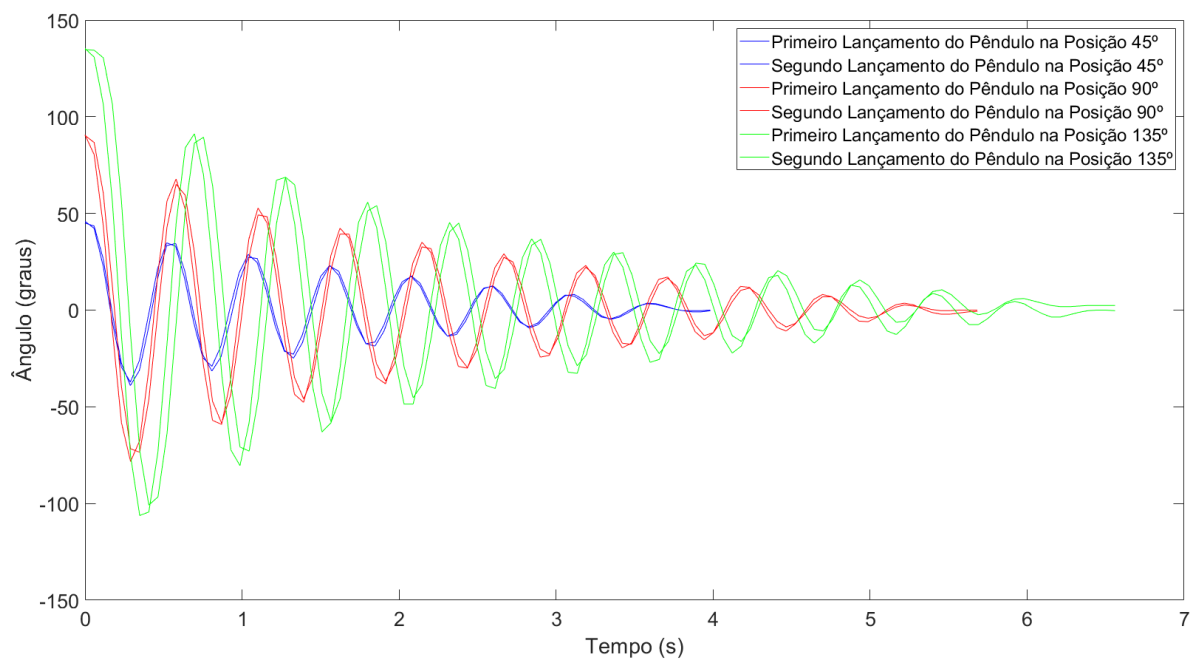
Neste capítulo, serão apresentados os resultados dos experimentos de obtenção dos parâmetros do protótipo de pêndulo de Furuta, as validações desses resultados através da comparação das curvas de respostas simuladas e experimentais e aplicação do controlador Linear Quadrático no *Matlab Simulink*.

6.1 Obtenção e Validação do Coeficiente de Amortecimento Viscoso do Pêndulo

Conforme descrito na subseção 4.3.2.1, o procedimento experimental consiste na fixação do pêndulo em ângulos pré-determinados e coleta de dados de θ_1 após o lançamento livre a partir dessas posições. Os ângulos utilizados foram 45° , 90° e 135° , assumindo como referencial a posição de repouso do pêndulo para baixo – 0° .

A partir dos registros do experimento realizado, foram geradas as seis respostas visualizadas na Figura 24.

Figura 24 – Comparação das Respostas Experimentais do Pêndulo.



Fonte: Autor.

Após a utilização das equações (4.5) a (4.11), foi possível gerar a Tabela 10, com os amortecimentos provenientes dos experimentos.

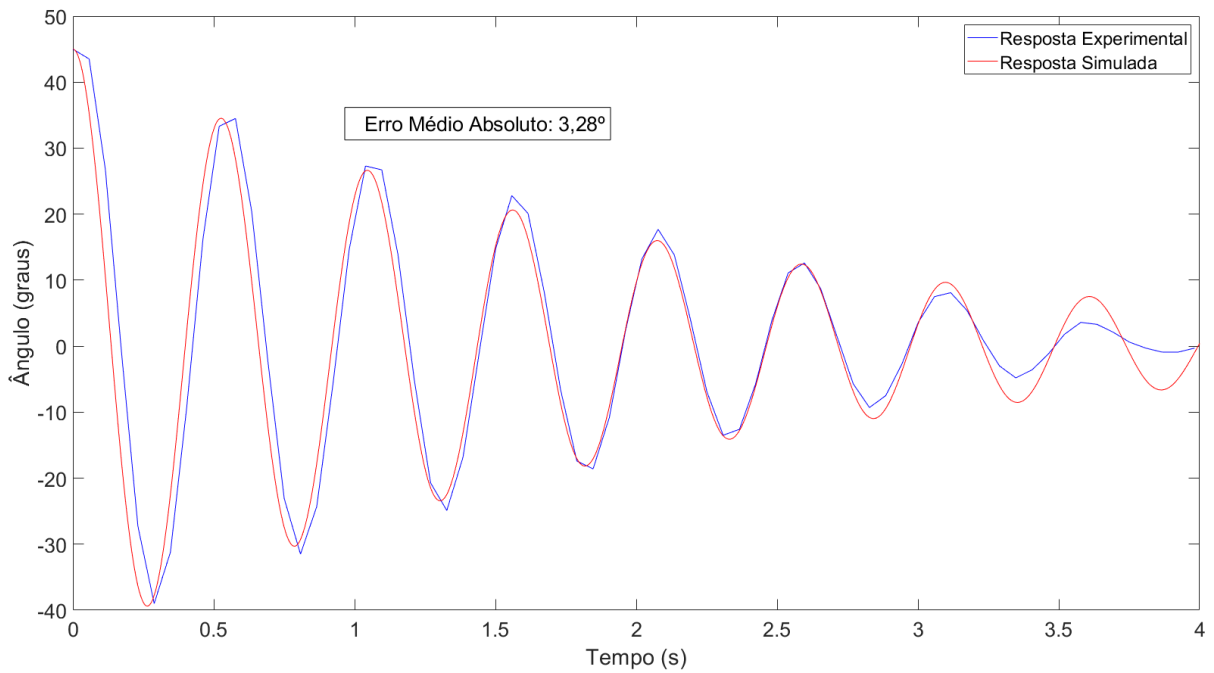
Tabela 10 – Amortecimentos Viscosos.

Ângulo (Graus)	b_1 (Nm/s)
45	$2,72 \times 10^{-5}$
45	$3,36 \times 10^{-5}$
90	$4,02 \times 10^{-5}$
90	$3,59 \times 10^{-5}$
135	$3,78 \times 10^{-5}$
135	$4,07 \times 10^{-5}$
Média	$3,59 \times 10^{-5}$
Desvio Padrão	$0,5 \times 10^{-5}$

Fonte: Autor.

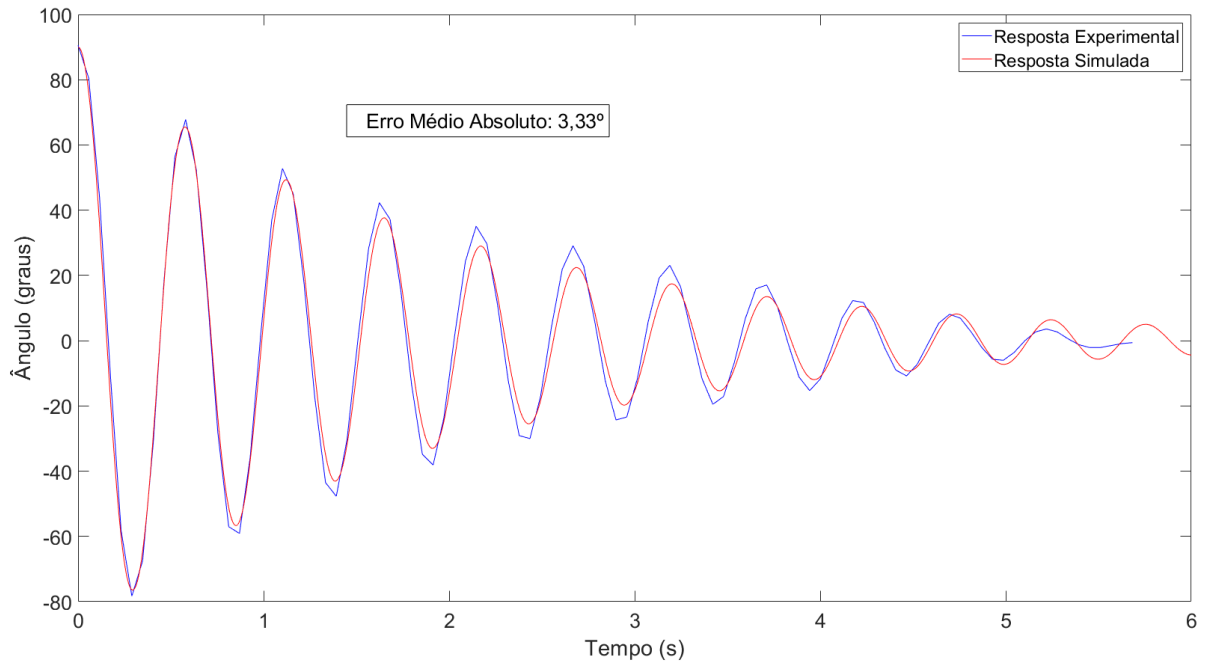
Os gráficos das Figuras 25, 26 e 27 foram obtidos através da coleta de respostas livres do protótipo e comparados com a resposta simulada do modelo implementado no *Matlab Simulink*, utilizando a média do coeficiente de atrito viscoso obtida experimentalmente.

Figura 25 – Resposta Livre a Partir da Posição de θ_1 igual a 45° .



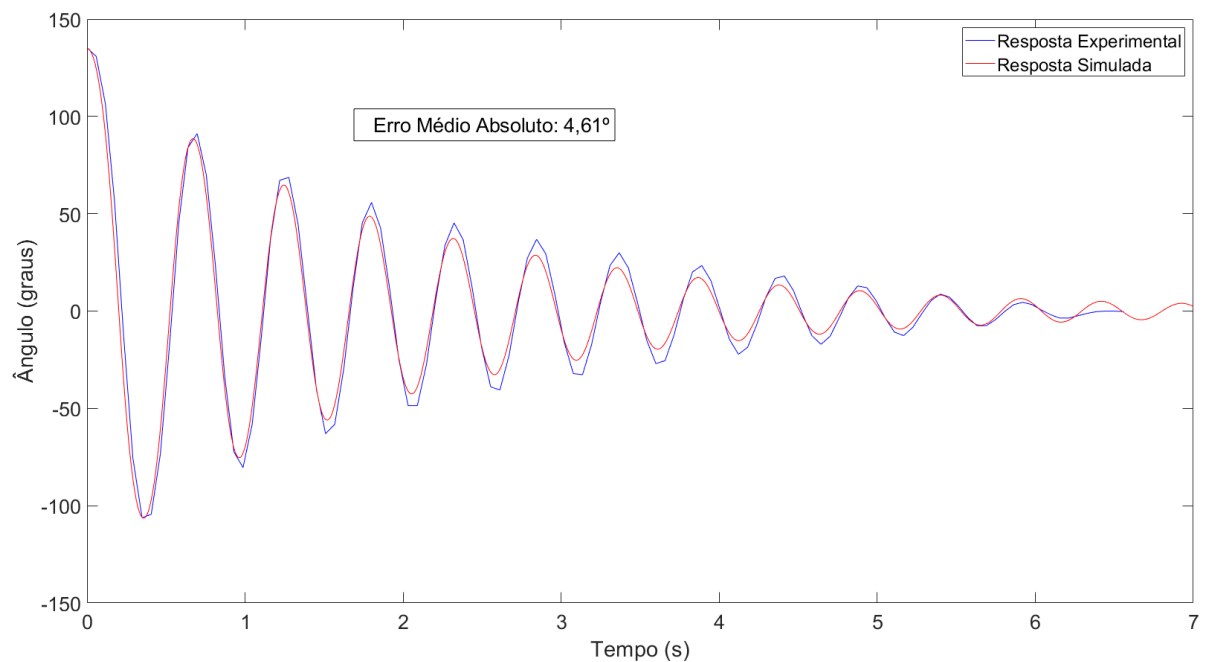
Fonte: Autor.

Figura 26 – Resposta Livre a Partir da Posição de θ_1 igual a 90° .



Fonte: Autor.

Figura 27 – Resposta Livre a Partir da Posição de θ_1 igual a 135° .



Fonte: Autor.

Pode-se observar que o erro médio absoluto entre os lançamentos de 45° , 90° e 135° é, respectivamente $3,28^\circ$, $3,33^\circ$ e $4,61^\circ$. Outra análise interessante de ser realizada é referente ao repouso do protótipo do pêndulo, é possível observar que o pêndulo real cessa a movimentação antes do simulado. Uma das possíveis explicações do motivo desse acontecimento é devido ao

modelo proposto nesse trabalho considerar que o atrito é um atrito viscoso. Quando o pêndulo está com velocidade próxima a zero, o efeito do atrito seco passa a ser significativo no fenômeno físico.

6.2 Obtenção e Validação dos Parâmetros do Atuador

6.2.1 Obtenção da Resistência do Circuito de Armadura

Conforme descrito na subseção 4.3.3.1, o procedimento experimental consiste em realizar a medição da resistência do circuito de armadura do motor para diferentes posições do eixo por meio de um multímetro.

Após a experimentação, foi possível montar a Tabela 11.

Tabela 11 – Parâmetro R_a .

Ângulo (Graus)	R_a (Ohm)
0	2,2
45	2,3
90	2,2
135	2,2
180	2,3
225	2,1
270	2,2
315	2,2
Média	2,2
Desvio Padrão	0,1

Fonte: Autor.

O valor médio de R_a é $2,212 \Omega$, portanto esse será o valor utilizado durante as simulações.

6.2.2 Obtenção da Constante de Proporcionalidade do Motor

Conforme descrito na subseção 4.3.3.2, o procedimento experimental consiste em realizar diferentes entradas de tensão para realizar o monitoramento da velocidade angular no eixo do motor.

A corrente I_a é a corrente do circuito de armadura sem carregamento mecânico, fornecida pelo fabricante do motor, a resistência do circuito de armadura R_a , foi obtida na seção anterior. Utilizando-se a equação (4.12) e dos dados provenientes do experimento foi possível montar a Tabela 12.

Tabela 12 – Parâmetro K_m .

E_a (V)	I_a (A)	R_a (Ohm)	$\dot{\theta}_0$ (rad/s)	K_m
1,04	0,05	2,21	4,53	0,21
1,50	0,05	2,21	6,09	0,20
2,00	0,05	2,21	9,26	0,20
2,50	0,05	2,21	11,87	0,20
3,01	0,05	2,21	14,31	0,20
3,54	0,05	2,21	16,77	0,21
4,00	0,05	2,21	19,16	0,20
4,50	0,05	2,21	21,70	0,20
5,00	0,05	2,21	24,04	0,20
Média				0,20
Desvio Padrão				0,004

Fonte: Autor

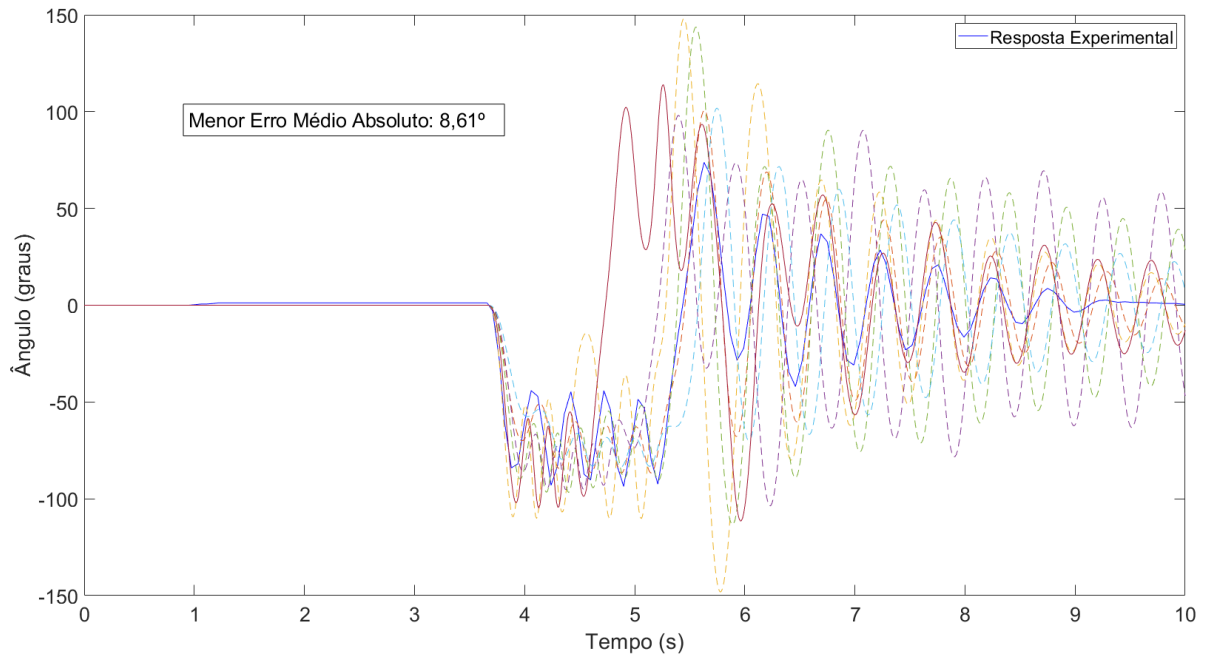
O valor médio de K_m é 0,20, portanto esse será o valor utilizado durante as simulações.

6.3 Obtenção e Validação do Coeficiente de amortecimento Viscoso do Braço e Indutância do Circuito de Armadura

Conforme descrito na subseção 4.3.4.1, o procedimento experimental consiste no monitoramento de θ_0 e θ_1 para uma tensão de entrada aplicada ao braço e comparação através do erro médio absoluto dessa resposta experimental com a resposta do modelo em *Simulink* para a mesma tensão de entrada.

O gráfico da Figura 28 representa as simulações realizadas, as curvas tracejadas são simulações e a curva contínua em azul é a resposta experimental do protótipo durante um intervalo de tempo.

Figura 28 – Simulações Paralelas e Resposta do Sistema Real para θ_1 .



Fonte: Autor.

O menor valor de erro médio absoluto foi identificado como $8,61^\circ$ e com isso foi possível coletar os valores de b_0 e L_a para essa simulação como, respectivamente, $1,133 \times 10^{-2} (Nm/s)$ e $8,55 \times 10^{-3} (H)$.

6.4 Comparação da Resposta do Protótipo com a Resposta Simulada

Após a obtenção de todos os parâmetros conforme visto nas seções anteriores, a Tabela 13 compila os parâmetros do sistema acoplado, são parâmetros referentes ao subsistema de pêndulo invertido e de motor de corrente contínua.

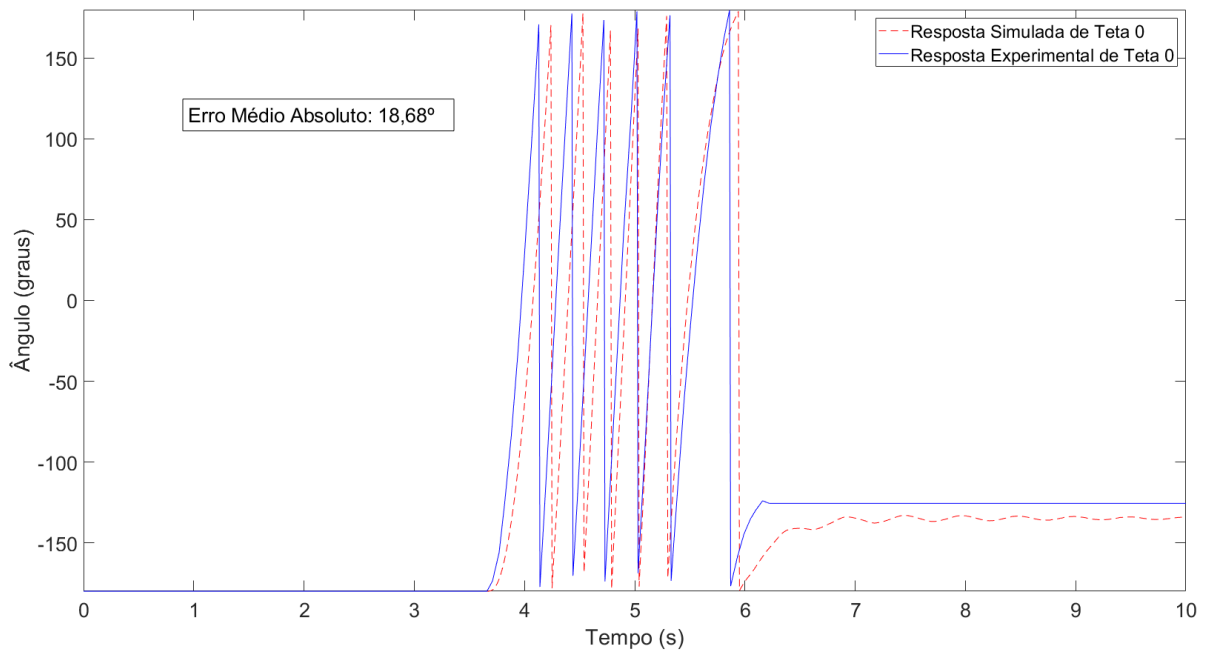
Tabela 13 – Parâmetros do Pêndulo Invertido Acoplado.

Parâmetro	Variável	Valor
Gravidade	g	$9,81 (m/s^2)$
Massa do Braço	m_0	$0,12 (kg)$
Massa do Pêndulo	m_1	$0,01 (kg)$
Comprimento Total do Braço	L_0	$0,11 (m)$
Comprimento ao Centro de Massa do Pêndulo	l_1	$5,16 \times 10^{-2} (m)$
Coefficiente de Atrito Viscoso do Braço	b_0	$1,13 \times 10^{-2} (Nm/s)$
Coefficiente de Atrito Viscoso do Pêndulo	b_1	$3,59 \times 10^{-5} (Nm/s)$
Momento de Inércia do Braço	I_0	$8,35 \times 10^{-4} (kg \cdot m^2)$
Momento de Inércia do Pêndulo	I_1	$3,67 \times 10^{-5} (kg \cdot m^2)$
Indutância do Circuito de Armadura do Motor	L_a	$8,55 \times 10^{-3} (H)$
Resistência do Circuito de Armadura do Motor	R_a	$2,20 (\Omega)$
Constante do Motor	K_m	$0,20 (Nm/A)$

Fonte: Autor.

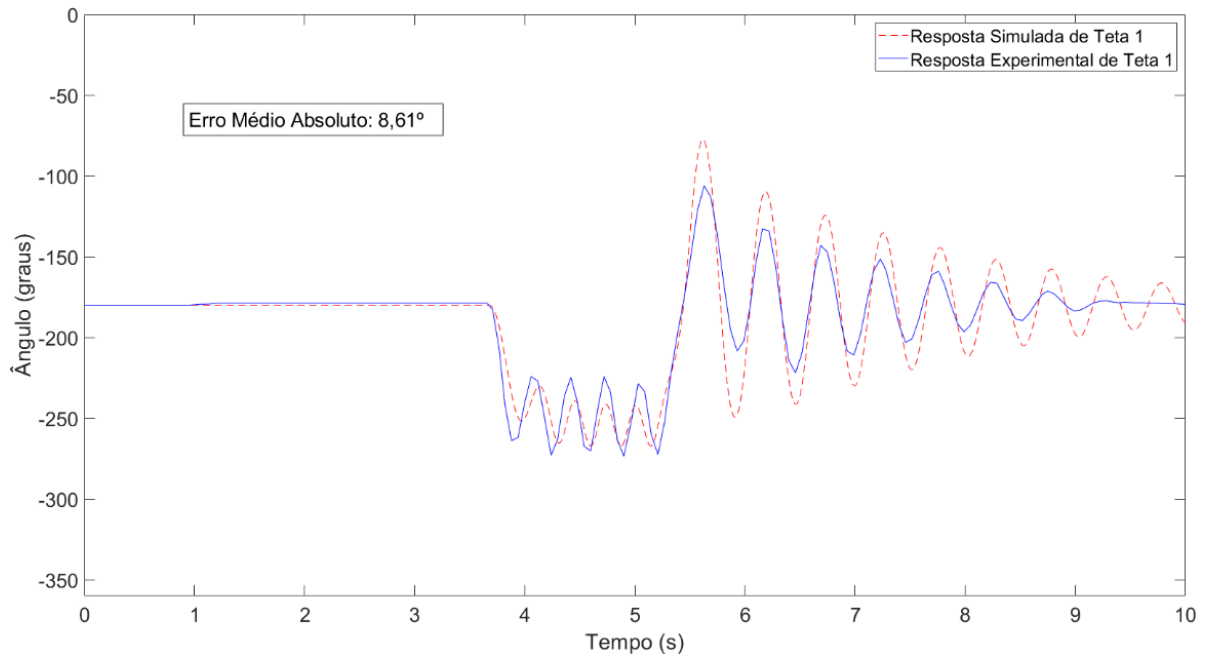
Os gráficos representado nas Figuras 29 e 30 foram obtidos através da aplicação de uma entrada pulso no atuador igual a $5 V$ enquanto o pêndulo está na posição vertical para baixo. É possível observar que a resposta simulada do sistema está coerente com o experimento realizado no sistema real, pois assim que a entrada é aplicada, o braço se desloca em uma direção e o pêndulo para a direção oposta.

Figura 29 – Resposta de θ_0 para o Sistema Acoplado dada uma Entrada Degrau no Atuador.



Fonte: Autor.

Figura 30 – Resposta de θ_1 para o Sistema Acoplado dada uma Entrada Degrau no Atuador.



Fonte: Autor

Pode-se observar que o erro médio absoluto entre as curvas de θ_0 e θ_1 é, respectivamente, $18,68^\circ$ e $8,61^\circ$. Outras observações podem ser realizadas em relação também ao coeficiente de atrito viscoso do braço, enquanto o pêndulo apresenta oscilação, o braço tem oscilações quase inexistentes. Isso se deve ao fato de que o coeficiente de atrito viscoso é alto devido a caixa de redução do motor.

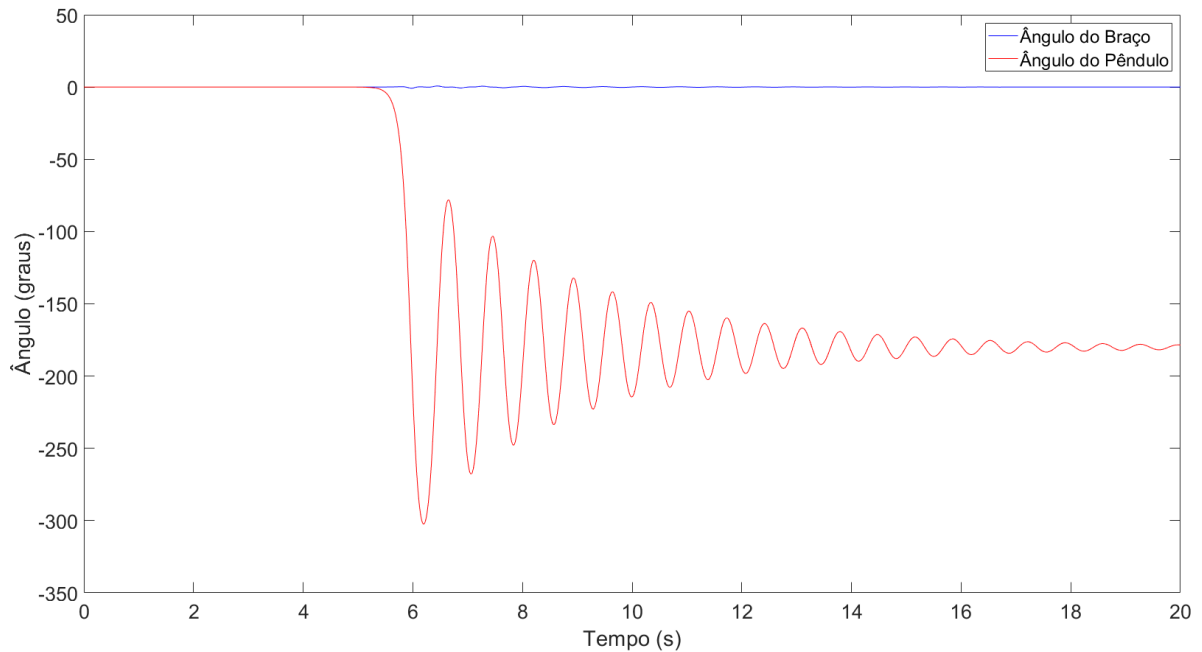
6.5 Aplicação do Controlador Linear Quadrático no *Simulink*

A resposta apresentada na Figura 31 é do sistema acoplado em malha aberta. O pêndulo foi colocado em posição de equilíbrio (para cima), por conta da instabilidade natural desse tipo de sistema ele tende a cair e se estabiliza na posição de repouso para baixo.

Uma das comprovações desse ocorrido é o repouso do pêndulo, a resposta estabiliza no valor de 180 graus, portanto, é possível observar que ele sai da posição de 0 graus e após as oscilações estabiliza na posição para baixo.

Novamente, é possível notar a baixa oscilação do braço do sistema em relação ao pêndulo, devido ao baixo coeficiente de atrito viscoso que representa a trava na caixa de redução do motor DC.

Figura 31 – Resposta do Sistema Acoplado Não Controlado.



Fonte: Autor.

Nas subseções 6.5.1 e 6.5.2 serão abordados dois controles projetados para finalidades diferentes, não foi realizada a validação experimental desses controles, somente simulações no *Software Simulink*.

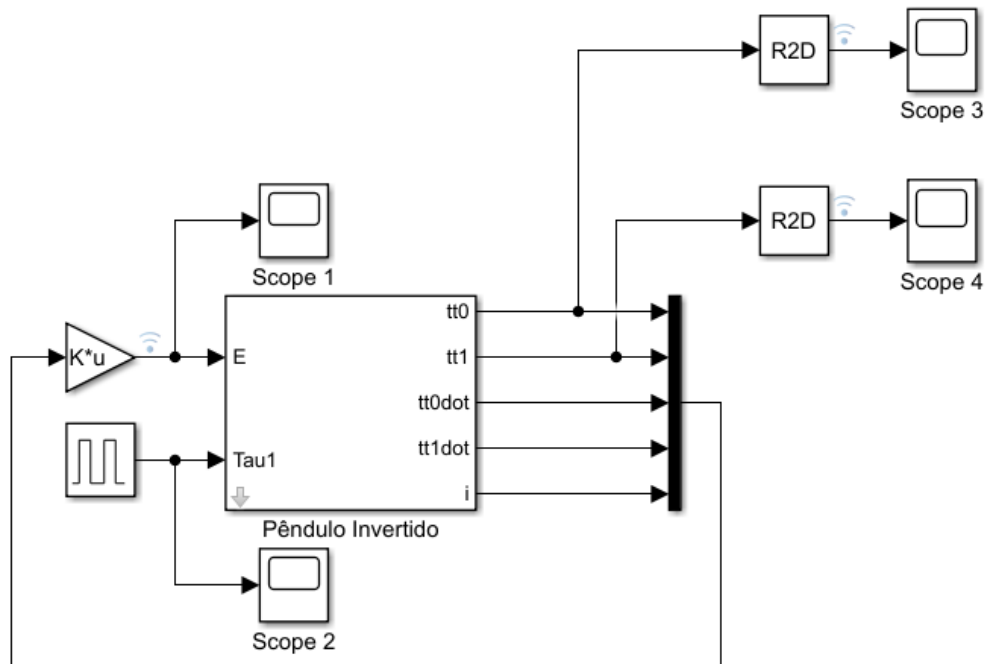
6.5.1 Controle do Equilíbrio do Pêndulo

Nessa aplicação, o objetivo do controlador é manter θ_0 e θ_1 em sua referência inicial constante, independentemente de perturbações externas aplicadas no pêndulo. Uma analogia para compreender o problema é tentar equilibrar uma vassoura na mão e mantê-la equilibrada mesmo na situação de alguém tentar empurrá-la através de um distúrbio, retornando tanto a mão quanto a vassoura para a posição inicial de referência.

Nessa aplicação específica de pêndulo de Furuta, esse distúrbio é um torque aplicado diretamente no pêndulo, esse torque desestabiliza o sistema e o objetivo do controle é fazer tanto θ_0 quanto θ_1 retornarem as suas posições iniciais de referência em 0° .

Na Figura 32 é possível visualizar a configuração da realimentação dos estados para esse controle no diagrama de blocos implementado no *Simulink*.

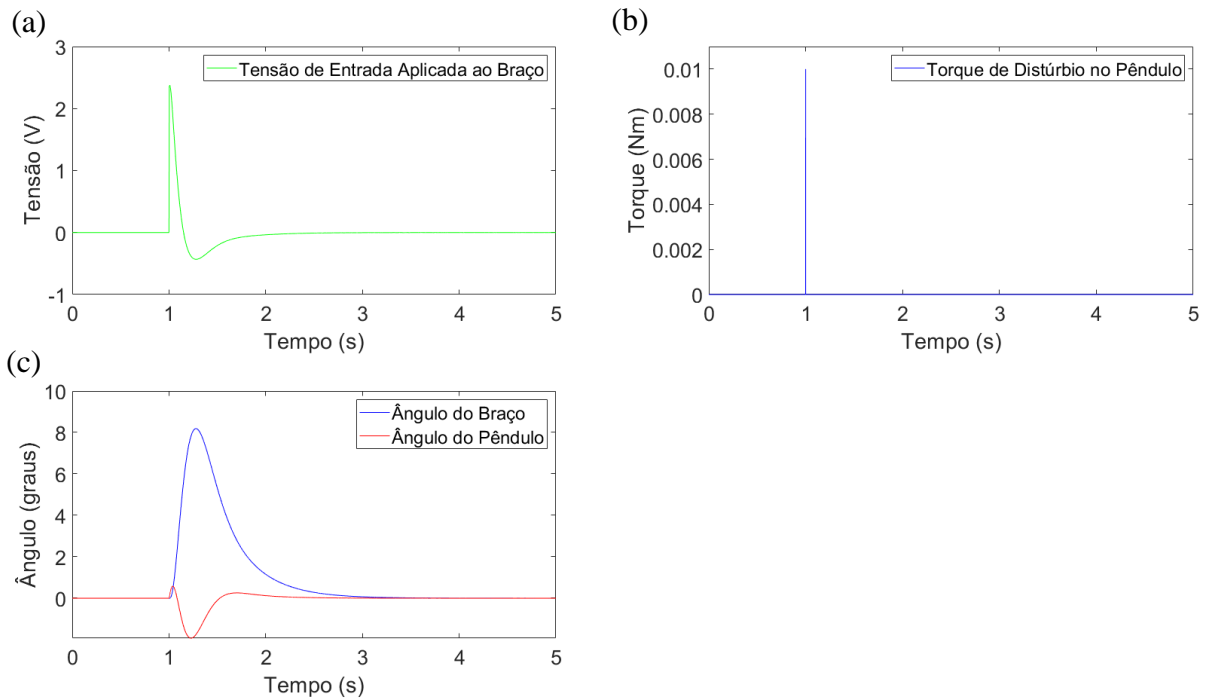
Figura 32 – Diagrama de Blocos do Controle Regulador.



Fonte: Autor.

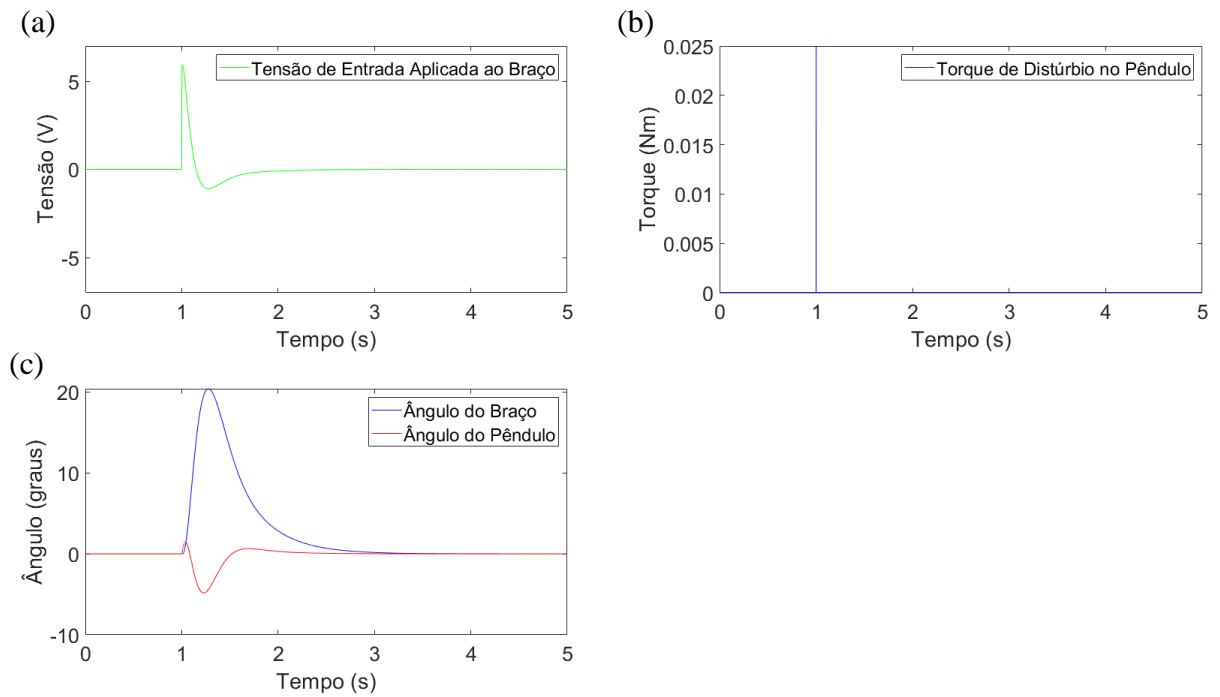
Nas Figuras 33 e 34, é possível verificar a resposta do sistema com a aplicação do controle, são simulados dois torques de distúrbio no pêndulo, o primeiro de magnitude $0,01 \text{ Nm}$ e o segundo de magnitude $0,025 \text{ Nm}$. A amplitude de $0,025 \text{ Nm}$ é testada pois exige o máximo do atuador para manter o sistema em equilíbrio após esse distúrbio, o atuador recebe uma tensão máxima de 6 V . Visto que o motor DC (atuador do sistema) opera até esse mesmo valor de tensão, um distúrbio maior poderá causar a falha elétrica do atuador. Para valores acima desses, será necessário a escolha de outro atuador.

Figura 33 – (a) Tensão de Entrada Aplicada ao Braço. (b) Torque de Distúrbio no Pêndulo. (c) Resposta do Sistema com Controle Regulador para Amplitude 0,01 Nm.



Fonte: Autor.

Figura 34 – (a) Tensão de Entrada Aplicada ao Braço. (b) Torque de Distúrbio no Pêndulo. (c) Resposta do Sistema com Controle Regulador para Amplitude 0,025 Nm.



Fonte: Autor.

Quando o impulso de magnitude 0,01 Nm aplicado, o que corresponde a um torque sendo aplicado na extremidade do pêndulo, é possível constatar que o pêndulo apresenta uma

amplitude máxima de 1,92 graus, enquanto o braço do sistema demonstra uma amplitude de aproximadamente 8,18 graus, já a tensão de entrada máxima aplicada ao braço foi aproximadamente 2,3 V. O sistema estabiliza completamente após aproximadamente 4 segundos.

Já quando o torque de distúrbio de magnitude 0,025 Nm é aplicado, é possível constatar que o pêndulo apresenta uma amplitude máxima de 4,82 graus, enquanto o braço do sistema demonstra uma amplitude máxima de 20,4 graus, já a tensão de entrada máxima aplicada ao braço foi de 5,94 V, devido ao bloco de saturação. O sistema estabiliza completamente após aproximadamente 4 segundos.

A amplitude máxima do torque de distúrbio que pode ser aplicada ao pêndulo é 0,025 Nm, um valor acima dessa referência resulta em uma tensão maior que a suportada pelo atuador para manter o sistema em equilíbrio.

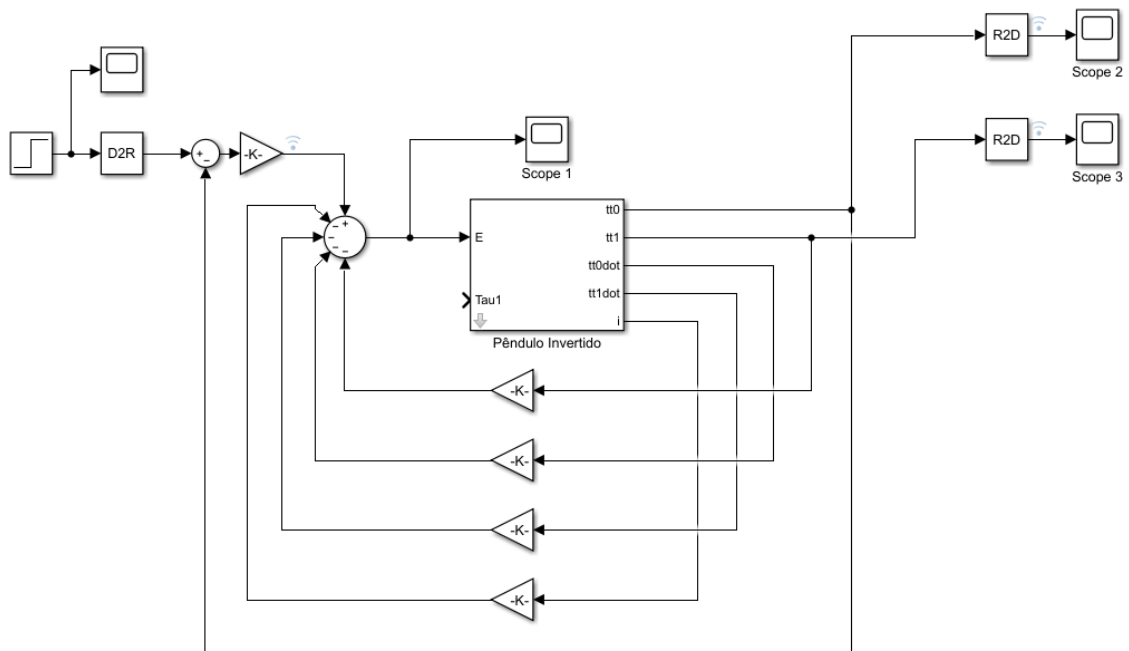
6.5.2 Controle do Equilíbrio do Pêndulo com Rastreamento de Movimento do Braço

O controle abordado nessa subseção tem como objetivo realizar o rastreamento de movimento do braço para novos valores de referência de θ_0 enquanto mantém o equilíbrio do pêndulo, também é conhecido como controle de rastreamento. Novamente, uma analogia para compreender o problema é tentar equilibrar uma vassoura na mão e movimentar a mão mantendo o equilíbrio da vassoura, assim realizando o rastreamento de movimento da mão para uma nova posição de referência enquanto mantém a vassoura equilibrada.

Similar ao controle apresentado na subseção 6.5.1, o valor de referência inicial para θ_0 e θ_1 é 0°, porém como o objetivo do controle é realizar o rastreamento de movimento do braço, um novo valor de referência pode ser escolhido para θ_0 . Assim, os valores finais após a aplicação do controle podem ser θ_0 na posição 10° e θ_1 na posição 0°, por exemplo.

Na Figura 35 é possível visualizar a configuração da realimentação dos estados para esse controle no diagrama de blocos implementado no *Simulink*. Esse difere do diagrama para o controle apresentado na subseção anterior pois é necessário estabelecer a nova referência de θ_0 para então aplicar o ganho, portanto esse estado deve ser analisado separadamente.

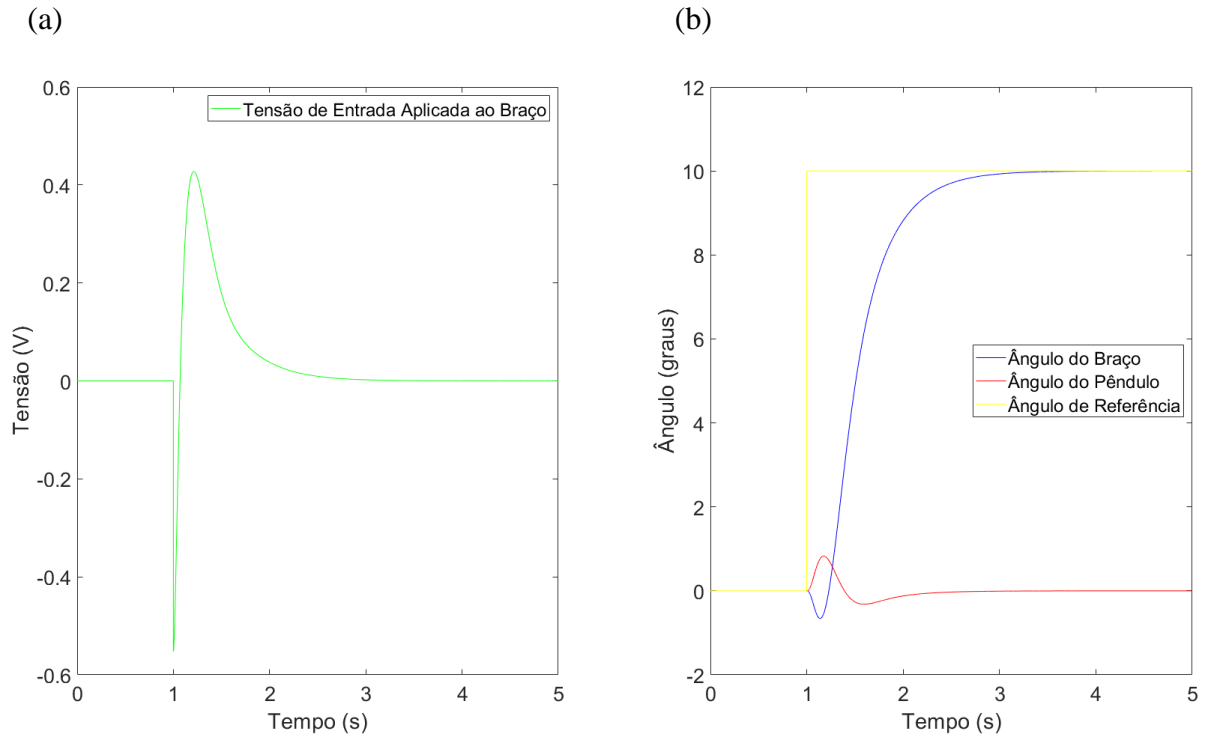
Figura 35 – Diagrama de Blocos do Controle de Rastreamento.



Fonte: Autor.

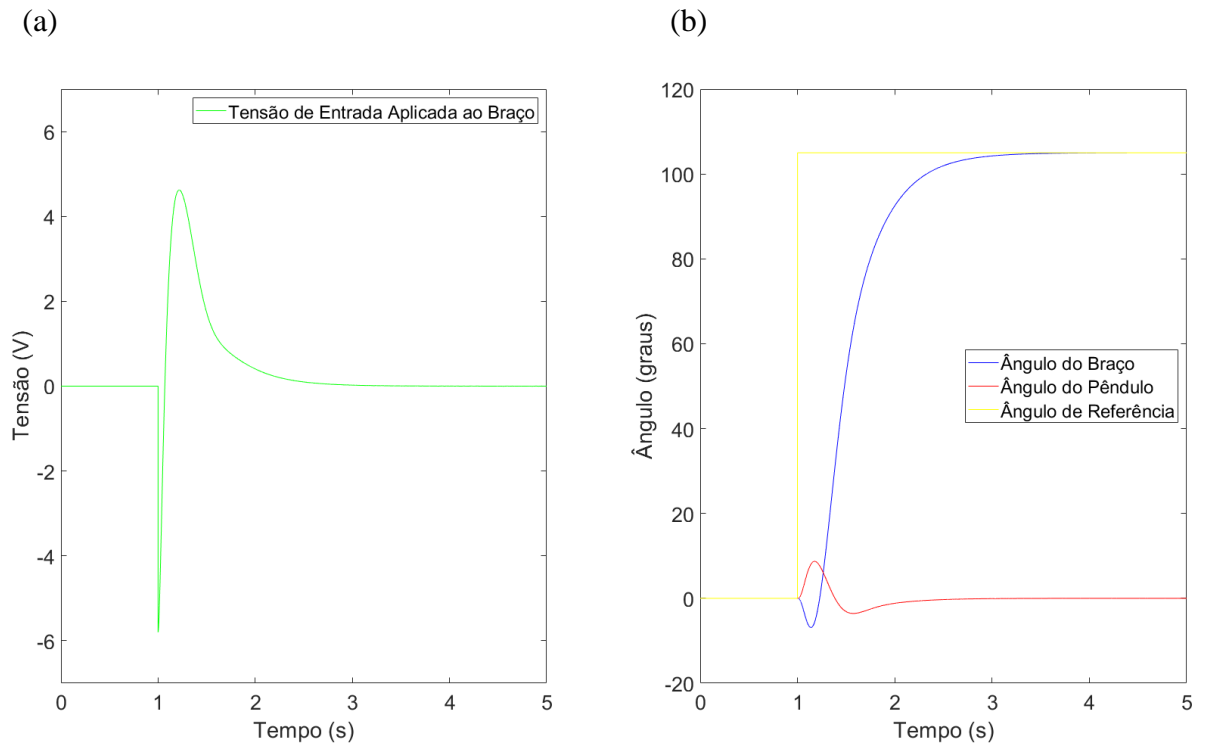
No controle servo aplicado ao sistema, o valor de referência que será alterado corresponde à posição angular do braço do sistema, θ_0 . Nas Figuras 36 e 37, é possível visualizar a resposta do sistema controlado quando o valor de referência é alterado de 0 para 10 e 105 graus. O valor de 105 graus foi escolhido pois é a referência máxima que pode ser utilizada, já que com esse valor, a tensão de entrada no atuador tem seu pico em torno de 6 V, para valores acima dessa referência, será necessário utilizar um atuador mais robusto.

Figura 36 – (a) Tensão de Entrada Aplicada ao Braço. (b) Resposta do Sistema com Controle Servo para Referência 10°.



Fonte: Autor.

Figura 37 – (a) Tensão de Entrada Aplicada ao Braço. (b) Resposta do Sistema com Controle Servo para Referência 105°.



Fonte: Autor.

É possível perceber na resposta da referência de 10° que o braço do sistema é capaz de manter o equilíbrio, nesse caso, a amplitude máxima do pêndulo é $1,17^\circ$, já a tensão máxima no atuador foi de $0,55\text{ V}$. O sistema estabiliza completamente após aproximadamente 4 segundos.

Na resposta para a referência de 105° , é possível verificar que o braço do sistema também é capaz de realizar o movimento sem comprometer o equilíbrio do sistema, nesse caso, a amplitude máxima do pêndulo é $8,71^\circ$, já a tensão máxima no atuador foi de $5,79\text{ V}$. O sistema estabiliza completamente após aproximadamente 4 segundos.

Novamente, é possível se observar que o limite de movimento para se manter o equilíbrio é próximo de 105° , quando a referência escolhida é superior a 105° , o sistema não é capaz de retornar ao equilíbrio.

7 CONCLUSÕES

Nesse trabalho, o estudo acerca de um sistema de pêndulo invertido rotacional foi realizado através da modelagem de seus subsistemas mecânico e eletromecânico com posterior obtenção do sistema acoplado, a identificação dos parâmetros físicos foi efetuada por meio de experimentações e métodos matemáticos, a última fase do trabalho foi a síntese de um controlador para o modelo simulado através do método linear quadrático regulador.

A modelagem dos subsistemas de pêndulo invertido e motor de CC foi efetuada separadamente de acordo com as equações dinâmicas que regem seus comportamentos físicos. Após a modelagem, a obtenção dos parâmetros com base em um pêndulo invertido real foi realizada. Nessa fase do trabalho o objetivo é adquirir dados confiáveis embasados experimentalmente e matematicamente para que a resposta do modelo seja aproximada da resposta real. Após a coleta dos parâmetros, as respostas real e simulada do ângulo do pêndulo em um lançamento livre, sem distúrbios aplicados, foram comparadas graficamente para verificar se possuem um comportamento sistêmico, ou seja, são aproximadas. O resultado foi positivo, onde de três diferentes ângulos tanto a resposta real quanto a simulada possuem frequência, períodos e amplitudes aproximadas, comprovando, portanto, que o método de seleção dos parâmetros foi validado.

Após a etapa de modelagem, o sistema acoplado foi obtido através da relação entre torque no eixo do motor e a componente da constante do motor multiplicada pela corrente do circuito de armadura. Essa relação foi utilizada pois o torque no eixo do motor é igual ao torque de entrada no braço do pêndulo invertido. O sistema foi implementado no software Matlab Simulink, onde através de uma entrada de tensão no atuador do sistema, a resposta dos ângulos do braço e do pêndulo condizem com o experimento realizado em um pêndulo invertido real. Dessa forma, é possível comprovar que o modelo acoplado foi construído de forma correta pois reproduz o esperado de um sistema real.

Após a análise dos parâmetros identificados através da resposta real e simulada do pêndulo e também do comportamento do sistema de pêndulo invertido acoplado após aplicação de uma entrada de tensão, a matriz de ganho foi obtida para realização do controle LQR no sistema não linear. As matrizes Q e R da função de custo foram selecionadas visando minimizar o erro dos estados relacionados ao ângulo do pêndulo e maximizar a performance do sistema através de um maior esforço do atuador, respectivamente. O resultado foi satisfatório pois na planta em malha aberta o pêndulo se desestabiliza e cai, enquanto que na planta em malha

fechada o pêndulo permanece em equilíbrio mesmo após aplicações de distúrbios no controle regulador. Já no controle servo, foi possível estabelecer uma referência de modo que o braço do pêndulo realizou uma trajetória mantendo o pêndulo em equilíbrio. Essa etapa é crucial para determinação do controlador otimizado para a planta, visto que os parâmetros foram obtidos a partir de um sistema real, espera-se que o controlador simulado venha a ser satisfatório quando aplicado em uma planta real. Para aplicações onde o torque de distúrbio no pêndulo ou onde o ângulo de referência sejam maiores que, respectivamente, $0,025 \text{ Nm}$ e 105° , será necessário utilizar um motor com maior voltagem, já que em ambos os valores a tensão de entrada aplicada no braço é próxima ao limite do atuador.

Em resumo, o trabalho se propôs a apresentar a simulação de um sistema de pêndulo invertido rotacional com base em parâmetros de um sistema real, o resultado foi satisfatório pois as respostas condizem com o esperado de um pêndulo invertido real e o controle do sistema modelado foi capaz de manter o pêndulo em sua posição de equilíbrio.

7.1 Trabalhos Futuros

As seguintes sugestões para trabalhos futuros no tema foram levantadas ao decorrer do trabalho e embasadas nos resultados e conclusões.

- Obtenção do parâmetro de indutância do motor através de um método experimental;
- Obtenção do parâmetro de coeficiente de atrito viscoso no eixo do motor através de um método experimental alternativo;
- Obtenção de modelos a partir de outras estratégias de modelagem para comparação de resultados;
- Estudar um modelo de Pêndulo de Furuta que considere o atrito seco;
- Validação do controle em um pêndulo invertido real.

REFERÊNCIAS

AGUIRRE, L. A. **Fundamentos de Instrumentação**. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2013.

AMBROSE, R. O.; et al. **Mobile manipulation using NASA's robonaut**. In: Robotics and Automation, 2004. Proceedings. ICRA'04. 2004 IEEE International Conference on. IEEE, 2004. p. 2104-2109.

BIBBY, Joe. Robonaut 1. Disponível em <<https://robonaut.jsc.nasa.gov/R1/sub/mobility.asp>>, 2008. Acesso em: 26/01/2021.

BOBKO, N. **Estabilidade de Lyapunov e Propriedades globais para modelos de dinâmica viral**. 2010.

CAZZOLATO, B. S.; PRIME, Z. **On the dynamics of the Furuta pendulum**. Journal of Control Science and Engineering, v. 2011, 2011.

DUART, J. L.; et al. **Dynamic Modeling and Simulation of a Rotational Inverted Pendulum**. In: Journal of Physics: Conference Series. IOP Publishing, 2017. p. 012081.

HOUCK, A. C.; KATZSCHMANN, R. K.; SOUZA, J. A. **Furuta pendulum**. Department of Mechanical Engineering, Massachusetts Institute of Technology, v. 2, 2013.

HOWIMANPORN, S.; et al. **Design and implementation of PSO based LQR control for inverted pendulum through PLC**. In: System Integration (SII), 2016 IEEE/SICE International Symposium on. IEEE, 2016. p. 664-669.

INMAN, D. **Engineering Vibration**. 4 ed. New Jersey: Pearson, 2014.

KAJITA, S.; et al. **Biped walking stabilization based on linear inverted pendulum tracking**. In: Intelligent Robots and Systems (IROS), 2010 IEEE/RSJ International Conference on. IEEE, 2010. p. 4489-4496.

KWON, T.; HODGINS, J. **Control systems for human running using an inverted pendulum model and a reference motion capture sequence**. In: Proceedings of the 2010 ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation. Eurographics Association, 2010. p. 129-138.

MERIAM, J. L.; KRAIGE, L. G. **Engineering mechanics: dynamics**. John Wiley & Sons, 2009.

NATH, V.; MITRA, R. **Swing-up and control of Rotary Inverted Pendulum using pole placement with integrator**. In: 2014 Recent Advances in Engineering and Computational Sciences (RAECS). IEEE, 2014. p. 1-5.

NISE, N. S. **Control Systems Engineering**. 6 ed. New Jersey: John Wiley & Sons, 2011.

OGATA, K. **Modern control engineering**. 5 ed. New Jersey: Prentice Hall, 2010. Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall.

OLTEAN, S.; DUKA, A. **Balance control system using microcontrollers for a rotational inverted pendulum**. *Procedia Technology*, v. 12, p. 11-19, 2014.

SAINZAYA, G. et al. **LQR control with refined PID to balance rotary inverted pendulum with time-varying uncertainty**. In: 2017 International Conference on Fuzzy Theory and Its Applications (iFUZZY). IEEE, 2017. p. 1-6.

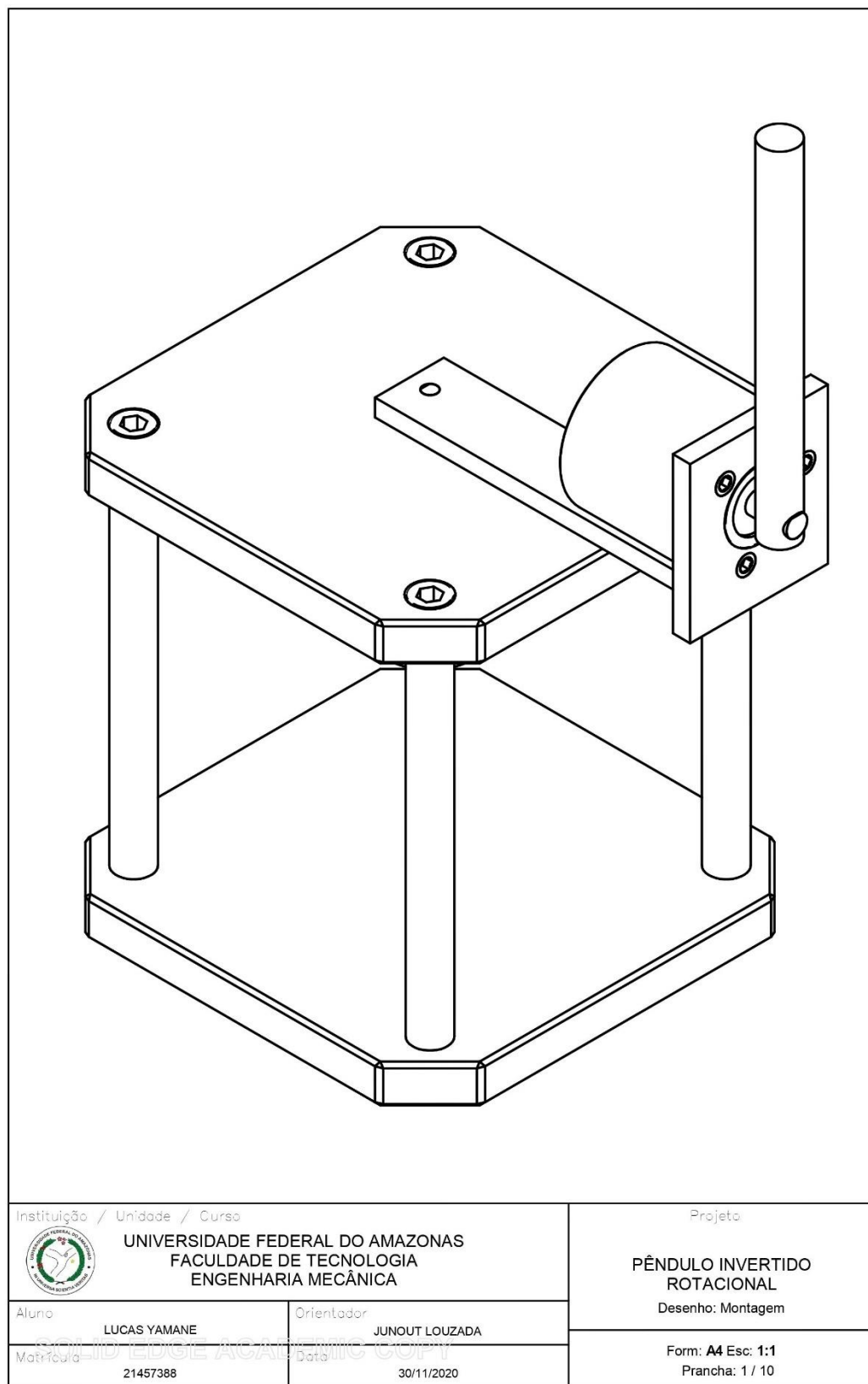
SIRISANTISAMRID, K.; et al. **LQR/PID Controller Design of PLC-based Inverted Pendulum**. In: *Proceedings of the International MultiConference of Engineers and Computer Scientists*. 2018.

TIRMANT, H.; et al. **B2, an alternative two wheeled vehicle for an automated urban transportation system**. In: *Intelligent Vehicle Symposium, 2002*. IEEE, 2002. p. 594-603.

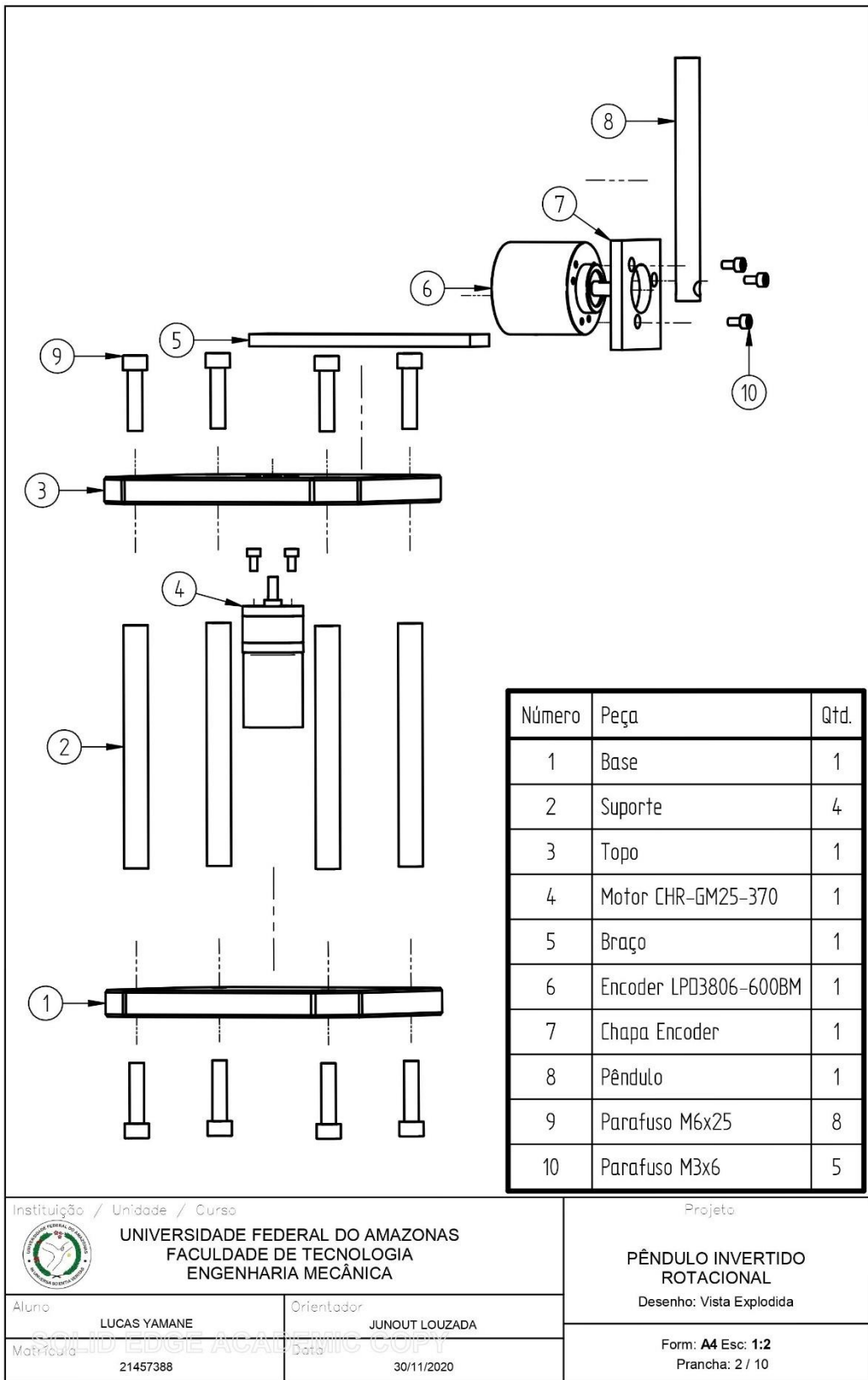
VENDRAMINI, G.; DA SILVA, P. S. **Controle de um Pêndulo Invertido sobre uma Plataforma Móvel Utilizando PID e MFAC (Model-Free Adaptive Control)**. In: *Proceeding of the 9th Brazilian Conference on Dynamics, Control and Their Applications (DINCON'10)*. 2010. p. 405-414.

APÊNDICES

APÊNDICE A – DESENHOS TÉCNICOS DO PÊNDBULO REAL



FORMATO ABNT: A4 210x297mm



Instituição / Unidade / Curso



UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
FACULDADE DE TECNOLOGIA
ENGENHARIA MECÂNICA

Aluno

LUCAS YAMANE

Orientador

JUNOUT LOUZADA

Matrícula

21457388

Data

30/11/2020

Projeto

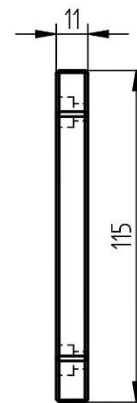
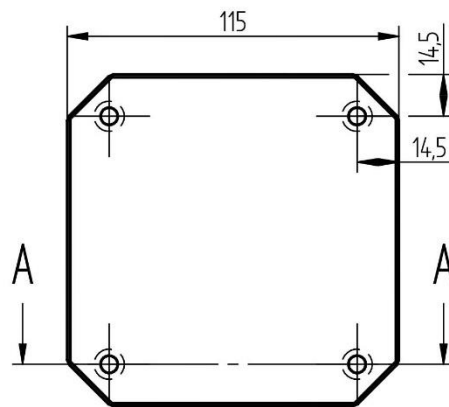
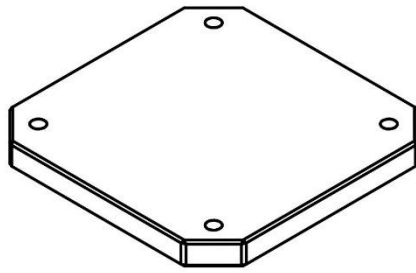
PÊNDULO INVERTIDO
ROTACIONAL


Desenho: Vista Explodida

Form: A4 Esc: 1:2

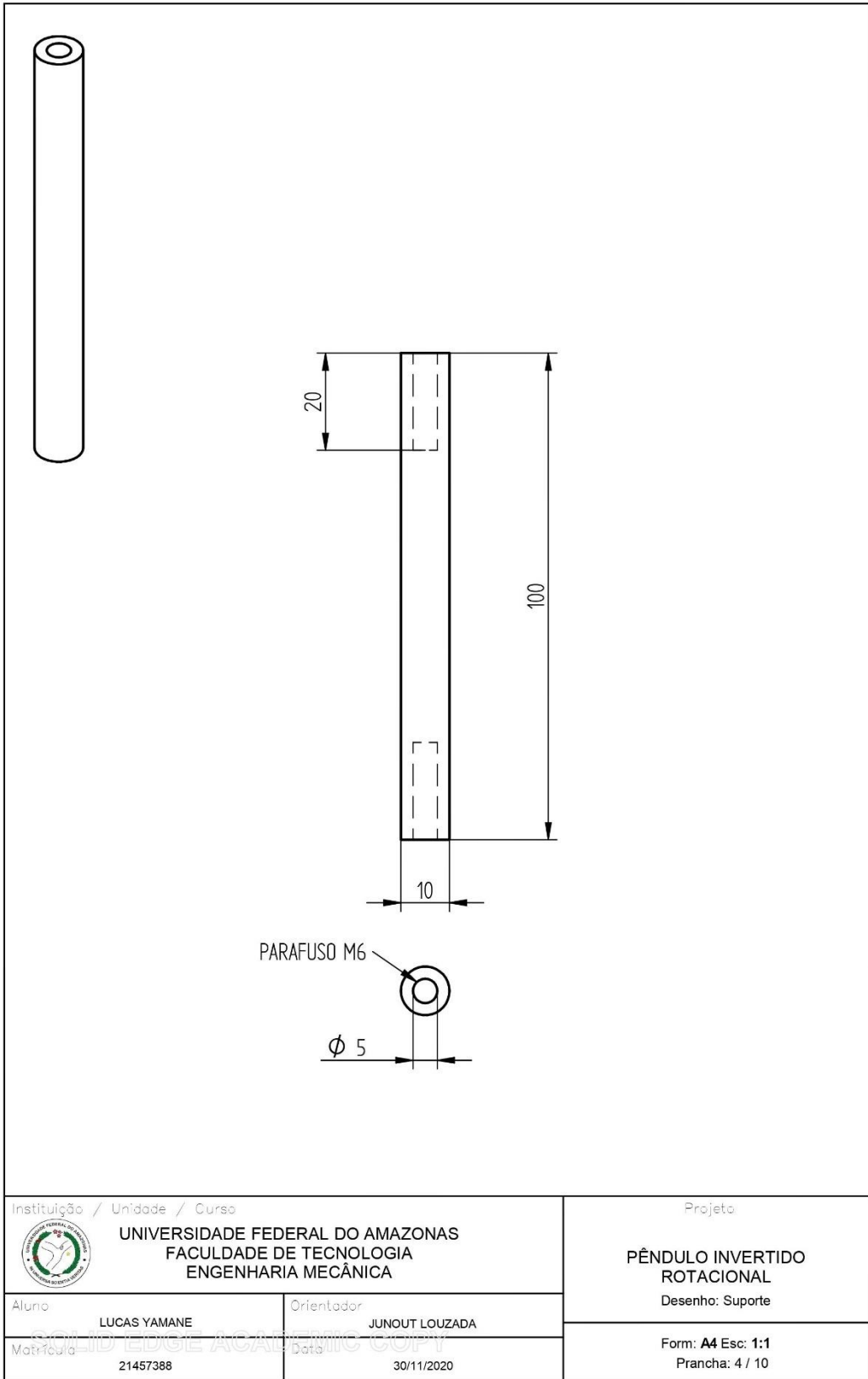
Prancha: 2 / 10

FORMATO ABNT: A4 210x297mm

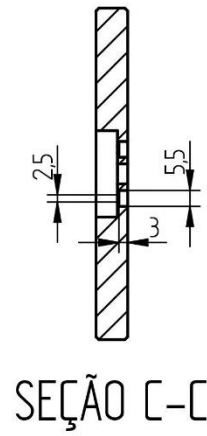
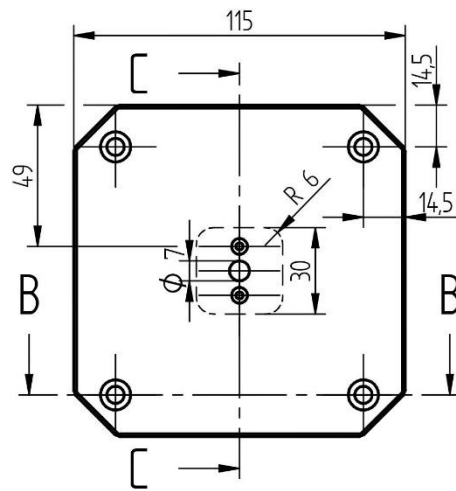
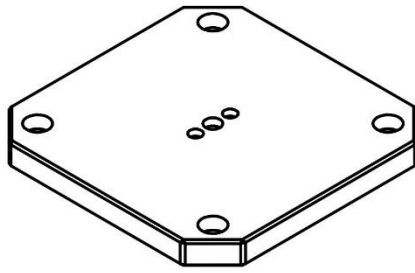



Instituição / Unidade / Curso  UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS FACULDADE DE TECNOLOGIA ENGENHARIA MECÂNICA		Projeto PÊNDULO INVERTIDO ROTACIONAL Desenho: Base
Aluno LUCAS YAMANE	Orientador JUNOUT LOUZADA	Form: A4 Esc: 1:2 Prancha: 3 / 10
Matrícula 21457388	Data 30/11/2020	

FORMATO ABNT: A4 210x297mm

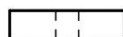
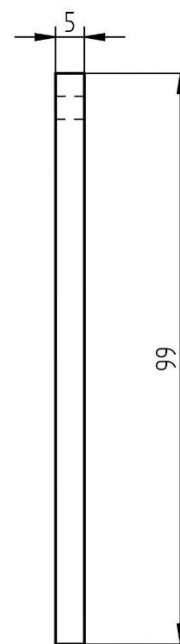
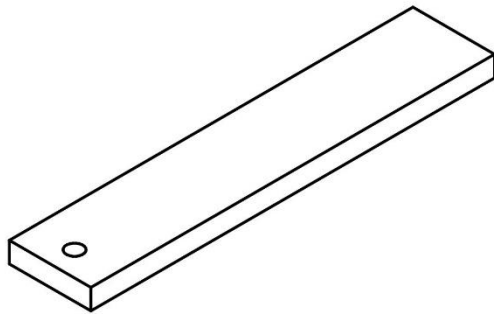



FORMATO ABNT: A4 210x297mm



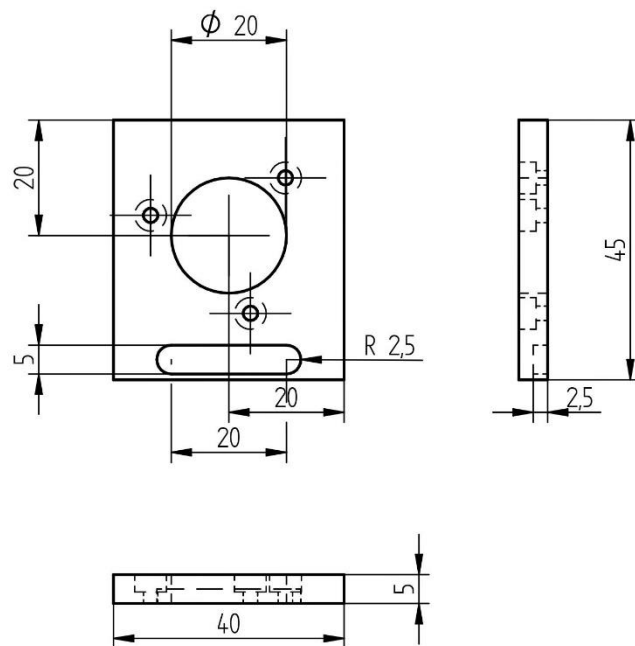
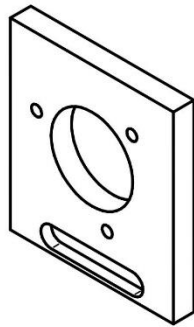
Instituição / Unidade / Curso  UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS FACULDADE DE TECNOLOGIA ENGENHARIA MECÂNICA		Projeto PÊNDULO INVERTIDO ROTACIONAL Desenho: Topo
Aluno LUCAS YAMANE	Orientador JUNOUT LOUZADA	Form: A4 Esc: 1:2 Prancha: 5 / 10
Matrícula 21457388	Data 30/11/2020	


FORMATO ABNT: A4 210x297mm



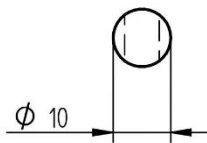
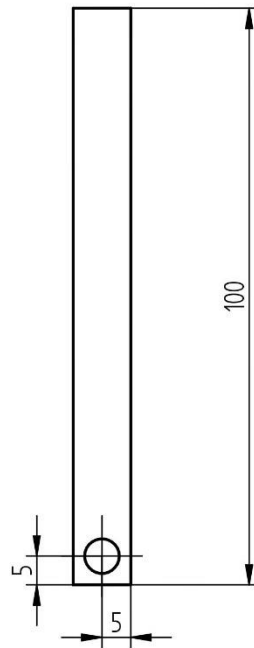
Instituição / Unidade / Curso  UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS FACULDADE DE TECNOLOGIA ENGENHARIA MECÂNICA		Projeto PÊNDULO INVERTIDO ROTACIONAL Desenho: Chapa do Motor
Aluno LUCAS YAMANE	Orientador JUNOUT LOUZADA	Form: A4 Esc: 1:1 Prancha: 6 / 10
Matrícula 21457388	Data 30/11/2020	


FORMATO ABNT: A4 210x297mm



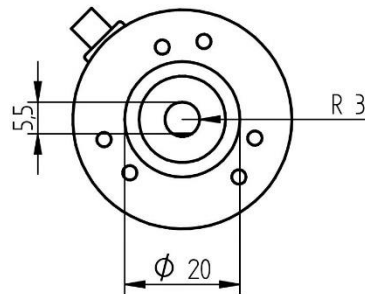
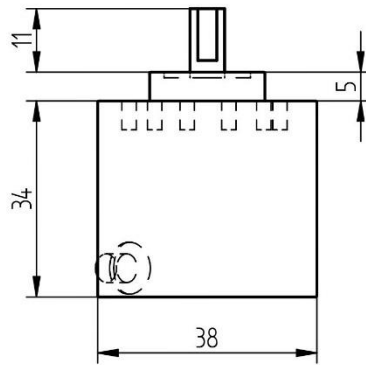
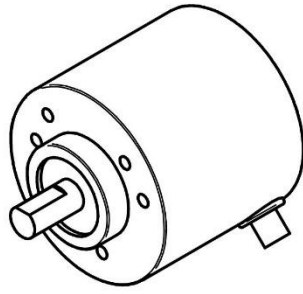
Instituição / Unidade / Curso  UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS FACULDADE DE TECNOLOGIA ENGENHARIA MECÂNICA		Projeto PÊNDULO INVERTIDO ROTACIONAL Desenho: Chapa do Encoder
Aluno LUCAS YAMANE	Orientador JUNOUT LOUZADA	Form: A4 Esc: 1:1 Prancha: 7 / 10
Matrícula 21457388	Data 30/11/2020	


FORMATO ABNT: A4 210x297mm



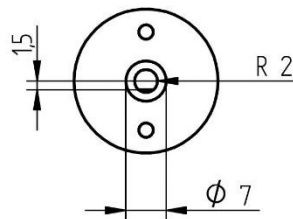
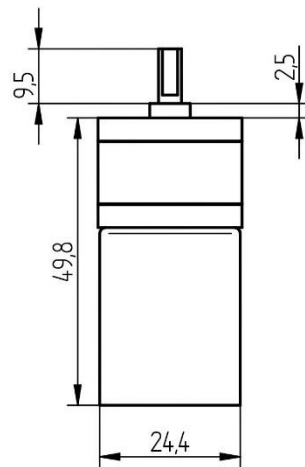
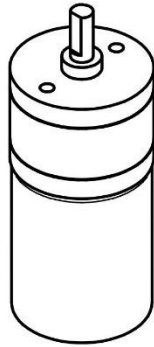
Instituição / Unidade / Curso  UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS FACULDADE DE TECNOLOGIA ENGENHARIA MECÂNICA		Projeto PÊNDULO INVERTIDO ROTACIONAL Desenho: Pêndulo
Aluno LUCAS YAMANE	Orientador JUNOUT LOUZADA	Form: A4 Esc: 1:1 Prancha: 8 / 10
Matrícula 21457388	Data 30/11/2020	


FORMATO ABNT: A4 210x297mm



Instituição / Unidade / Curso  UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS FACULDADE DE TECNOLOGIA ENGENHARIA MECÂNICA		Projeto PÊNDULO INVERTIDO ROTACIONAL Desenho: Encoder
Aluno LUCAS YAMANE	Orientador JUNOUT LOUZADA	Form: A4 Esc: 1:1 Prancha: 9 / 10
Matrícula 21457388	Data 30/11/2020	

FORMATO ABNT: A4 210x297mm



Instituição / Unidade / Curso  UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS FACULDADE DE TECNOLOGIA ENGENHARIA MECÂNICA		Projeto PÊNDULO INVERTIDO ROTACIONAL Desenho: Motor
Aluno LUCAS YAMANE	Orientador JUNOUT LOUZADA	Form: A4 Esc: 1:1 Prancha: 10 / 10
Matrícula 21457388	Data 30/11/2020	

FORMATO ABNT: A4 210x297mm

APÊNDICE B – CÓDIGO ARDUINO PARA AQUISIÇÃO DE DADOS DO SISTEMA REAL

```
volatile unsigned int temp0, counter0 = 30000; // This variable will increase or
decrease depending on the rotation of the arm encoder
volatile unsigned int temp1, counter1 = 30000; // This variable will increase or
decrease depending on the rotation of the pendulum encoder
int initial = 30000;
// Arm encoder variables
double Time0=0;
float angle0=0;
double previousAngle0;
double previousTime0;
double h0;
// Pendulum encoder variables
double Time1=0;
float angle1=0;
double previousAngle1;
double previousTime1;
double h1;
// Motor voltage input reading
const float referenceVolts = 5.0; // Standard voltage of the Arduino
const int sourcePin = 0; // Source connected to analog pin 0

void setup() {
  Serial.begin (9600);
  pinMode(21, INPUT_PULLUP); // Internal pullup input pin 21 (A channel, arm encoder
- YELLOW)
  pinMode(20, INPUT_PULLUP); // Internal pullup input pin 20 (B channel, arm encoder
- GREEN)
  pinMode(2, INPUT_PULLUP); // Internal pullup input pin 2 (A channel, pendulum
encoder - WHITE)
  pinMode(3, INPUT_PULLUP); // Internal pullup input pin 3 (B channel, pendulum
encoder - GREEN)

  // Setting up interrupt for arm encoder
  // A rising pulse from encoder activated ai2(). AttachInterrupt 2 - DigitalPin 21
on Arduino MEGA
  attachInterrupt(2, ai2, RISING);
  // B rising pulse from encoder activated ai3(). AttachInterrupt 3 - DigitalPin 20
on Arduino MEGA
  attachInterrupt(3, ai3, RISING);

  // Setting up interrupt for pendulum encoder
  // A rising pulse from encoder activated ai0(). AttachInterrupt 0 - DigitalPin 2
on Arduino MEGA.
  attachInterrupt(0, ai0, RISING);
  // B rising pulse from encoder activated ai1(). AttachInterrupt 1 - DigitalPin 3
on Arduino MEGA.
```



```

    attachInterrupt(1, ai1, RISING);
}

// For arm encoder reading
void ai2() {
    // ai2 is activated if DigitalPin 21 is going from LOW to HIGH
    // Check pin 20 to determine the direction
    if(digitalRead(20)==LOW) {
        counter0++;
    }else{
        counter0--;
    }
}

void ai3() {
    // ai3 is activated if DigitalPin 20 is going from LOW to HIGH
    // Check with pin 21 to determine the direction
    if(digitalRead(21)==LOW) {
        counter0--;
    }else{
        counter0++;
    }
}

// For pendulum encoder reading
void ai0() {
    // ai0 is activated if DigitalPin 2 is going from LOW to HIGH
    // Check pin 3 to determine the direction
    if(digitalRead(3)==LOW) {
        counter1++;
    }else{
        counter1--;
    }
}

void ai1() {
    // ai0 is activated if DigitalPin 3 is going from LOW to HIGH
    // Check with pin 2 to determine the direction
    if(digitalRead(2)==LOW) {
        counter1--;
    }else{
        counter1++;
    }
}

void loop() {

```

```

// For pendulum encoder
previousAngle1=angle1;
previousTime1=Time1;
Time1=millis();
h1=(Time1-previousTime1)/1000.0;
// Send the value of counter
if(counter1>=30000){
  angle1=((counter1-initial)*0.3);
}else if(counter1<=30000){
  angle1=((initial-counter1)*-0.3);
}
// For arm encoder
previousAngle0=angle0;
previousTime0=Time0;
Time0=millis();
h0=(Time0-previousTime0)/1000.0;
// Send the value of counter
if(counter0>=30000){
  angle0=((counter0-initial)*0.8);
}else if(counter0<=30000){
  angle0=((initial-counter0)*-0.8);
}
double w0=(angle0-previousAngle0)*0.017453292/h0; // Rotational speed calculation
int sensorvalue=analogRead(sourcePin); // Sensor reading
float V=(sensorvalue/1023.0)*referenceVolts; // Voltage calculation
double w1=(angle1-previousAngle1)*0.017453292/h1; // Rotational speed calculation
Serial.print (angle0);
Serial.print ("\t\t");
Serial.print (w0,5);
Serial.print ("\t\t");
Serial.print (V);
Serial.print ("\t\t");
Serial.print (Time0/1000,3);
Serial.print ("\t\t\t\t");
Serial.print (angle1);
Serial.print ("\t\t");
Serial.print (w1,5);
Serial.print ("\t\t");
Serial.println (Time1/1000,3);
}

```

ANEXOS

ANEXO A – FOLHA DE ESPECIFICAÇÕES DO MOTOR CHR-GM25-370

TT MOTOR (HK) INDUSTRIAL CO., LTD

GM25-370CA

25mm gearbox plus 370 & 320 permanent magnet DC motor and TEC2419 brushless motor

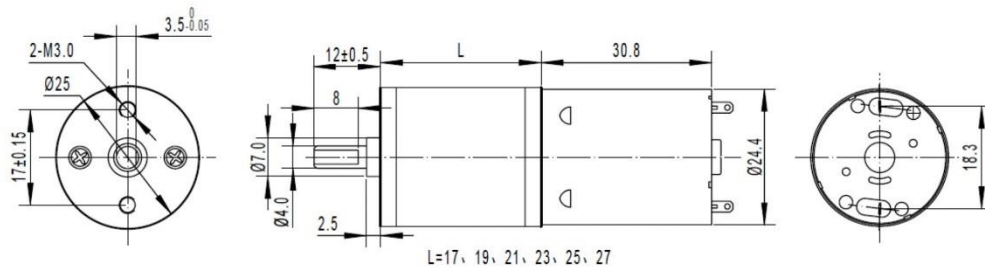
Characters:

1. Small size dc gear motor with low speed and big torque
2. 25mm gear motor provide 0.5Nm torque and more reliable
3. Suitable to small diameter, low noise and big torque application
4. Dc Gear motors can match encoder, 3ppr、12ppr
5. Reduction Ratio: 4、10、21、34、45、47、78、103、130、172、227、378、499

PMDC Dc Gear Motor



Gear Motor Dimensions (mm)



Motor Technical Data

Type	Rated voltage	No-load speed	No-load current	Rated speed	Rated torque	Rated current	Output power	Stall torque	Stall current
	VDC	r/min	mA	r/min	g.cm	mA	W	g.cm	A
TRK-370CA-22170	6	5600	50	4800	24	300	1.18	186	2.1
TRK-370CA-15360	12	5600	25	4800	24	160	1.18	186	1.06
TRK-370CA-12560	12	3700	20	3000	20	90	0.62	125	0.46

Gear motor Technical Data

Gearbox with motor: GM25-370CA-22170-XXX

Reduction ratio	4	10	21	34	47	78	103	130	227	499
Length mm	17	19	19	21	21	23	23	25	25	27
No-load speed rpm	1280	510	245	150	110	68	50	42	24	11
Rated speed rpm	1200	480	230	137	102	62	47	37	21	10
Rated torque kg.cm	0.06	0.15	0.3	0.5	0.7	1.1	1.5	1.7	2.7	5
Max.momentary tolerance torque kg.cm	0.45	1.1	2.3	3.9	5.2	10	10	10	10	10

Gearbox with motor: GM25-370CA-15360-XXX

Reduction ratio	4	10	21	34	47	78	103	130	227	499
Length mm	17	19	19	21	21	23	23	25	25	27
No-load speed rpm	1280	510	245	150	110	68	50	42	24	11
Rated speed rpm	1200	480	230	137	102	62	47	37	21	10
Rated torque kg.cm	0.06	0.15	0.3	0.5	0.7	1.1	1.5	1.7	2.7	5
Max.momentary tolerance torque kg.cm	0.45	1.1	2.3	3.9	5.2	10	10	10	10	10

TT MOTOR (HK) INDUSTRIAL CO., LTD.

Tel:0755-82501271

Fax: 0755-82501105

www.ttmotor.com

ttmotor@ttmotor.com

TT MOTOR (HK) INDUSTRIAL CO., LTD

Gearbox with motor: GM25-370CA-12560-XXX

Reduction ratio	4	10	21	34	47	78	103	130	227	499
Length mm	17	19	19	21	21	23	23	25	25	27
No-load speed rpm	850	340	165	100	75	48	34	27	16	7
Rated speed rpm	750	300	145	86	64	38	29	23	13	6
Rated torque kg.cm	0.05	0.12	0.26	0.4	0.6	0.9	1.2	1.4	2.5	5
Max.momentary tolerance torque kg.cm	0.3	0.75	1.5	2.6	3.5	10	10	10	10	10

TT MOTOR (HK) INDUSTRIAL CO., LTD.

Tel:0755-82501271

Fax: 0755-82501105

www.ttmotor.com

ttmotor@ttmotor.com

ANEXO B – FOLHA DE ESPECIFICAÇÕES DO ENCODER LPD3806-360BM

CHINA SANFENG ENCODER CO.,LTD

PIB38 series



E: Voltage output
 C: Open collector output
 F: Complementary output(Push pull)
 L: Line driver Output
 T: Line driver (high TTL)

Explanation of model



E: Axial cable
 G: Radial cable

For example

PIB38-6--1024-G05E is shaft diameter $\Phi 6$, 1024P/R, side entry cable, supply voltage 5V, voltage output .

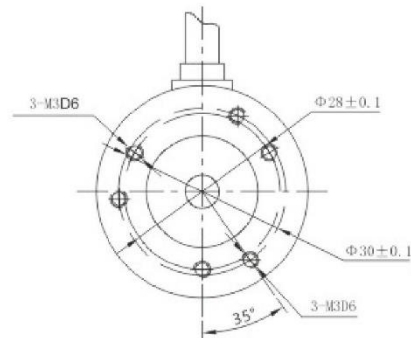
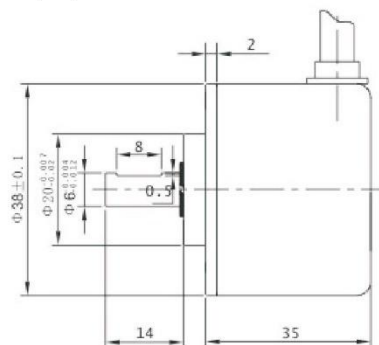
Technical data

Resolution	100-5000P/R	Rotating inertia	$3.5 \times 10^{-6} \text{kg} \cdot \text{m}^2$
Supply voltage	DC5V or DC 10V~30V	Max rotating speed	6000r/min
V_H Output voltage	$\geq V_{CC} \times 70\%$	Vibration resistance	50m/s^2 (10 ~ 200Hz) (XYZ each direction 2hours)
V_L Output voltage	$\leq 0.5 \text{V}$	Shock resistance	980m/s^2 (XYZ each direction 2times) last 6mS
Current consumption	$\leq 150 \text{mA}$	Protection	IP65
Output phase	A. B. Z	Operating temperature	-10°C ~ +70°C
Frequency response	100kHz Max	Storage temperature	-20°C ~ +80°C
Rise/fall time	$\leq 1 \mu\text{s}$ or line drivers $\leq 0.1 \mu\text{s}$	Operating humidity	30 ~ 85%RH
Starting torque	$3 \times 10^{-3} \text{N} \cdot \text{m}$ (+25°C)	Weight (no cable)	0.3kg
Shaft loading	Radial 40N Axial 20N	Accessories	

Connection table

cable color		Red	Black	White	Green	Yellow	Blue	Orange	Brown	Shield
		C/E/F	VCC	0V	A	B	Z	—	—	—
	P/L/D/H/M	VCC	0V	A	B	Z	\bar{A}	\bar{B}	\bar{Z}	FG
7PIN	CX16K7P plug	1	7	3	4	5	—	—	—	6
9PIN	CX16K9P plug	4	3	1	2	5	8	9	6	7

Dimension(mm)



WWW.SFENCODER.COM