



UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
FACULDADE DE TECNOLOGIA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA



KAMILLA CERDEIRA DE OLIVEIRA

**Identificação de Sistemas e Controle Ótimo para a Dinâmica da
Covid-19 no Estado do Amazonas**

Manaus

2021

KAMILLA CERDEIRA DE OLIVEIRA

**Identificação de Sistemas e Controle Ótimo para a Dinâmica da
Covid-19 no Estado do Amazonas**

Versão Corrigida

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Tecnologia da Universidade Federal do Amazonas como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Gustavo Cunha da Silva Neto

Manaus

2021

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Oliveira, Kamilla Cerdeira de
O48i Identificação de sistemas e controle ótimo para a dinâmica da
Covid-19 no Estado do Amazonas / Kamilla Cerdeira de Oliveira .
2021
95 f.: il. color; 31 cm.

Orientador: Gustavo Cunha da Silva Neto
TCC de Graduação (Engenharia Mecânica) - Universidade
Federal do Amazonas.

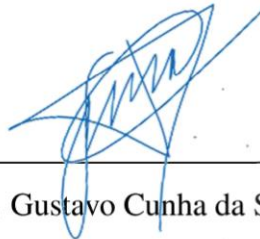
1. Controle Ótimo. 2. Princípio de Pontryagin. 3. Modelos
Epidemiológicos. 4. Identificação de Sistemas. 5. Covid-19 no
Amazonas. I. Silva Neto, Gustavo Cunha da. II. Universidade
Federal do Amazonas III. Título

Identificação de Sistemas e Controle Ótimo para a Dinâmica da Covid-19 no Estado do Amazonas

KAMILLA CERDEIRA DE OLIVEIRA

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) apresentado à Faculdade de Tecnologia da Universidade Federal do Amazonas como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Mecânica.

Aprovada por:



Prof. Dr. Gustavo Cunha da Silva Neto
Orientador (DEMEC/UFAM)



Prof. Dr. Danilo de Santana Chui
Membro (DEMEC/UFAM)



Prof. Dr. Flávio Celso Trigo
Membro (EPUSP)

Manaus-AM, 05 de julho de 2021.

À minha família,
dedico.

AGRADECIMENTOS

A meus pais, Reny e Zezildo, que sempre apoiaram minhas decisões e não mediram esforços para que eu pudesse ter acesso à educação. Sem vocês, nada disso seria possível.

À minha irmã Izabel, que assim como meus pais, me apoiou e auxiliou durante minha trajetória dentro e fora da universidade.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Gustavo Neto, por todo o auxílio, paciência e conselhos durante este período. Obrigada por não ter recusado o convite, tenho plena convicção de que não poderia ter recebido melhor orientação neste trabalho.

Ao Edu, por ouvir meus desabafos e por não ter permitido que eu desistisse.

Ao grupo de pesquisa IMACS, por todo incentivo durante os seminários.

Aos meus colegas da faculdade, pelas conversas e desabafos.

À Universidade Federal do Amazonas, por possibilitar a realização deste curso.

A todos que contribuíram direta ou indiretamente para realização deste trabalho.

“Essentially, all models are wrong, but some are useful.”

(George E.P. Box)

RESUMO

CERDEIRA DE OLIVEIRA, Kamilla. **Identificação de Sistemas e Controle Ótimo para a Dinâmica da Covid-19 no Estado do Amazonas. 2021. 95f.** Trabalho de Conclusão de Curso (Engenharia Mecânica) - Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2021.

Este trabalho tem como objetivo obter um controle ótimo para dois modelos epidemiológicos da pandemia da Covid-19 no Estado do Amazonas. Para isso, buscou-se inicialmente identificar os modelos matemáticos que descrevessem a dinâmica de propagação do coronavírus no estado. Para a identificação, foram escolhidos os modelos SIR e SIRD, cujos parâmetros foram estimados utilizando o Método dos Mínimos Quadrados para diferentes cenários: agosto a novembro de 2020, janeiro de 2021 e março de 2021. Com os parâmetros estimados, foi formulado o Problema de Controle Ótimo e o índice de desempenho foi escolhido visando a redução do custo associado aos infectados, aos óbitos e ao controle. A caracterização da solução ótima foi realizada por meio da abordagem do Princípio de Pontryagin, restringindo o tempo final do horizonte de controle. Por fim, foi obtida a solução numérica das equações dos estados e coestados por meio do método de varredura de avanço e retorno.

Palavras-chave: Controle Ótimo, Princípio de Pontryagin, Modelos Epidemiológicos, Identificação de Sistemas, Covid-19 no Amazonas.

ABSTRACT

CERDEIRA DE OLIVEIRA, Kamilla. **System Identification and Optimal Control for COVID-19 Epidemiological Dynamics in the State of Amazonas. 2021. 95f.** Undergraduate thesis (Mechanical Engineering) - Federal University of Amazonas, Manaus, 2021.

This work aims to obtain an optimal control for two epidemiological models of the COVID-19 pandemic in the State of Amazonas. First, it was identified two mathematical models that describes the dynamics of coronavirus propagation in the state. For identification, the models SIR and SIRD were chosen, whose parameters were estimated using the Least Squares Method for different scenarios: August to November 2020, January 2021 and March 2021. After the parameters estimation, the Optimal Control Problem was formulated and the performance index was chosen to minimize the cost associated to the infected, deaths and control. The characterization of the optimal solution was accomplished by using the Pontryagin Principle approach, restricting the final time of the control horizon. Finally, the numerical solutions of state and co-state equations were obtained applying the forward and backward sweep method.

Keywords: Optimal Control, Pontryagin Principle, Epidemiological Model, System Identification, COVID-19 in Amazonas.

RÉSUMÉ

CERDEIRA DE OLIVEIRA, Kamilla. **Identification des Systèmes et Commande Optimale pour la Dynamique Épidémiologique du Covid-19 dans l'État d'Amazonas. 2021. 95f.** Travail de Fin d'Études (Génie Mécanique) - Université Fédérale d'Amazonas, 2021.

Ce travail vise à obtenir une commande optimale pour deux modèles épidémiologiques de la pandémie du Covid-19 dans l'État d'Amazonas. Tout d'abord, on a été identifié deux modèles mathématiques qui décrivent la dynamique de propagation du coronavirus dans l'État. Pour l'identification, les modèles SIR et SIRD ont été choisis, dont les paramètres ont été estimés à l'aide de la méthode des moindres carrés pour différents scénarios: août à novembre 2020, janvier 2021 et mars 2021. Avec les paramètres estimés, le problème de commande optimale a été formulé et le critère de performance a été choisi pour minimiser le coût associé aux personnes infectées, aux décès et au contrôle. La caractérisation de la solution optimale a été réalisée en utilisant l'approche du Principe de Pontriaguine, en imposant le temps final de l'horizon de commande. Enfin, les solutions numériques des équations d'états et des variables adjointes ont été obtenues en appliquant la méthode de balayage en avant et en arrière.

Mots Clés: Commande Optimale, Principe de Pontriaguine, Modèle Épidémiologique, Identification des Systèmes, Covid-19 dans l'Amazonas.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

1	Diagrama de blocos do modelo MSEIRS.	26
2	Diagrama Modelo SIR.	27
3	Diagrama Modelo SIRD.	30
4	Índice de Isolamento Social.	62
5	Total de casos de COVID-19 acumulados e a cronologia dos eventos ocorridos no Amazonas de março de 2020 a abril de 2021.	62
6	Quantidade de testes realizados por dia: Teste Rápido.	63
7	Quantidade de testes realizados por dia: RT - PCR.	63
8	Comparação entre suscetíveis $S(t)$ estimados para os três cenários de identificação do modelo SIR e, em roxo, os dados reais dos suscetíveis.	66
9	Comparação entre infectados $I(t)$ estimados para os três cenários de identificação do modelo SIR e, em roxo, os dados reais dos infectados.	66
10	Comparação entre removidos $R(t)$ estimados para os três cenários de identificação do modelo SIR e, em roxo, os dados reais dos removidos (somatório de recuperados e óbitos).	67
11	Comparação entre casos $C(t)$ estimados para os três cenários de identificação do modelo SIR e, em roxo, os dados reais dos casos confirmados.	68
12	Comparação entre recuperados $I(t)$ estimados para os três cenários de identificação do modelo SIRD e, em roxo, os dados reais dos recuperado.	70
13	Comparação entre óbitos $D(t)$ estimados para os três cenários de identificação do modelo SIRD e, em roxo, os dados reais dos óbitos confirmados.	70
14	Comparação entre casos $C(t)$ estimados para três cenários de identificação do modelo SIRD e, em roxo, os dados reais dos casos confirmados.	71
15	Validação Modelo SIR - Suscetíveis.	72
16	Validação Modelo SIR - Infectados.	72

17	Validação Modelo SIR - Removidos.	73
18	Validação Modelo SIRD - Suscetíveis.	74
19	Validação Modelo SIRD - Infectados.	75
20	Validação Modelo SIRD - Recuperados.	75
21	Validação Modelo SIRD - Óbitos.	76
22	Gráfico de Suscetíveis sem e com Controle Ótimo - Modelo SIR. . . .	78
23	Gráfico de Infectados sem e com Controle Ótimo - Modelo SIR. . . .	78
24	Gráfico de Recuperados sem e com Controle Ótimo - Modelo SIR. . .	79
25	Gráfico de Suscetíveis sem e com Controle Ótimo - Modelo SIRD. . .	80
26	Gráfico de Infectados sem e com Controle Ótimo - Modelo SIRD. . .	80
27	Gráfico de Recuperados sem e com Controle Ótimo - Modelo SIRD. .	81
28	Gráfico de Óbitos sem e com Controle Ótimo - Modelo SIRD.	81

LISTA DE TABELAS

1	Cenários de identificação separados por objetivo de utilização.	52
2	Parâmetros estimados para diferentes cenários - Modelo SIR.	65
3	Comparativo do total de casos final estimados entre os três cenários definidos.	68
4	Parâmetros estimados em diferentes cenários - Modelo SIRD.	69
5	Comparativo total de casos e óbitos - Modelo SIRD.	71
6	Índice de ajuste baseado no NMSE entre os dados estimados e os dados de reais - Modelo SIR.	74
7	Índice de ajuste baseado no NMSE entre os dados estimados e os dados de reais - Modelo SIRD.	76
8	Parâmetros estimados no período de validação.	76
9	Constantes utilizadas no PCO.	77
10	Comparação do modelo SIR sem e com Controle Ótimo no intervalo de 365 dias.	79
11	Comparação do modelo SIRD sem e com Controle Ótimo no intervalo de 365 dias.	82
12	Total de vacinados dos modelos SIR e SIRD identificados para março de 2021.	82
13	Índice de desempenho para os modelos SIR e SIRD sujeito aos parâmetros estimados no mês de março de 2021.	83

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

IA	Índice de Ajuste
MIMO	Multiple Input - Multiple Output
MMQ	Método dos Mínimos Quadrados
NMSE	Erro Quadrático Médio Normalizado
PCO	Problema de Controle Ótimo
RK	Runge-Kutta
SARS-CoV-2	Coronavírus 2 da síndrome respiratória aguda grave
SEIR	Suscetíveis-Expostos-Infectados-Removidos
SIR	Suscetíveis-Infectados-Removidos
SIRD	Suscetíveis-Infectados-Removidos-Óbitos
SRAG	Síndrome Respiratória Aguda Grave

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	Objetivos	16
1.1.1	Objetivo geral	16
1.1.2	Objetivos específicos	16
1.2	Descrição do trabalho	17
2	REVISÃO DA LITERATURA	18
3	MODELOS EPIDEMIOLÓGICOS	24
3.1	Modelo SIR	26
3.2	Modelo SIRD	30
4	CONTROLE ÓTIMO	32
4.1	Índice de Desempenho	33
4.2	Problema do Controle Ótimo	34
4.3	Princípio de Pontryagin	35
4.4	Método de Varredura de Avanço e Retorno	40
5	COVID-19 NO AMAZONAS	47
5.1	Identificação e validação do modelo	48
5.2	Controle Ótimo em Modelos Epidemiológicos	52
5.2.1	Modelo SIR	52
5.2.2	Modelo SIRD	58
6	RESULTADOS	61

6.1	Estimação dos parâmetros	61
6.1.1	Modelo SIR	64
6.1.2	Modelo SIRD	68
6.2	Validação dos modelos	71
6.2.1	Modelo SIR	71
6.2.2	Modelo SIRD	73
6.3	Vacinação Ótima	77
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	84
7.1	Conclusões	84
7.2	Sugestões para trabalhos futuros	86
	Referências	87
	Apêndice A	90
	Apêndice B	92

1 INTRODUÇÃO

A Teoria do Controle Ótimo é uma vertente de estudo dentro do controle moderno cujo objetivo é solucionar o Problema de Controle Ótimo (PCO). Esse problema consiste em minimizar um determinado índice de desempenho J sujeito a um sistema de equações diferenciais, suas restrições e condições de contorno. Para solucionar o PCO, diversas abordagens foram desenvolvidas, entre elas o Princípio de Pontryagin, o qual fornece uma condição necessária para que o sistema seja ótimo (GRASS et al., 2008). Para resolver este problema de otimização, é necessário: o modelo matemático, a especificação do índice de desempenho e a definição das restrições físicas e condições de controle do sistema estudado. A definição do modelo matemático é composta pela modelagem e identificação dos parâmetros do modelo. Segundo Coelho (2004), define-se modelagem e identificação como a determinação do modelo matemático de um sistema, representando seus aspectos essenciais de forma adequada para uma utilização particular.

A interdisciplinaridade do controle ótimo permite sua aplicação em diversas áreas e uma delas é no estudo de modelos epidemiológicos. Esses modelos tem como objetivo descrever a dinâmica de propagação de doenças infecciosas e são chamados de modelos compartimentais pois dividem a população total em classes. Um dos modelos mais utilizados é o modelo SIR, o qual divide a população em três compartimentos: indivíduos suscetíveis, indivíduos infectados e indivíduos removidos ou recuperados. A partir deste modelo, outras configurações de compartimentos podem ser propostas, a exemplo disso, o modelo SIRD, o qual acrescenta o compartimento D representando os óbitos pela doença na população. O controle para esta abordagem, normalmente, é utilizado como uma alternativa para reduzir o tempo de duração da epidemia ou reduzir o pico de infecção através de algumas estratégias de controle como isolamento social e vacinação. Em resumo, tratando-se de modelos epidemiológicos, identificar o modelo permite supervisionar o ritmo de propagação da doença, diagnosticar o estágio

da curva de infecção, analisar, propor técnicas de controle e otimizar o modelo.

Este trabalho consiste na identificação de dois modelos para a COVID-19 no Estado do Amazonas a partir de modelos compartimentais e na solução do Problema de Controle Ótimo para os modelos identificados. Para o caso da COVID-19 no Amazonas, o sistema dinâmico adotado tem seu comportamento descrito pelos modelos compartimentais SIR e SIRD. Ao identificar o modelo, é possível analisar e comparar o resultado dos parâmetros para diferentes cenários, avaliando o tempo de duração em que a doença se propaga, o pico da curva de infectados, total de casos e óbitos acumulados, etc. O PCO será solucionado a partir o tempo inicial e dos parâmetros do modelo mais recente entre os cenários propostos da identificação. Com o resultado numérico obtido, será apresentado e discutido os resultados entre as curvas estimadas e as curvas otimizadas.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo geral

Identificar dois modelos epidemiológicos para a pandemia da COVID-19 no Estado do Amazonas, a saber, SIR e SIRD, e obter um controle ótimo para a pandemia no estado por meio do Princípio de Pontryagin.

1.1.2 Objetivos específicos

- Estimar os parâmetros dos modelos epidemiológicos SIR e SIRD para a COVID-19 no Estado do Amazonas entre agosto de 2020 e março de 2021;
- Validar os modelos epidemiológicos identificados em comparação aos dados reais;
- Sintetizar um controle ótimo para o sistema dinâmico não-linear através do Princípio de Pontryagin para horizonte de controle de um ano;
- Simular e analisar os resultados para os modelos SIR e SIRD sem e com controle ótimo.

1.2 Descrição do trabalho

O trabalho está organizado da seguinte maneira: após a presente introdução, o Capítulo 2 traz uma revisão da literatura acerca da identificação dos modelos matemáticos em epidemiologia e de estratégias de controle em dinâmicas epidemiológicas. O Capítulo 3 explica os conceitos e como os modelos epidemiológicos SIR e SIRD são descritos. O Capítulo 4 introduz o Problema do Controle Ótimo, passando pela formulação do problema, pela abordagem utilizada no problema (Princípio de Pontryagin) e o método numérico proposto para resolução (Método de Varredura de Avanço e Retorno). Já o Capítulo 5 versa sobre o contexto da COVID-19 no Amazonas, a identificação dos parâmetros dos modelos epidemiológicos SIR e SIRD a partir dos dados dos boletins epidemiológicos do estado e a caracterização do controle ótimo para os modelos identificados. No Capítulo 6 são apresentados e discutidos os resultados da pesquisa. Por fim, no Capítulo 7, as conclusões são trazidas juntamente com as perspectivas e sugestões para trabalhos futuros.

2 REVISÃO DA LITERATURA

Uma das principais alternativas para modelar a dinâmica de propagação de doenças infecciosas na população é através dos chamados modelos epidemiológicos, estes modelos dividem a população em compartimentos, *Suscetíveis* $S(t)$ - *Infectados* $I(t)$ - *Removidos* $R(t)$, descrevendo seu comportamento ao longo do tempo. Um dos objetivos desse modelo matemático é analisar a força de infecção, determinada pela taxa de transmissão da doença, e a taxa de reprodutibilidade basal R_0 , determinada pela relação entre taxa de transmissão e taxa de recuperação da doença (LUIZ, 2012). A obtenção do modelo permite seu entendimento e estudar como aplicar uma política de controle de forma que esta reduza a velocidade de propagação da doença. Portanto, são utilizadas diversas estratégias com o objetivo de diminuir a quantidade de indivíduos infectados na população.

Em Bolzoni et al. (2017) algumas políticas de controle são investigadas, entre elas o isolamento social e a vacinação. Por proporcionar melhores resultados a longo prazo, buscar maneiras ideais para a distribuição das vacinas na população se torna um assunto extremamente relevante. Uma forma de propor um ritmo de vacinação é utilizando o Problema do Controle Ótimo, onde os sinais de controle são determinados a partir da minimização de um funcional custo, que neste trabalho é representado pela minimização da soma do total de gastos com vacinas e do total de infectados (ver seção 4.1). Neste capítulo, serão apresentados alguns trabalhos que investigaram a identificação do modelo matemático da COVID-19 e trabalhos que investigaram estratégias de controle ótimo para modelos epidemiológicos do tipo SIR.

Marinov e Marinova (2020) investigam a dinâmica da COVID-19 resolvendo primeiro um problema inverso para estimar os parâmetros (taxa de transmissão e taxa de recuperação) do modelo SIR a partir de dados reais, assumindo que estes parâmetros são funções do tempo e constantes por partes. Em seguida, os parâmetros estimados são usados para calcular a evolução da doença em diversos países. Em relação ao Bra-

sil, foram realizadas três projeções baseando-se nos dados da COVID-19 disponíveis em 21 de junho de 2020. Para o intervalo de 7 dias, $R_o = 1,37$, para 10 dias, $R_o = 1,30$ e 14 dias, $R_o = 1,48$. Já Batista (2020) tem como objetivo estimar o tamanho final da epidemia do coronavírus. Para isso, inicialmente, são estimados os parâmetros do modelo SIR e dos valores iniciais do modelo através da minimização da diferença entre o número de casos previsto e o atual. O estudo também compara satisfatoriamente o resultado obtido do modelo SIR e com um modelo logístico. Ambos os estudos aplicam o Método dos Mínimos Quadrados (MMQ) para a estimação dos parâmetros. Este método apresenta resultados admissíveis para o ajuste de curva do modelo SIR, tornando-se conveniente para um estudo a curto prazo.

Durante o início da pandemia do coronavírus até o momento atual, o comportamento da população do Amazonas não foi uniforme. Esta observação pode ser justificada quando se avalia o isolamento social no estado. Uma discussão acerca do isolamento social pode ser vista em Barreto et al. (2021) em que os autores descrevem alguns dos eventos ocorridos em Manaus, capital do estado. Com isso, a variação no percentual da população isolada pode afetar a taxa de transmissão da doença ao longo do tempo, visto que existe um maior número de indivíduos expostos entre suscetíveis, infectados e recuperados. Logo, admitindo que os parâmetros são constantes, ao escolher o intervalo de dados que serão utilizados na estimação dos parâmetros, deve-se analisar os eventos aos quais a população está sujeita.

Tanto em Marinov e Marinova (2020) quanto em Batista (2020), é adotado um modelo SIR simples que estabelece algumas hipóteses iniciais, entre elas: toda a população é suscetível à contaminação, não há dinâmica vital na população (despreza-se os nascimentos e óbitos por causas diversas) e não há redução no compartimento dos suscetíveis em virtude das medidas de isolamento social (admite-se que os isolados não fazem parte da dinâmica epidemiológica).

Como o número de infectados $I(t)$ depende da quantidade de suscetíveis na população, neste caso, no modelo SIR simples, este valor é naturalmente superestimado já que $S(t)$ pode assumir valores maiores que os reais. Schulz, Coimbra-Araújo e Costiche (2020) explicam e buscam corrigir estes pontos. Ao assumir que a suscetibilidade da população está diretamente relacionada ao contato desta população com indivíduos infectados, o autor afirma que em casos onde a população está separada por uma longa distância, não se tem uma relação de suscetibilidade com a totalidade da população pois não existe contato de parte dessa população com os infectados em virtude de bar-

reiras geográficas. Para isto, é utilizado em $S(t)$ um fator de correção $(1 - p(t))$, em que $p(t)$ representa o percentual da população isolada da contaminação. Esta consideração é de grande interesse em se tratando da população do Estado do Amazonas visto que o primeiro caso de um indivíduo infectado pelo vírus SARS-CoV-2 no estado ocorreu na capital. Em razão do distanciamento geográfico, o interior do estado não faria parte da dinâmica epidemiológica no início da pandemia. Esta consideração é necessária dependendo do período de identificação do modelo para ajustar as curvas estimadas aos dados reais. Além disso, Schulz, Coimbra-Araújo e Costiche (2020) adicionam ao modelo o percentual k dos suscetíveis em quarentena e também a dinâmica vital, de forma que a variação dos suscetíveis $S(t)$ em relação ao tempo seja proporcional às diferenças entre as taxa de natalidade n e mortalidade m . A taxa de transmissão no Brasil é encontrada a partir da média da razão de número de infectados no dia seguinte e número de infectados do dia anterior para o período de 26 de fevereiro de 2020 a 22 de março de 2020, os valores estimados foram 1,39 para a taxa de transmissão e 0,32 para taxa de recuperação. Percebe-se que R_0 assume valores parecidos ao se comparar o valor encontrado em Schulz, Coimbra-Araújo e Costiche (2020) e Marinov e Marinova (2020), essa diferença pode ter ocorrido tanto pelo método de estimação dos parâmetros quanto pelo intervalo de tempo utilizado ou até mesmo devido às subnotificações no período de fevereiro e março de 2020.

Em Batista (2020), apesar de não considerar a dinâmica vital e a quarentena, a variação da suscetibilidade pode também ser vista implicitamente ao estimar a população suscetível inicial $S(0)$ ao invés de considerar $S(0) = N - C(0)$, em que N é a população total constante e $C(0)$ o número de casos inicial. A estimativa de $S(0)$ pode representar a afirmação de que nem toda a população está inicialmente no compartimento dos suscetíveis. Isto pode ser verificado se o valor estimado de $S(0)$, ao utilizar os dados epidemiológicos iniciais da COVID-19 no Amazonas, for aproximadamente igual ao da população total de Manaus onde foi identificado o primeiro caso.

Outra forma de tornar os modelos mais precisos é modificando os compartimentos de forma que melhor representem a população. Por exemplo, incluindo o compartimento de óbitos. Na identificação, por utilizar dados reais, deve-se priorizar modelos em que haja uma maior confiabilidade na medição dos dados. O total de mortes pela doença representa uma parcela significativa do total de casos confirmados. Tendo em vista que o compartimento R no modelo SIR é o somatório de recuperados e óbitos, adicionar um compartimento para os óbitos apresenta uma alternativa interessante

para calibrar os parâmetros do modelo da COVID-19 no Amazonas. A identificação do modelo utilizando o compartimento D referente aos óbitos de indivíduos infectados ocasionados pelo SARS-CoV-2 pode ser vista em Comunian, Gaburro e Giudici (2020).

A partir do momento em que se identifica o modelo, pode-se estudar o controle por meio de vacinação. O objetivo do controle por vacinação é reduzir o número de suscetíveis e conseqüentemente reduzir o número de infectados. Em busca de encontrar a melhor alternativa de sintetizar este controle, são encontradas na literatura pesquisas utilizando uma técnica de controle moderno, a Teoria do Controle Ótimo. Elhia, Rachik e Benlahmar (2013) introduzem uma estratégia de controle ótimo com atraso de tempo tanto nas variáveis de estado quanto no controle. Este atraso representa o tempo necessário para um indivíduo da classe suscetível S migrar para a classe dos removidos R após a vacinação. O artigo também apresenta a solução do sistema de equações pelo método numérico de varredura de avanço e retorno, o qual é de grande relevância pois ao utilizar o Princípio de Pontryagin, são obtidos dois sistemas de equações que são acoplados, porém um possui condições de contorno em t_0 e outro em t_f .

Em Bolzoni et al. (2017), são investigadas estratégias de controle ótimo para diferentes políticas de controle epidemiológico em animais, tais políticas são: vacinação, isolamento, abate e redução da transmissão. Utilizando a abordagem do Princípio do Mínimo de Pontryagin em modelo epidemiológico SIR, a pesquisa mostra que utilizar o controle máximo para toda a epidemia pode não ser uma estratégia ótima e que minimizar a duração da epidemia não implica necessariamente em minimizar o total de infecções na população. O problema do controle ótimo consiste na minimização de um funcional do sistema, de forma que a escolha deste funcional ou função custo está relacionada aos objetivos a serem alcançados. O objetivo na pesquisa é minimizar somente a duração da epidemia, entretanto, dependendo da gravidade da doença, é necessário buscar a diminuição do número de indivíduos infectados, com o menor número de recursos possível.

Em Giamberardino e Iacoviello (2017) é proposta uma estratégia de controle ótimo utilizando funções de custo que dependem dos estados do modelo epidemiológico SIR e também do controle $u(t)$. O artigo utiliza a vacinação como política de controle e a função custo apresenta um termo α que pondera o controle dependendo do número de infectados. Essa ponderação é de grande relevância pois entende-se que a doença pode assumir características mais graves em determinados momentos. Compara-se os

valores da função custo utilizando o $u(t)$ ótimo e não ótimo, em que ao utilizar $u(t)$ acima do ótimo, resultou uma redução de 32% no número de infectados e um aumento de 84% no controle, e ao utilizar $u(t)$ abaixo do valor ótimo, o número de infectados aumenta em 32% e reduz 71% o custo do controle.

Em Libotte et al. (2020), é determinada uma estratégia de controle ótimo por meio de vacinação utilizando dados reais da pandemia da COVID-19 na China. Inicialmente, utiliza-se problemas inversos para estimar os parâmetros do modelo SIR e em seguida, duas estratégias são propostas. A primeira busca minimizar somente o total de infectados e a segunda, minimiza tanto a quantidade de infectados quanto de vacinação.

O problema do controle ótimo também pode ser visto em diferentes modelos além do modelo SIR. Em Souza, Dias e Arruda (2020), ao utilizar o modelo SEIR, verifica-se que é possível aplicar a abordagem do Princípio do Mínimo de Pontryagin como forma de propor uma estratégia de vacinação para outros modelos epidemiológicos, sendo E o compartimento de indivíduos expostos. A função custo neste caso visa minimizar o número de infectados com o menor custo do controle. Este artigo leva em consideração a perda de imunidade ao longo do tempo, ou seja, a reinfeção.

Por meio dos trabalhos apresentados, as pesquisas concordam que utilizar modelos epidemiológicos do tipo SIR para a dinâmica da COVID-19 apresentam resultados satisfatórios a curto prazo. E a partir desses modelos, é possível utilizar o Problema do Controle Ótimo como uma forma de propor uma dinâmica de vacinação na população. Em virtude dos impactos originados pela COVID-19 no Estado do Amazonas, vê-se necessário a identificação do modelo para a epidemia local. Tanto o modelo SIR quanto o SIRD apresentam características interessantes para serem resolvidos a partir de problemas inversos, em que os dados reais são utilizados para estimação dos parâmetros do modelo.

Sendo assim, este trabalho se propõe em identificar um modelo para a COVID-19 no Estado do Amazonas e a partir disso propor uma estratégia de controle ótimo da dinâmica epidemiológica. Contudo, de antemão, existem alguns fatores que podem afetar a exatidão do modelo e do controle: não uniformidade no comportamento da população ao longo do tempo, afetando os dados epidemiológicos e a qualidade dos dados oficiais em determinado período. Esses pontos serão levados em consideração na justificativa dos diferentes cenários de identificação dos modelos e contribuirão para

a discussão dos resultados.

3 MODELOS EPIDEMIOLÓGICOS

A modelagem matemática de fenômenos epidemiológicos permite descrever quantitativamente o comportamento das populações envolvidas ao longo do tempo. Um dos modelos que mais se destacou foi o modelo SIR (Suscetíveis, Infectados, Removidos) proposto por Kermack e McKendrick em 1927, o qual permitiu o estudo de diversos outros modelos que se tornaram conhecidos como modelos compartimentais. Os modelos epidemiológicos dividem a população em compartimentos (ou classes), estes compartimentos levam em consideração as características da doença e representam diferentes níveis ou etapas de evolução.

De maneira simples, uma epidemia é caracterizada quando uma doença se espalha muito rápido em um determinado período de tempo. Uma maneira de entender o comportamento da epidemia é através de modelos matemáticos. Em Luiz (2012), é possível encontrar o estudo de alguns modelos matemáticos em epidemiologia. A autora afirma que o estudo de modelos matemáticos tem como objetivo principal analisar a taxa da força de infecção e taxa de reprodutibilidade basal, onde a força de infecção é definida como a taxa de propagação da doença e a taxa de reprodutibilidade basal R_0 é o número de infecções causadas em indivíduos suscetíveis a partir de uma primeira infecção, e está relacionado ao crescimento ou decréscimo da epidemia. Ao longo do texto, a será a taxa de transmissão da doença e b a taxa de remoção.

De forma geral, os compartimentos são classificados como:

- a) Suscetíveis: população suscetível a contrair a doença
- b) Infectados: população que contraiu a doença e está no período de infecção, ou seja, pode transmitir aos suscetíveis
- c) Removidos: população que não influencia na dinâmica de transmissão da doença. Como no caso de indivíduos curados e que adquiriram a imunidade ou em caso de óbito.

Uma característica importante destes compartimentos é o fato de serem disjuntos (ALMEIDA, 2014). Ou seja, não é possível que uma população pertença a mais de um compartimento. Para descrever a dinâmica de cada uma dessas populações e considerando que a população de cada grupo varia com o tempo, é chamado de S , o número de suscetíveis, I , o número de infectados e R , o número de indivíduos removidos e a população total é dada pelo somatório dos indivíduos dos compartimentos descritos, $N(t) = S(t) + I(t) + R(t)$. Na literatura, é possível encontrar a população R com o nome de recuperados ou removidos dependendo da abordagem do modelo. No primeiro caso, o modelo não considera os óbitos em R , no segundo, R é o somatório de recuperados e óbitos.

Considerando que toda a população se enquadra em um dos compartimentos, tem-se que a população total é dada pelo somatório dos indivíduos dos compartimentos descritos,

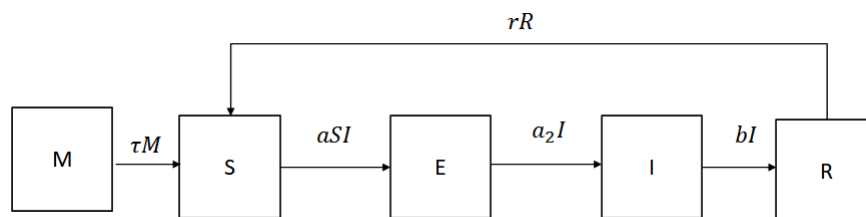
$$N(t) = S(t) + I(t) + R(t). \quad (3.1)$$

Em geral, os modelos podem apresentar configurações ou compartimentos diferentes. Por exemplo, em Oliveira (2008), é apresentado um modelo epidemiológico com mais compartimentos, onde, a partir do modelo MSEIRS, encontram-se outros modelos mais simples. O modelo MSEIRS inclui fenômenos demográficos, morte pela doença, imunidade conferida pela doença e imunidade passiva. M é a classe dos recém nascidos que possuem imunidade passiva devido a mãe ter sido infectada em algum momento, E são os indivíduos expostos, ou seja, estão no período de latência da infecção. Neste caso,

$$N(t) = M(t) + S(t) + E(t) + I(t) + R(t). \quad (3.2)$$

A Figura 1 apresenta a dinâmica do modelo MSEIR por meio de diagrama de blocos em que τ representa a taxa de recém nascidos que não possuem imunidade passiva, a representa a taxa de transmissão da doença, a_2 representa a taxa de transmissão de E para I , b representa a taxa de recuperação e r a taxa de reinfeção.

Figura 1: Diagrama de blocos do modelo MSEIRS.



Fonte: Oliveira (2008), modificado pelo autora.

Deve-se escolher os compartimentos de acordo com a dinâmica da doença. Por exemplo, em caso de doenças onde a população não adquire imunidade após a recuperação, não se deve trabalhar com o compartimento R , pois entende-se que após se recuperar, os indivíduos infectados se tornam suscetíveis novamente. Entende-se também que podem ser considerados compartimentos além dos mostrados na Figura 1, como o compartimento Q ou D , referente a população em quarentena e aos óbitos decorrentes da infecção respectivamente.

Nas Seções 3.1 e 3.2, serão apresentados mais detalhadamente os modelos SIR e SIRD, em que as hipóteses adotadas são:

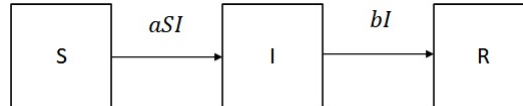
- a) População total constante e homogênea: cada indivíduo da população deve estar em um dos compartimentos adotados e não há distinção entre diferentes grupos dentro da população.;
- b) Ausência da dinâmica vital: nascimentos e óbitos por causas gerais não serão incluídos no modelo;
- c) Toda a população suscetível não é imune à infecção;
- d) Os infectados que se recuperam adquirem imunidade;
- e) A interação entre a população ocorre de forma uniforme: não há variação no comportamento da população em relação ao isolamento social.

3.1 Modelo SIR

A dinâmica do modelo SIR ocorre da seguinte maneira: os suscetíveis se tornam infectados devido ao contato com indivíduos já infectados e os infectados podem

se recuperar e adquirir imunidade ou morrer, passando para o grupo dos removidos. Considera-se também que a população total N é constante, sem dinâmica vital e o total de casos. Na Figura 2 é mostrada a representação por diagrama de blocos do modelo SIR, em que a é a taxa de transmissão da infecção e b a taxa de recuperação ou remoção.

Figura 2: Diagrama Modelo SIR.



Fonte: Elaborado pela autora.

O sistema de equações diferenciais referente ao modelo SIR é descrito como:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\frac{aS(t)I(t)}{N} \\ \frac{dI}{dt} = \frac{aS(t)I(t)}{N} - bI(t), \\ \frac{dR}{dt} = bI(t) \end{cases} \quad (3.3)$$

em que as condições iniciais são dados por $S(t_0) = S_0$, $I(t_0) = I_0$, $R(t_0) = R_0$. Além disso, a e b são constantes positivas e a população total também é constante

$$N(t) = S(t) + I(t) + R(t). \quad (3.4)$$

$N(t)$ constante pode ser demonstrado através da taxa de variação de N em relação ao tempo. Somando as Equações de 3.3

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt}, \quad (3.5)$$

é obtido $\frac{dN}{dt} = 0$, logo $N(t) = N_0$ é constante. O número total de casos $C(t)$ é dado pelo somatório de infectados e removidos, conforme mostrado na Equação 3.6:

$$C(t) = I(t) + R(t). \quad (3.6)$$

Como o sistema de equações diferenciais representado pelas Equações 3.3 é não linear, é possível analisar qualitativamente o comportamento de $S(t)$, $I(t)$ e $R(t)$ a partir da estabilidade dos pontos de equilíbrio do sistema.

No modelo SIR, o que interessa primeiramente é o comportamento da variável de estado $I(t)$, sendo assim, pode-se também analisar a variação de $\frac{dI}{dt}$. Fazendo a taxa de variação dos infectados nula $\frac{dI}{dt} = 0$, observa-se nas Equações 3.3 que

$$\frac{aS I}{N} - bI = 0. \quad (3.7)$$

A Equação 3.7 mostra que o ponto de equilíbrio ocorre quando $I(t) = 0$ ou $\frac{aS}{N} - b = 0$. Se $I = 0$ e $S = N$, este é o ponto livre de infecção. Os pontos de equilíbrio do sistema representado pelas Equações 3.3 são os pontos em que a taxa de variação de todas as populações são nulas, ou seja, $S(t)$, $I(t)$ e $R(t)$ são constantes quando não há crescimento ou decrescimento destes compartimentos. Fazendo a substituição na Equação 3.7 e em

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{aS I}{N} = 0, \quad (3.8)$$

a igualdade é satisfeita, logo não há variação da população neste ponto $(N, 0, 0)$. Do segundo caso, $\frac{aS}{N} - b = 0$, é obtido $\frac{S_*}{N} = \frac{b}{a}$ para qualquer valor de $I > 0$ e consequentemente $R(t) > 0$. Este ponto representa o ponto de máximo da curva $I(t)$ e é conhecido como imunidade de rebanho¹, pois a partir deste ponto o número de infectados decresce na população.

Se a taxa de variação dos infectados for positiva, $\frac{dI}{dt} > 0$, nota-se que

$$\frac{aS I}{N} - bI > 0. \quad (3.9)$$

Isto implica que há um crescimento no número de infectados, $I > 0$. Então, para uma epidemia ocorrer, a desigualdade abaixo deve ser obedecida

$$\frac{S}{N} > \frac{b}{a}. \quad (3.10)$$

¹A imunidade de rebanho é definida como um nível de imunidade da população no qual a disseminação da doença diminuirá e será interrompida. (BRITTON; BALL; TRAPMAN, 2020)

Ou seja, admitindo que uma doença infecciosa por transmissão direta² é representada pelo modelo SIR, existe um número mínimo de suscetíveis para que uma epidemia ocorra.

Em casos onde há decrescimento nas infecções, ou seja, a taxa de variação dos infectados é negativa, $\frac{dI}{dt} < 0$, tem-se que

$$\frac{aS I}{N} - bI < 0. \quad (3.11)$$

A partir disso e considerando que $I > 0$, o decrescimento na epidemia se dá quando $\frac{S}{N} < \frac{b}{a}$.

Em resumo, estes resultados mostram que, sendo S_0 o número inicial de suscetíveis, a condição para uma epidemia ocorrer é

$$\frac{aS_0}{bN} > 1. \quad (3.12)$$

Pressupondo que $S_0 \approx N$, então

$$\frac{a}{b} > 1, \quad (3.13)$$

em que $\frac{a}{b}$ é chamado de taxa de reprodutibilidade basal R_o . Como citado anteriormente, a reprodutibilidade basal traz informações cruciais a respeito da propagação da doença e pode assumir os seguintes valores:

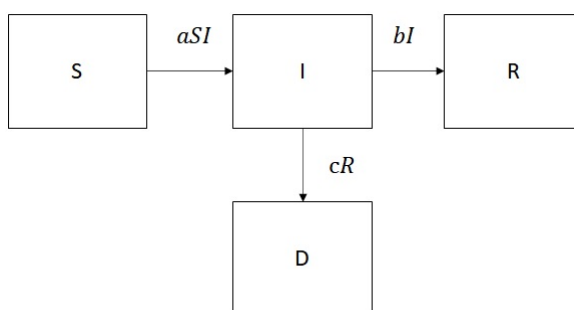
- $R_o = 1$: há um equilíbrio epidêmico, as pessoas infectadas infectam o mesmo número de indivíduos suscetíveis;
- $R_o > 1$: há uma propagação crescente do número de infectados;
- $R_o < 1$: doença tende a desaparecer na população.

²Transmissão direta: doenças transmitidas por meio do contato físico ou gotículas de saliva (FREITAS, 2018).

3.2 Modelo SIRD

O modelo SIRD difere do SIR apenas pelo compartimento D , este compartimento é referente a mortes de indivíduos pela doença, ou seja, ao invés de R representar recuperados e óbitos, representará somente os recuperados. Sendo assim, a dinâmica do modelo se dá pelo contato de indivíduos suscetíveis com indivíduos infectados a uma taxa de transmissão a , estes indivíduos se recuperam a uma taxa de recuperação b e morrem a uma taxa de mortalidade c . A Figura 3 mostra a representação do modelo SIRD por meio do diagrama de blocos.

Figura 3: Diagrama Modelo SIRD.



Fonte: Elaborado pela autora.

O sistema de equações diferenciais para o modelo SIRD é:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\frac{aS(t)I(t)}{N} \\ \frac{dI}{dt} = \frac{aS(t)I(t)}{N} - bI(t) - cI(t) \\ \frac{dR}{dt} = bI(t) \\ \frac{dD}{dt} = cI(t) \end{cases} \quad (3.14)$$

em que a população total é representada pelo somatório dos compartimentos, $N = S + I + R + D$, e também admite um valor constante como mostrado na Seção 3.1. a , b e c são constantes positivas dentro do intervalo $[t_0, t_f]$ analisado. O número total de casos $C(t)$ para este modelo é dado pelo somatório de infectados, recuperados e óbitos,

conforme mostrado na Equação 3.15:

$$C(t) = I(t) + R(t) + D(t). \quad (3.15)$$

Neste modelo, é necessário entender o comportamento das variáveis de estado $I(t)$ e $D(t)$. Se a taxa de variação dos infectados for nula, $\frac{dI}{dt} = 0$, tem-se que

$$\frac{aS I}{N} - (b + c)I = 0. \quad (3.16)$$

Da Equação 3.16, tem-se que $I = 0$ ou $\frac{aS I}{N} - (b + c) = 0$. Nota-se que os resultados são equivalentes aos resultados do modelo SIR exceto pela a adição da taxa de mortalidade c na equação. Logo, para que o número de infectados cresça em $t > t_0$,

$$\frac{S}{N} > \frac{b + c}{a}. \quad (3.17)$$

para $I > 0$. O valor mínimo de suscetíveis para a propagação da epidemia é $\frac{S_0}{N} > \frac{b + c}{a}$ e conseqüentemente $\frac{aS_0}{(b + c)N} > 1$. Neste caso, $\frac{aS_0}{(b + c)N}$ é a taxa de reprodução R_0 e segue os mesmo critérios apresentados em 3.1. Por fim, número de infectados decresce quando $\frac{S_0}{N} < \frac{b + c}{a}$.

Neste capítulo, foram apresentados os modelos SIR e SIRD, definindo seus parâmetros e suas variáveis de estado. Além disso, foi definida a taxa de reprodutibilidade basal de ambos os modelos e, a partir deste parâmetro, foi mostrado quando há crescimento ou decrescimento de uma epidemia. Esses modelos serão utilizados no presente trabalho para descrever a dinâmica da COVID-19 no Amazonas e auxiliarão na investigação de uma estratégia de controle por meio de vacinação.

4 CONTROLE ÓTIMO

A Teoria do Controle é uma área interdisciplinar que possui uma grande variedade de aplicações. As teorias de controle comumente usadas hoje são a teoria de controle clássico (também chamada teoria de controle convencional), a teoria de controle moderno e a teoria de controle robusto (OGATA, 2011). Para o trabalho em questão, o foco é a teoria de controle moderno, especificamente o Controle Ótimo, cuja vantagem se dá pela análise do domínio do tempo dos sistemas de equações diferenciais, por permitir lidar com sistemas de equações mais complexos com múltiplas entradas, saídas (MIMO) e com critérios mais rigorosos de desempenho. Fernandez-Car e Zuazua (2003) citam que a base do controle moderno surgiu devido às contribuições de R. Bellman (1920-1984) no contexto da programação dinâmica, R. Kalman (1930 - 2016) nas técnicas de filtragem e da abordagem algébrica de sistemas lineares e de L. Pontryagin com o princípio do máximo para problemas de controle ótimo não linear.

Uma das áreas da matemática que é muito utilizada no contexto dos problemas de controle ótimo é o cálculo variacional. Comumente utilizado para solucionar problemas de otimização, seu objetivo é encontrar um valor ótimo de um determinado funcional. Este conceito surgiu por volta de 1696 com o problema da braquistócrona apresentado por J. Bernoulli (1667-1748). O problema consistia em encontrar a trajetória mais rápida entre dois pontos de uma partícula sujeita a um campo gravitacional, e se tornou uma disciplina matemática independente depois das descobertas de L. Euler (1709-1783) (NAIDU, 2018).

Para a formulação Problema do Controle Ótimo (PCO), são necessários três itens (NAIDU, 2018):

- a) O modelo matemático do sistema a ser controlado;
- b) A especificação de um índice de desempenho;
- c) As condições de controle e restrições físicas dos estados e/ou do controle.

O modelo matemático deverá ser representado em espaço de estados, ou seja, representado por um espaço n -dimensional, cujos eixos coordenados são formados pelos eixos das variáveis de estado¹ do sistema, x_1, x_2, \dots, x_n . Estabelecer as especificações de desempenho é a parte mais importante para sistemas de controle (OGATA, 2011), pois define os requisitos e restrições impostas ao sistema de forma que resulte num sistema de controle ótimo que atende os objetivos desejados.

Este capítulo está dividido em quatro partes. Primeiramente, será introduzido o conceito de índice de desempenho e o que ele representa matematicamente e fisicamente para o sistema de controle. Em seguida, será apresentada a definição e formulação do Problema do Controle Ótimo. Após apresentadas as principais definições acerca da Teoria de Controle, chega-se no Princípio de Pontryagin, teorema que dá as condições necessárias para obtenção de uma solução ótima. E por último, será detalhado o método numérico utilizado para solucionar o problema.

4.1 Índice de Desempenho

O índice de desempenho J é chamado de funcional ou de função custo. Segundo Naidu (2018), J é um funcional dependente de uma função $f(x)$, escrito como $J = J(f(x))$, se para cada função $f(x)$, existe um valor correspondente para J .

O índice de desempenho geral para sistemas de controle ótimo admite a seguinte forma

$$J = \mathbf{x}^T(t_f) \cdot P \cdot \mathbf{x}(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{x}^T(t) \cdot Q \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \cdot R \cdot \mathbf{u}(t)] dt.$$

Ou,

$$J = F(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} G(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt. \quad (4.1)$$

De maneira que:

- $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$;
- $\mathbf{G} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$;

¹As variáveis de estado de um sistema dinâmico são aquelas que constituem o menor conjunto de variáveis capaz de determinar o estado desse sistema dinâmico (OGATA, 2011)

- R é uma matriz definida positiva de ordem $n \times n$;
- Q e P são matrizes semidefinidas positivas de ordem $n \times n$ e $m \times m$, respectivamente;
- $t_f > 0$ corresponde ao tempo final ou horizonte de controle.

Naidu (2018) apresenta a classificação de problemas de controle ótimo de acordo com a estrutura do índice de desempenho da seguinte maneira: índices de desempenho que contem somente o primeiro termo $F(x(t_f), t_f)$ são chamados de problemas de Mayer, este termo é o custo associado a desvios entre o estado final atingido e o estado final desejado; os índices que possuem somente o segundo termo são chamados de problemas de Lagrange, o termo integral representa o custo associado ao vetor de estado x e ao controle u dentro do horizonte de controle $[t_0, t_f]$; já os índices de desempenho que têm ambos os termos são chamados de problemas de Bolza. Em resumo, o índice de desempenho é uma função custo e é definido de acordo com o problema estipulado.

As funções objetivo (índice de desempenho) utilizadas para os modelos epidemiológicos tratados no presente trabalho serão problemas de Lagrange:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} G(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt.$$

4.2 Problema do Controle Ótimo

O objetivo principal do Problema do Controle Ótimo é determinar sinais de controle que farão com que um determinado sistema satisfaça restrições físicas ao mesmo tempo que extremiza um funcional ou índice de desempenho (KIRK, 2004).

Suponha que o estado de um determinado sistema no tempo t seja descrito por um vetor de estados n -dimensional $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T$ e o controle deste sistema dado por um vetor m -dimensional $\mathbf{u}(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)]^T$.

Um problema de controle ótimo (PCO) é definido como:

$$\min \left\{ F(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} G(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt \right\} \quad (4.2)$$

Sujeito a

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), t \in [t_0, t_f] \quad (4.3)$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (4.4)$$

$$x_i(t_f) = x_i^{t_f} \quad (4.5)$$

$$x_i(t_f) \geq x_i^{t_f} \quad (4.6)$$

$$x_i(t_f) \text{ livre} \quad (4.7)$$

$$\mathbf{u}(t) \in \Omega(\mathbf{x}(t), t), \forall t \in [t_0, t_f] \quad (4.8)$$

- $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ é uma função vetorial $\mathbf{f} = [f_1, f_2, \dots, f_n]^T$ em que para todo $i = 1, \dots, n$, existe um $f_i(x, u, t)$ correspondente;
- $x_i^{t_f}$ representa a variável de estado x_i no instante t_f ;
- Ω é o conjunto de todos os controles admissíveis do sistema no horizonte de controle determinado.

Encontrar $(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t))$ admissíveis minimizando o custo J mostrado na Equação 4.2 é o que se caracteriza como controle ótimo. $\mathbf{x}^*(t)$ e $\mathbf{u}^*(t)$ são os pontos ótimos para os vetores de estado e controle. Além disso, é importante notar algumas condições impostas ao problema além das condições iniciais. Por exemplo, o tempo final t_f pode ser fixo ou livre e o estado final pode ser completamente ou parcialmente fixo ou livre (NAIDU, 2018). As restrições impostas ao modelo epidemiológico neste trabalho serão t_f fixo, $0 \leq u(t) < U_{ad}$ e $U_{ad} < 1$ em que U_{ad} é o valor máximo admissível para $u(t)$.

4.3 Princípio de Pontryagin

Uma das abordagens para solucionar o PCO é através do Princípio de Pontryagin, esta abordagem pode ser vista como uma generalização das condições necessárias fornecidas pelo cálculo para maximizar funções ou do cálculo variacional para maximizar

funcionais (GRASS et al., 2008). O Princípio de Pontryagin fornece condições necessárias que uma solução ótima $(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t))$ deve satisfazer. Admitindo que H representa a Hamiltoniana definida pela Equação 4.9:

$$H(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \rho(t), t) = G(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \rho(t)^T \cdot f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t). \quad (4.9)$$

A solução ótima é obtida resolvendo:

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \rho_j}, \quad (4.10)$$

$$\frac{d\rho_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_j}, \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0, \quad (4.12)$$

em que $j = 1, \dots, n$, ρ é chamado de coestado do sistema, também conhecido por variável adjunta ou multiplicador de Lagrange.

Teorema 1 (Princípio do Máximo de Pontryagin). *Seja $(x^*(t), u^*(t))$ a solução ótima do Problema de Controle Ótimo da Equação 4.2 com estado final livre. Então, existe uma função $\rho(t)$ contínua e continuamente diferenciável com $\rho(t) \in \mathbb{R}^n$ que satisfaz para todo $t \in [t_0, t_f]$ a equação:*

$$H(x^*(t), u^*(t), \rho(t), t) = \max_{u \in \Omega} H(x^*(t), u^*(t), \rho(t), t). \quad (4.13)$$

Além disso, $\forall t \in \mathbb{R}^+$ e para $u(t)$ contínuo, as seguintes equações são válidas:

$$\frac{d\rho}{dt} = -H_x(x^*(t), u^*(t), \rho(t), t) \quad e \quad (4.14)$$

$$\rho(t_f) = F_x(x^*(t_f), t_f), \quad (4.15)$$

com esta última sendo chamada de condição de transversalidade. O funcional dado por $H(x, u, \rho, t) := G(x, u, t) + \rho f(x, u, t)$ é denominado Hamiltoniana do problema de Controle Ótimo. Já H_x e F_x representam as derivadas parciais dos funcionais $H(x, u, \rho, t)$ e $F(x(t_f), t_f)$ em relação ao vetor de estados x .

Demonstração. A prova deste teorema pode ser encontrada, por exemplo, em Grass et al. (2008), Lenhart e Workman (2007) e Naidu (2018). \square

Admitindo que se quer encontrar a entrada $u(t)$ e o estado $x(t)$ que minimizam o funcional J (Equação 4.1) e satisfazem a Equação 4.2. De acordo com o Teorema 1, a minimização do índice de desempenho pode ser resolvida através do formalismo hamiltoniano de modo que, para encontrar o controle ótimo $u^*(t)$ e supondo que $u(t)$ é limitado, para $t \in [t_0, t_f]$, o controle ótimo $u^*(t)$, deve necessariamente satisfazer as Equações 4.10 e 4.11 e

$$H(u^*(t)) \leq H \text{ para todo } u(t) \in \Omega. \quad (4.16)$$

Assumindo que t_0 e $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ são conhecidos, tem-se que $\mathbf{x}(t_f)$ e t_f podem ser especificadas ou não. Desta forma, as condições de contorno do sistema podem assumir características diferentes. Monteiro (2011) resume da seguinte maneira:

- se t_f e $\mathbf{x}(t_f)$ são especificados, as condições de contorno são $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ e $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$;
- se t_f é especificado, mas \mathbf{x}_f não, as condições de contorno são $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ e $\rho_j = \frac{\partial F}{\partial x_j}$ em $t = t_f$;
- se \mathbf{x}_f é especificado mas t_f não, então $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ e $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$ e $H = -\frac{\partial F}{\partial t}$;
- quando t_f e $\mathbf{x}(t_f)$ são livres, além da condição inicial, deve obedecer também $\rho_j = \frac{\partial F}{\partial x_j}$ e $H = -\frac{\partial F}{\partial t}$.

Neste trabalho, considera-se t_f especificado e \mathbf{x}_f livre. Em relação aos modelos epidemiológicos adotados, apesar de não ser imposta uma restrição nas variáveis de estado, é necessário ressaltar que elas sempre serão não negativas. Por exemplo, para o modelo SIR, é possível mostrar que $S = S_0 \cdot e^{-\frac{a(R-R_0)}{bN}}$, que sempre será não negativo. Esta relação pode ser observada, dentre outros, em Batista (2020).

Para a obtenção dos vetores ótimos $(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t))$, deve-se proceder da seguinte maneira:

a) Definir a Hamiltoniana H :

$$H(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \rho(t), t) = G(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \rho(t)^T \cdot f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t). \quad (4.17)$$

b) Encontrar o ponto crítico de H , candidato à solução do problema, a partir da derivada parcial de H em relação a $\mathbf{u}(t)$, de forma que $H(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \rho^*(t), t) \leq H(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}(t), \rho^*(t), t)$, ou seja:

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = 0. \quad (4.18)$$

c) E, por último, resolver o sistema de equações de estado e coestado sujeito às condições de iniciais $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ e de transversalidade $\rho(t_f) = 0$.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \left(\frac{\partial H}{\partial \rho} \right) \text{ e } \dot{\rho}(t) = - \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \right), \quad (4.19)$$

O Princípio de Pontryagin fornece condições necessárias para uma solução ser ótima, entretanto, ele não fornece condições suficientes para solucionar o PCO. Antes de apresentar as condições suficientes de otimalidade, é necessário estabelecer alguns conceitos acerca de funções convexas conforme exibido nas Definições 1, 2, na Proposição 1 e no Teorema 2. Buscando examinar resultados relacionados à existência e unicidade da solução, em Lenhart e Workman (2007) é apresentado um exemplo de condição suficiente por meio do Teorema 3.

Definição 1. Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é chamado de conjunto convexo, se para quaisquer $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in A$ e $\alpha \in [0, 1]$, tem-se que $\alpha \mathbf{v} + (1 - \alpha) \mathbf{w} \in A$. Além disso, $\alpha \mathbf{v} + (1 - \alpha) \mathbf{w}$ é denominada combinação convexa de \mathbf{v} e \mathbf{w} .

Definição 2. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo. Uma função $G : A \rightarrow \mathbb{R}$ é dita convexa quando, para quaisquer $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in A$ e $\alpha \in [0, 1]$, tem-se:

$$G((1 - \alpha)\mathbf{v} + \alpha\mathbf{w}) \leq (1 - \alpha)G(\mathbf{v}) + \alpha G(\mathbf{w}). \quad (4.20)$$

Proposição 1: Seja $G : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 definida em um aberto do conjunto convexo A . Então, $\mathbf{v}^* \in A$ minimiza G se, e somente se

$$G_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}^*)(\mathbf{v}^* - \mathbf{v}) \leq 0, \quad \forall \mathbf{v} \in A. \quad (4.21)$$

Demonstração. A prova desta proposição pode ser encontrada, dentre outros, em Grass et al. (2008). \square

Para o teorema a seguir, é importante observar que $\eta = n + m + 1$.

Teorema 2. *Seja $G : A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa de classe C^1 definida no conjunto aberto A . Então, para todo $\mathbf{v}, \mathbf{v}^* \in A$, com $\mathbf{v} = (t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ e $\mathbf{v}^* = (t, \mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$, tem-se que:*

$$G(t, \mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) - G(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \leq (\mathbf{x}^* - \mathbf{x}) \frac{\partial G(t, \mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)}{\partial \mathbf{x}} + (\mathbf{u}^* - \mathbf{u}) \frac{\partial G(t, \mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)}{\partial \mathbf{u}}, \quad (4.22)$$

Demonstração. A prova deste teorema pode ser encontrada, dentre outros, em Izmailov e Solodov (2014) e Luenberger e Ye (2016). \square

Teorema 3. *Considere*

$$J(\mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t_f} G(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt.$$

Sujeito a

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)),$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0.$$

Suponha que $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ e $G(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ sejam funções continuamente diferenciáveis em t, \mathbf{x} e \mathbf{u} e convexas em \mathbf{u} . Suponha que \mathbf{u}^ é o controle associado ao estado \mathbf{x}^* , e ρ é uma função diferenciável por partes, de forma que $\mathbf{u}^*, \mathbf{x}^*$ e ρ em $t \in [t_0, t_f]$ satisfazem as seguintes condições:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \mathbf{u}} + \rho \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} &= 0 \\ \dot{\rho} &= - \left(\frac{\partial G}{\partial \mathbf{x}} + \rho \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right) \\ \rho(t_f) &= 0 \\ \rho(t) &\geq 0. \end{aligned}$$

Então, para todo u ,

$$J(\mathbf{u}^*) \leq J(\mathbf{u}).$$

Demonstração. A ideia da demonstração é utilizar os resultados da Proposição 1 e do Teorema 2. Esta prova pode ser encontrada em Lenhart e Workman (2007) e em Grass et al. (2008).

□

4.4 Método de Varredura de Avanço e Retorno

Como mostrado na Seção 4.3, Equação 4.12, o controle ótimo $u(t)$ depende do estado $\mathbf{x}(t)$ e do coestado $\rho(t)$.

Para encontrar solução para os sistemas de estado e o coestado, foi utilizado o Método de Varredura de Avanço e Retorno. Este método pode ser visto em Lenhart e Workman (2007). Ele consiste em resolver o problema de controle ótimo por meio de iterações que percorrem o intervalo de iteração estabelecido de duas formas: de t_0 a t_f (avanço) para as equações de estado e de t_f a t_0 (retorno) para as equações de coestado até convergir para uma solução.

Considerando o problema de controle ótimo

$$\min \left\{ \int_{t_0}^{t_f} G(t, \mathbf{u}(t), \mathbf{x}(t)) dt \right\}. \quad (4.23)$$

Sujeito à

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \text{ em que } t \in [t_0, t_f],$$

em que a Equação 4.23 corresponde a minimização do índice de desempenho classificado como problema de Lagrange conforme visto na Seção 4.1.

Conforme apresentado na Seção 4.3, se $\mathbf{u}^*(t)$ é uma solução para o problema de controle ótimo, ele deve igualmente satisfazer as seguintes equações

$$\dot{\rho}(t) = - \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \right), \quad \rho(t_f) = 0, \quad (4.24)$$

$$\left. \frac{\partial H}{\partial u} \right|_{u=u^*(t)} = 0.$$

O algoritmo para este método, de acordo com Lenhart e Workman (2007), se dá da seguinte maneira:

- Passo 1: estimar as condições iniciais de u dentro do intervalo admissível U_{ad}
- Passo 2: usando as condições iniciais x_0 e os valores de u , resolver $x(t)$, com t indo de t_0 a t_f (avançando), através do método numérico escolhido. Neste trabalho, foi utilizado o método de Runge-Kutta de segunda ordem. Desta forma, tem-se que

$$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{2}(k_1 + k_2), i = 0, 1, \dots, n - 1, \quad (4.25)$$

sendo

$$k_1 = f(t_i, x_i),$$

$$k_2 = f(t_i + h, x_i + hk_1).$$

Em Cunha (2000), encontram-se mais informações acerca deste método.

- Passo 3: utilizando as condições de transversalidade $\rho(t_f) = 0$ e os valores de u e x do Passo 1, resolver ρ através do método numérico escolhido, com t indo de t_f a t_0 (retornando) de acordo com suas equações diferenciais definidas na Equação 4.24

$$\rho_{j-1} = \rho_j - \frac{h}{2}(k_{\rho,1} + k_{\rho,2}), j = n, n - 1, \dots, 1. \quad (4.26)$$

- Passo 4: atualizar u introduzindo os valores de x e ρ encontrados nos Passos 2 e 3 na caracterização do controle ótimo.
- Passo 5: Verificar a convergência entre o valor de u encontrado no Passo 4 e o valor inicial estimado de u . Se os valores das variáveis na iteração atual e na última forem suficientemente próximos, utilizar os valores atuais como solução. Se não forem próximos, retorne para o Passo 2.

As Equações 4.27 e 4.28 fornecem a condição de convergência do Passo 5 determinada pelo erro relativo entre o valor de u da iteração atual e o da última iteração u_{old} . Este erro deve ser menor ou igual à tolerância aceita δ da seguinte maneira:

$$\frac{\|u - u_{old}\|}{\|u\|} \leq \delta, \quad (4.27)$$

$$\delta\|u\| - \|u - u_{old}\| \geq 0. \quad (4.28)$$

A grande vantagem deste método é a possibilidade de resolver os sistemas de equações acoplados (estados e coestados) utilizando tanto as condições iniciais $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ quanto as condições de transversalidade $\rho(t_f) = 0$.

Alguns comentários trazidos por Lenhart e Workman (2007):

- a) O chute inicial $u(t) = 0$ costuma ser suficiente, a não ser que tenha alguma divisão na equação por u ;
- b) No Passo 4, é necessário usar uma combinação convexa para auxiliar na velocidade da convergência, esta combinação é dada pela Definição ??.

No algoritmo presente neste trabalho, utiliza-se o valor de controle anterior u_{old} e o valor resultante da última iteração u , de forma que o novo valor de u é dado por

$$u_{atual} = \frac{u + u_{old}}{2};$$

- c) Para os Passos 2 e 3, pode ser utilizado qualquer método de resolução de equações diferenciais. Neste trabalho optou-se utilizar o RK de segunda ordem.

Exemplo 1:

Considere o seguinte sistema de equações:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2(t), \quad (4.29)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_1(t) + u(t), \quad (4.30)$$

com $t_0 = 0$ e $t_f = 1$, sujeito às condições iniciais $x_1(0) = 0$ e $x_2(0) = 0$ com controle representado por $u(t)$ e sem restrições para $\mathbf{x}(t_f)$.

Determine a solução ótima para o sistema supondo que o índice de desempenho seja dado por:

$$J = \int_0^1 [x_1^2(t) + x_2^2(t) + u^2(t)] dt. \quad (4.31)$$

Solução:

Para encontrar a solução ótima do sistema, é necessário primeiramente definir a Hamiltoniana H conforme Equação 4.9

$$H = x_1^2(t) + x_2^2(t) + u^2(t) + \rho_1(t)x_2(t) + \rho_2(t)(-x_1(t) + u(t)).$$

Em seguida, deve-se encontrar o ponto crítico de H candidato a ponto de mínimo da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial u} &= 0, \\ 2u(t) + \rho_2(t) &= 0, \\ u(t) &= -\frac{\rho_2(t)}{2}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Por último, é necessário definir as equações de coestado por meio da Equação 4.11:

$$\dot{\rho}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -2x_1(t) - \rho_2(t), \quad (4.33)$$

$$\dot{\rho}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = 2x_2(t) + \rho_1(t). \quad (4.34)$$

Sendo assim, para obter o valor de $u(t)$ ótimo, deve-se solucionar os sistemas de estado e coestado representados pelas Equações 4.29, 4.30, 4.33 e 4.34.

Como t_f é especificado e $\mathbf{x}(t_f)$ é livre, além das condições iniciais $x_1(0)$ e $x_2(0)$, há a condição de transversalidade $\rho_1(t_f) = 0$ e $\rho_2(t_f) = 0$. Para encontrar a solução numérico do problema, faz-se uso do método de varredura de avanço e retorno apresentado na Seção 4.4.

Para aplicação do método de varredura, é possível utilizar qualquer método numérico que solucione equações diferenciais. Para fins didáticos, será utilizado o método de Euler no Código 1. O intervalo de tempo $[0, 1]$ será dividido em 10 subintervalos, igualmente espaçados por $h = \frac{1}{n}$.

Código 1: Exemplo 1

```

1 del = 0.001;
2 n = 10;
3 h = 1/n;
4 T = linspace(0, 1, n+1);
5 test = -1;
6
7 u = zeros(1, n+1);
8 x1 = zeros(1, n+1);
9 x2 = zeros(1, n+1);
10 p1 = zeros(1, n+1);
11 p2 = zeros(1, n+1);
12
13 while(test < 0)
14
15   oldu = u;
16   oldx1 = x1;
17   oldx2 = x2;
18   oldp1 = p1;
19   oldp2 = p2;
```

```

20
21 for i = 0:n-1
22 x1(i+1) =& x1(i) + h *x2(i)
23 x2(i+1) =& x2(i) + h*(-x1(i) + -p2(i)/2)
24 end
25
26 for j = n:1
27 p1 (j-1) =& -2*x1(j) - p2(j)
28 p2 (j-1) =& 2*x2(j) + p1(j)
29 end
30
31 u1 = -p2/2
32 u = 0.5*(u1 + oldu);
33
34 conv1 = del*sum(abs(u))-sum(abs(oldu-u));
35 conv2 = del*sum(abs(x1))-sum(abs(oldux1-x1));
36 conv3 = del*sum(abs(x2))-sum(abs(oldux2-x2));
37 conv4 = del*sum(abs(p1))-sum(abs(oldp1-p1));
38 conv5 = del*sum(abs(p2))-sum(abs(oldp2-p2));
39
40 test = min(conv1,min(conv2,min(conv3,min(conv4, conv5))));
41 end

```

- A variável $test = -1$ representa o teste de convergência de u , x_1 , x_2 , ρ_1 e ρ_2 . Conforme Equação 4.28, δ é positivo, ou seja, enquanto $test < 0$, a iteração permanece. E $oldu$, $oldux1$, $oldux2$, $oldp1$ e $oldp2$ armazenam os valores de u , x_1 , x_2 , p_1 e p_2 da última iteração.
- Nas linhas 21 a 24, ocorre o avanço do método de varredura.
- Nas linhas 26 a 29, é realizado o retorno do método de varredura. Utiliza-se as condições de transversalidade $\rho(1) = 0$ e os valores de u e x previamente definidos.
- Tendo os vetores x , ρ encontrados, é calculado u conforme Equação 4.32. Na Linha 31, $u1$ representa o vetor \mathbf{u} usando os novos valores de ρ_2 , entretanto $u1$ é utilizado como vetor temporário. O controle u é definido na Linha 32, dado pela média de $oldu$ e $u1$.
- O próximo passo é realizar o teste de convergência apresentado na Equação 4.28.

A verificação de convergência é feita tanto para o controle quanto para as variáveis de estado e coestado nas Linhas 34 a 40.

O exemplo exposto permite percorrer por todas as metodologias apresentadas no Capítulo 4. Inicialmente, é formulado o problema de controle ótimo. Em seguida, por meio do Princípio de Pontryagin, define-se um candidato à solução ótima. E por último, é mostrada a aplicação do método de varredura de avanço e retorno.

5 COVID-19 NO AMAZONAS

O primeiro caso de infecção por COVID-19 no Amazonas ocorreu em 13 de março de 2020, em Manaus. No dia 23 de março de 2020, o Governo do Estado do Amazonas emitiu o Decreto nº 42.099, o qual determinava a suspensão de algumas atividades como o atendimento ao público de bares e restaurantes e eventos em geral (AMAZONAS, 2020a). Após estas medidas, outros decretos foram emitidos para reduzir a circulação da população com objetivo de conter a propagação do vírus no estado e, também, alguns protocolos padrão foram estabelecidos: uso de máscara, higienização das mãos, distanciamento social, etc.

Uma das principais preocupações acerca da transmissão do coronavírus no Amazonas é a capacidade do sistema de saúde tanto na capital quanto no interior, pois a falta de alguns recursos e o distanciamento geográfico dificultariam o atendimento da população.

A taxa de ocupação chegou a 95% no início de abril e levou os governos federal e estadual (...) a abrir novos hospitais em regime de emergência para tentar impedir o colapso total do sistema de saúde (BBC, 2020).

Em comparação ao restante do país, o Amazonas teve um alto crescimento no número de casos notificados e óbitos e Manaus, a capital do estado, foi considerada um dos epicentros no país. O período de chuvas e a falta de preparo favoreceram a propagação do vírus no estado.

O primeiro motivo é o clima. Os meses de novembro e abril concentram o maior volume de chuvas no Estado, e isso favorece a proliferação de vírus que causam síndromes respiratórias, explica a imunologista Bárbara Baptista, pós-doutoranda da Fundação Oswaldo Cruz (Fiocruz) no Amazonas (BBC, 2020).

Além disso, mesmo com os protocolos determinados pelo Governo do Estado, notou-se que a população aderiu menos ao isolamento em determinados períodos. Bar-

reto et al. (2021) comparam o comportamento da COVID-19 em Manaus e Fortaleza a partir dos seus níveis de isolamento social. Em Manaus, o estudo mostrou que o índice de permanência domiciliar foi menor e se manteve por um período mais curto, passando a apresentar valores negativos a partir de agosto, indicando que a população permanecia mais tempo na rua do que em casa.

Este capítulo irá tratar da dinâmica epidemiológica do coronavírus no Amazonas utilizando os conceitos mostrados nos Capítulos 3 e 4. O objetivo é entender como se daria uma estratégia ótima de vacinação no Amazonas e para isso, é necessário primeiro identificar os parâmetros do modelo para que em seguida, seja obtido o controle ótimo do sistema.

5.1 Identificação e validação do modelo

Como visto no Capítulo 3, a dinâmica populacional em relação a uma infecção é descrita através dos chamados modelos compartimentais. Tanto em Batista (2020) quanto em Marinov e Marinova (2020) é possível encontrar métodos para estimar parâmetros do modelo epidemiológico SIR para a COVID-19 através de problemas inversos¹. Os autores utilizam do Método dos Mínimos Quadrados (MMQ) para esta estimativa.

O objetivo do MMQ é determinar parâmetros para ajustar uma curva aos dados reais, minimizando o erro entre esses dados e os dados estimados. Considerando o sistema de equações do modelo SIR representado pela Equação 3.3 e que S_{est} , I_{est} e R_{est} denotam o vetor de dados estimados ao longo do tempo a partir da discretização e S , I e R denotam o vetor de dados reais ao longo do tempo, o erro quadrático entre esses termos é dado por

$$\phi = \sum (\epsilon^2 + \delta^2 + \zeta^2), \quad (5.1)$$

em que

$$\epsilon = S_{est} - S, \quad (5.2)$$

$$\delta = I_{est} - I, \quad (5.3)$$

$$\zeta = R_{est} - R. \quad (5.4)$$

¹O problema inverso consiste em usar o resultado real de algumas medições para inferir os valores dos parâmetros que caracterizam o sistema. (TARANTOLA, 2005)

As Equações 5.2, 5.3 e 5.4 correspondem aos resíduos referentes a S, I e R respectivamente. Com isso, a identificação do modelo foi dividida em 4 etapas:

1. Escolha do modelo compartimental a ser trabalhado
2. Levantamento e tratamento dos dados
3. Estimação dos parâmetros do modelo.
4. Validação do modelo

Na etapa 1, primeiramente, optou-se por trabalhar com o modelo epidemiológico SIR e em sequência com o modelo SIRD. Em seguida, na etapa 2, foram levantados os dados epidemiológicos do Amazonas². Na etapa 3, para a estimação dos parâmetros, foi utilizada a função *lsqcurvefit* do MATLAB para períodos diferentes. Esta função utiliza os dados fornecidos e a partir deles ajusta a curva através do MMQ para sistemas de equações não lineares. Uma vez obtidos os parâmetros, deve-se realizar a etapa 4: validação do modelo. Segundo Coelho (2004), a validação é efetuada pela comparação do modelo obtido com as medidas em um conjunto de dados que não foi utilizado na estimação do modelo matemático.

Os dados fornecidos para a identificação tanto do modelo SIR quanto do modelo SIRD em sua forma simples, devem seguir as hipóteses adotadas no Capítulo 3, uma delas é que o comportamento da população deve ser homogêneo. Através do algoritmo de identificação, foi possível notar que, ao utilizar um intervalo de tempo em que houve algum evento que alterou o comportamento da população, isto afetaria os dados de forma que o erro entre os dados estimados e a base de dados utilizada para validação de S, I e R aumentava.

A base de dados fornece o número de casos acumulados, número de recuperados acumulado e o número de óbitos. Para o modelo SIR, o compartimento *R* foi definido como o compartimento dos recuperados e dos óbitos. Os dados utilizados para validação do modelo SIR e SIRD foram do período de 14 de agosto de 2020 a 30 de novembro de 2020 de maneira que se utilizou os primeiros 40 dias para estimar os parâmetros e os outros 68 dias para validar a curva encontrada. Este período é o maior

²O boletim epidemiológico da COVID-19 no Amazonas é atualizado pela Fundação de Vigilância em Saúde do Amazonas (FVS - AM) e fornece as notificações de casos, óbitos, internações, isolados e recuperados.

intervalo de tempo em que o comportamento da população não sofreu grandes alterações. Algumas das justificativas que colaboram com esta hipótese serão detalhadas na Seção 6.1. O Código 2 descreve a rotina utilizada para identificar os parâmetros do modelo SIR para o intervalo de 14 de agosto de 2020 a 23 de setembro de 2020.

Código 2: Identificação de Parâmetros do Modelo SIR

```

1 function [rate, y,N,ti_data, tf_data,t,date0] = ...
    SIR_Parameters_Estimation_COVID_V2()
2 close all
3 clear all
4
5 % 1) Notificacoes COVID-AM
6
7 [Cdata, Ddata, Rdata,date0] = getDataCRD2;
8
9 Rdata = Rdata + Ddata;%R = Recuperados + obitos
10 Idata = Cdata-Rdata; %Infectados
11 N = 4207714; %populacao total do Amazonas de acordo com IBGE
12 Sdata = N - Cdata; %Suscetiveis
13
14 %Intervalo de tempo utilizado para identificacao
15 ti_data = 150; %Dia 14/08/2020
16 tf_data = 190; %Dia 23/09/2020
17
18 % 2) Modelo SIR + input dos dados
19 c = zeros(length(Sdata(ti_data:tf_data)),3); %matriz da base ...
    de dados
20
21 c(:,1)= Sdata(ti_data:tf_data)'; %Base de dados de S
22 c(:,2) = Idata(ti_data:tf_data)'; %Base de dados de I
23 c(:,3) = Rdata(ti_data:tf_data)'; %Base de dados de R
24
25 function C = SIR(rate,t)
26
27     %rate = matriz dos parametros do modelo
28     %Condicoes Iniciais
29     SIR_0 =[Sdata(ti_data);Idata(ti_data); Rdata(ti_data)];
30
31     [T,Cv]=ode45(@SisEq,t,SIR_0);
32

```

```

33     function dC = SisEq(t,c) %Sistema de Equacoes - Modelo SIR
34
35     dcdt=zeros(3,1);
36     dcdt(1)= -rate(1).*c(1)*c(2)/N;           %dS/dt = -aSI
37     dcdt(2)= rate(1).*c(1)*c(2)/N-rate(2).*c(2); %dI/dt = aSI -bI
38     dcdt(3)= rate(2).*c(2);                   %dR/dt = bI
39
40     dC=dcdt;
41     end
42 end
43
44 %3) Estimar parametros
45 rate0=[0;0];
46 [rate,Rsdnrm,Rsd]=lsqcurvefit(@SIR,rate0,t,c)

```

A primeira parte do código (linhas 5 a 7) é fornecer os dados reais para identificação do modelo. Por se tratar inicialmente do modelo SIR, os dados necessários para estimar os parâmetros são: *Sdata* para os suscetíveis, *Idata* para os infectados e *Rdata* para os removidos. O boletim epidemiológico da COVID-19 no Amazonas fornece o total de casos (*Cdata*), óbitos (*Ddata*) e recuperado (*Rdata*), sendo assim, o compartimento dos removidos será o somatório de recuperados e óbitos por coronavírus, o compartimento dos infectados *I* será a diferença entre casos notificados acumulados e recuperados e o compartimento de suscetíveis será a diferença entre a população total *N* do estado e casos notificados acumulado. Na segunda parte (linhas 29 a 42) é declarada uma função $C = f(a, b, t)$, a partir do modelo SIR, em que se relaciona os valores de *Sdata*, *Idata* e *Rdata* com os parâmetros do modelos *a* e *b* (taxa de transmissão e recuperação) a fim de determinar os valores de *a* e *b* que possuem o menor erro aceitável entre os dados estimados e os dados reais. A estimação dos valores de *a* e *b* será realizada na terceira etapa (linha 45), através da função *lsqcurvefit*.

Para o modelo SIRD, foram feitos os mesmos passos descritos acima (ver Apêndice A), a diferença foi a inserção do compartimento dos óbitos *D*. Para o *input* dos dados, *Sdata* e *Idata* mantiveram os mesmos valores, porém *Rdata* será somente o número de recuperados e foi acrescentado *Ddata*, o total de óbitos. Além disso, mais um parâmetro foi inserido na equação, a taxa de mortalidade *c*. Desta forma, para o modelo SIRD, serão estimados três parâmetros: taxa de transmissão *a*, taxa de recuperação *b* e taxa de mortalidade *c*.

Tabela 1: Cenários de identificação separados por objetivo de utilização.

Cenário	Período	Utilização dos dados
1	14/08/2020 a 23/09/2020	Estimação
	24/09/2020 a 30/11/2020	Validação
2	01/01/2021 a 31/01/2021	Estimação
3	01/03/2021 a 25/03/2021	Estimação

A fim de validar ambos os modelos, foram utilizados os parâmetros estimados na etapa 3 e, comparando os valores deste modelo com o conjunto de dados reais a partir do dia 24 de setembro de 2020, notou-se que o modelo era válido até o dia 30 de novembro de 2020.

No Capítulo 6, serão discutidas e apresentadas algumas hipóteses que justificam o período de validação do modelo e a utilização do mesmo modelo em diferentes intervalos de tempo conforme observado na Tabela 1. Esta tabela detalha os períodos utilizados em cada cenário para estimação dos parâmetros e validação do modelo.

5.2 Controle Ótimo em Modelos Epidemiológicos

A estratégia de controle escolhido para limitar a dinâmica do modelo epidemiológico foi a vacinação. A vacinação é uma maneira de diminuir a quantidade de pessoas suscetíveis a doença, tornando-as imunes ao vírus. Um fator importante ao avaliar esta estratégia são as limitações relacionadas à logística, à economia e à capacidade de vacinação do local. O Problema do Controle Ótimo será solucionado a partir dos modelos identificados em 5.1. O vetor de controle será definido como $u(t)$ e o termo $u(t)S(t)$ representa a quantidade de pessoas suscetíveis vacinadas ao longo do tempo, assume-se que todos os vacinados adquirem imunidade.

Conforme mostrado na Seção 4.3, o Princípio de Pontryagin fornece as condições necessárias que uma solução ótima deve satisfazer.

5.2.1 Modelo SIR

O sistema de equações do modelo SIR que descreve a dinâmica populacional com controle por meio de vacinação

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\frac{aS(t)I(t)}{N} - u(t)S(t) \\ \frac{dI}{dt} = \frac{aS(t)I(t)}{N} - bI(t) \\ \frac{dR}{dt} = bI(t) + u(t)S(t) \end{cases}, \quad (5.5)$$

Inicialmente, deve-se determinar o índice de desempenho do modelo. O objetivo desejado é minimizar o total de gastos com vacinas e ao mesmo tempo minimizar o número de infectados.

$$J_{SIR} = \int_{t_0}^{t_f} \alpha I^2(t) + \gamma u^2(t) dt. \quad (5.6)$$

Adotou-se $\alpha = 1$ e $\gamma = 0,5$, que representam o peso de cada variável no índice de desempenho. Com isso, a Hamiltoniana H pode ser definida

$$H_{SIR} = I^2(t) + \frac{1}{2}u^2(t) + \rho_1(t)f_1(x, u, t) + \rho_2(t)f_2(x, u, t) + \rho_3(t)f_3(x, u, t),$$

$$H_{SIR} = I^2(t) + \frac{1}{2}u^2(t) + \rho_1(t) \left[-\frac{aS(t)I(t)}{N} - u(t)S(t) \right] + \rho_2(t) \left[\frac{aS(t)I(t)}{N} - bI(t) \right] + \rho_3(t)[bI(t) + u(t)S(t)]. \quad (5.7)$$

Tendo a Hamiltoniana definida, é necessário encontrar os pontos críticos de H_{SIR} em relação a u , candidatos a ponto de mínimo, a fim de caracterizar o vetor de controle ótimo $u(t)$

$$\frac{\partial H_{SIR}}{\partial u} = u(t) - \rho_1(t)S(t) + \rho_3(t)S(t) = 0, \quad (5.8)$$

$$u(t) = S(t) \cdot [\rho_1(t) - \rho_3(t)]. \quad (5.9)$$

Desta forma, $u(t)$ será ótimo se assumir o valor dado pela Equação 5.9. Para isso, deve-se solucionar o sistema de equações diferenciais dos coestados. As Equações 5.10 representam as equações de coestado formuladas de acordo com o Teorema 1. Logo,

$$\begin{cases} \frac{d\rho_1}{dt} = -[-aI(t)\rho_1(t) - u(t)\rho_1(t) + aI(t)\rho_2(t) + u(t)\rho_3(t)] \\ \frac{d\rho_2}{dt} = -[-2I(t) - aS(t)\rho_1(t) + (aS(t) - b)\rho_2(t) + b\rho_3(t)] \\ \frac{d\rho_3}{dt} = 0 \end{cases} \quad (5.10)$$

Utilizando o modelo identificado na Seção 5.1, as equações são discretizadas de maneira que para $i = 0, 1, \dots, n - 1$:

$$\begin{aligned} S_{i+1} &= S_i + \frac{h}{2}(k_{S,1} + k_{S,2}), \\ I_{i+1} &= I_i + \frac{h}{2}(k_{I,1} + k_{I,2}), \\ R_{i+1} &= R_i + \frac{h}{2}(k_{R,1} + k_{R,2}), \end{aligned} \quad (5.11)$$

E para $j = n, n - 1, \dots, 1$:

$$\begin{aligned} \rho_{1,j-1} &= \rho_{1,j} - \frac{h}{2}(k_{\rho_1,1} + k_{\rho_1,2}), \\ \rho_{2,j-1} &= \rho_{2,j} - \frac{h}{2}(k_{\rho_2,1} + k_{\rho_2,2}), \\ \rho_{3,j-1} &= \rho_{3,j} - \frac{h}{2}(k_{\rho_3,1} + k_{\rho_3,2}). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Os sistemas de equações das variáveis de estado e coestado são dependentes e as condições de contorno envolvidas são $S(t_0) = S_0$, $I(t_0) = I_0$, $R(t_0) = R_0$, $\rho_1(t_f) = 0$, $\rho_2(t_f) = 0$, $\rho_3(t_f) = 0$. O algoritmo para solucionar o PCO foi baseado em Lenhart e Workman (2007), através do método de varredura de avanço e retorno visto na Subseção 4.4. Os Códigos 3, 4, 5 e 6 demonstram a rotina completa para obtenção do controle ótimo do modelo SIR. Nesta seção, a rotina foi dividida em quatro partes para facilitar o entendimento de cada passo.

Código 3: Determinação do controle ótimo para o modelo SIR utilizando o Princípio de Pontryagin - Parte 1

```
1 %1) Funcao que estima os parametros do modelo SIR
2 [rate, y, N, ti_data, tf_data, t, date0] = ...
```



```

        SIR_Parameters_Estimation_COVID_V2();
3  %rate: taxa de transmissao, taxa de recuperacao
4  %N: populacao total
5  %y: vetor SIR, curva utilizando os parametros estimados
6  %ti_data, tf_data: ponto inicial e final do dataset escolhido ...
        para identificacao do
7  %modelo.
8  %date0: data inicial do dataset
9
10 %2) Resolvendo o Problema do Controle Otimo para Modelo SIR
11
12 %OBS: neste caso, o Controle Otimo e aplicado em ti_data
13
14 Np = 1;
15 test = -1;
16 Δ = 0.001;
17 n = 100;          %tamanho da malha entre t(i) e t(i+1)
18 h2 = 1/n;
19 h = h2/2;
20
21 ti = ti_data; %momento inicial onde o controle sera aplicado
22 tf = ti + 365;
23 T = linspace(ti,tf, n*(tf-ti) + 1);
24
25 %Condicao inicial
26 SIR_0 = y(ti - ti_data +1,:)/N;
27
28 %Parametros
29 a = rate(1); %contagio
30 b = rate(2); %cura
31 e = 1; %eficacia da vacina
32
33 %Indice J = int[ alfa*I^2 + gamma*u^2];
34 alfa = 1;
35 gamma = 0.5;
36 max_u = 1; %Restricao de u
37
38 %Matrizes para:
39 % u: controle
40 % xi: estados - SIR
41 % pi: coestados - "rho"
42

```

```

43 u = zeros(1,n*(tf-ti) + 1);
44 x1 = zeros(1,n*(tf-ti) + 1);
45 x2 = zeros(1,n*(tf-ti) + 1);
46 x3 = zeros(1,n*(tf-ti) + 1);
47
48 x1(1) = SIR_0(1);
49 x2(1) = SIR_0(2);
50 x3(1) = SIR_0(3);
51
52 p1 = zeros(1,n*(tf-ti) + 1);
53 p2 = zeros(1,n*(tf-ti) + 1);
54 p3 = zeros(1,n*(tf-ti) + 1);
55
56 %Condicao de transversalidade
57 p1(n+1) = 0;
58 p2(n+1) = 0;
59 p3(n+1) = 0;

```

A primeira etapa do código é destinada a declarar as variáveis que serão utilizadas no método numérico. A linha 7 do código refere-se a função de estimação de parâmetros do modelo, visto que o problema do controle ótimo será solucionado a partir dos parâmetros obtidos na estimação. As linhas 26 e 27 trazem o horizonte de controle o qual o sistema será submetido. Da linha 43 à 64, são declaradas as matrizes e condições de contorno dos estados e coestados do sistema.

Código 4: Determinação do controle ótimo para o modelo SIR utilizando o Princípio de Pontryagin - Parte 2

```

1 while(test < 0)
2
3   oldu = u;
4
5   oldx1 = x1;
6   oldx2 = x2;
7   oldx3 = x3;
8
9   oldp1 = p1;
10  oldp2 = p2;
11  oldp3 = p3;
12

```

```

13 %a) Metodo de Runge-Kutta de ordem 2 para frente
14 for i = 1:n*(tf-ti)
15
16 k11 = - a*(x1(i))*(x2(i))/Np - e*u(i)*(x1(i));
17 k12 = -b*(x2(i)) + a*(x1(i))*(x2(i))/Np;
18 k13 = e*u(i)*x1(i) + b*(x2(i));
19
20 k21 = - a*(x1(i)+h2*k11)*(x2(i)+h2*k12)/Np - ...
        (0.5*e*(u(i+1)+u(i))*(x1(i)+h2*k11));
21 k22 = -b*(x2(i)+h2*k12) + a*(x1(i)+h2*k11)*(x2(i)+h2*k12)/Np;
22 k23 = 0.5*e*(u(i+1)+u(i))*(x1(i)+h2*k11)+ b*((x2(i)+h2*k12));
23
24 x1(i+1) = x1(i) + (h)*(k11+k21);
25 x2(i+1) = x2(i) + (h)*(k12+k22);
26 x3(i+1) = x3(i) + (h)*(k13+k23);
27 end

```

A segunda etapa inicia-se a discretização das equações de estado a partir das condições e parâmetros previamente estabelecidos.

Código 5: Determinação do controle ótimo para o modelo SIR utilizando o Princípio de Pontryagin - Parte 3

```

1 %b) Metodo de Runge-Kutta de ordem 2 para tras
2 for i = 1:n*(tf-ti)
3 j = n*(tf-ti) + 2 - i;
4
5 k11 = p1(j)*(a*x2(j)/Np + e*u(j))- a*x2(j)*p2(j)-e*u(j)*p3(j);
6 k12 = -2*alfa*x2(j)+p1(j)*a*x1(j)/Np-p2(j)*(a*x1(j)-b)-p3(j)*b;
7 k13 = 0;
8
9 k21 = (p1(j)-h2*k11)*(a*(x2(j-1)+x2(j))/2/Np + 0.5*e*(u(j) + ...
        u(j-1)))- a*(x2(j-1)+x2(j))/2*(p2(j)-h2*k12)-0.5*e*(u(j) + ...
        u(j-1))*(p3(j)-h2*k13);
10 k22 = ...
        -2*(x2(j-1)+x2(j))/2+(p1(j)-h2*k11)*a*(x1(j-1)+x1(j))/2/Np ...
        -(p2(j)-h2*k12)*(a*(x1(j-1)+x1(j))/2-b)-(p3(j)-h2*k13)*b;
11 k23 = 0;
12
13
14 p1(j-1) = p1(j)-(h)*(k11+k21);
15 p2(j-1) = p2(j)-(h)*(k12+k22);

```

```

16 p3(j-1) = p3(j) - (h) * (k13+k23);
17 end

```

A terceira etapa consiste na discretização das equações de coestado, começando por t_f .

Código 6: Determinação do controle ótimo para o modelo SIR utilizando o Princípio de Pontryagin - Parte 4

```

1 %Caracterizacao de u --> dH/du = 0
2 u1 = min(max(0, (p1.*x1-p3.*x1)/(2*0.5*e)), max_u);
3
4 %Verificacao de convergencia
5
6 u = 0.5*(u1 + oldu);
7
8 temp1 = Δ*sum(abs(u)) - sum(abs(oldu-u));
9 temp21 = Δ*sum(abs(x1)) - sum(abs(oldux1-x1));
10 temp22 = Δ*sum(abs(x2)) - sum(abs(oldux2-x2));
11 temp23 = Δ*sum(abs(x3)) - sum(abs(oldux3-x3));
12 temp31 = Δ*sum(abs(p1)) - sum(abs(oldep1-p1));
13 temp32 = Δ*sum(abs(p2)) - sum(abs(oldep2-p2));
14 temp33 = Δ*sum(abs(p3)) - sum(abs(oldep3-p3));
15
16 test = min(temp1, min(temp21, min(temp22, ...
    min(temp23, min(temp31, min(temp32, temp33))))));
17 end

```

Com os resultados do método numérico, o vetor de controle u é caracterizado conforme a equação 5.9 pelo Princípio de Pontryagin. Em seguida, é verificada a convergência dos valores de $u, S, I, R, \rho_1, \rho_2, \rho_3$ a partir do erro relativo de cada vetor por meio das Equações 4.27 e 4.28.

5.2.2 Modelo SIRD

O modelo SIRD com controle por meio de vacinação é descrito conforme o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = -\frac{aS(t)I(t)}{N} - u(t)S(t) \\ \frac{dI}{dt} = \frac{aS(t)I(t)}{N} - bI(t) - cI(t) \\ \frac{dR}{dt} = bI(t) + u(t)S(t) \\ \frac{dD}{dt} = cI(t) \end{array} \right. . \quad (5.13)$$

Para o modelo SIRD descrito pelas Equações 5.13, o índice de desempenho J_{SIRD} busca minimizar o custo da vacinação e também minimizar o total de infectados e óbitos conforme Equação 5.14:

$$J_{SIRD} = \int_{t_0}^{t_f} \alpha I^2(t) + \beta D^2(t) + \gamma u^2(t) dt. \quad (5.14)$$

Os valores para α , β e γ adotados foram, respectivamente, 1, 1 e 0,5, de forma que o peso do custo de infectados e óbitos é mais relevante para o índice. Em seguida, a Hamiltoniana H_{SIRD} é definida por

$$H_{SIRD} = I^2(t) + D^2(t) + \frac{1}{2}u^2(t) + \rho_1(t)f_1(x, u, t) + \rho_2(t)f_2(x, u, t) \\ + \rho_3(t)f_3(x, u, t) + \rho_4(t)f_4(x, u, t), \quad (5.15)$$

$$H_{SIRD} = I^2(t) + D^2(t) + \frac{1}{2}u^2(t) + \rho_1(t) \left[-\frac{aS(t)I(t)}{N} - u(t)S(t) \right] + \\ + \rho_2(t) \left[\frac{aS(t)I(t)}{N} - bI(t) - cI(t) \right] + \rho_3(t) [bI(t) + u(t)S(t)] + \\ + \rho_4(t)cI(t). \quad (5.16)$$

Logo, para obter a equação do controle ótimo $u^*(t)$, basta minimizar H_{SIRD} em relação a u

$$\frac{\partial H}{\partial u} = u(t) - \rho_1(t)S(t) + \rho_3(t)S(t) = 0, \quad (5.17)$$

$$u(t) = S(t) (\rho_1(t) - \rho_3(t)). \quad (5.18)$$

A Equação 5.18 representa o valor ótimo de u para que o índice de desempenho J_{SIRD} seja minimizado. Sendo assim, ao encontrar $S(t)$, $\rho_1(t)$ e $\rho_2(t)$, é possível determinar o vetor ótimo $u^*(t)$. A partir do Princípio de Pontryagin, é possível determinar o sistema de equações diferenciais de coestado para o modelo SIRD, o sistema assume a seguinte forma:

$$\begin{cases} \frac{d\rho_1}{dt} = -[-aI(t)\rho_1(t) - u(t)\rho_1(t) + aI(t)\rho_2(t) + u(t)\rho_3(t)] \\ \frac{d\rho_2}{dt} = -[-2I(t) - aS(t)\rho_1(t) + (aS(t) - b - c)\rho_2(t) + b\rho_3(t) + c\rho_4(t)] \\ \frac{d\rho_3}{dt} = 0 \\ \frac{d\rho_4}{dt} = 2D(t) \end{cases} \quad (5.19)$$

Para encontrar a solução das equações de estado e coestado, são utilizadas as Equações 5.11 e 5.12 mostradas no modelo SIR e, também, as Equações 5.20 e 5.21 que representam a variável de estado e coestado dos órbitos, respectivamente:

$$D_{i+1} = D_i + \frac{h}{2}(k_{D,1} + k_{D,2}), \quad i = 0, 1, \dots, n-1, \quad (5.20)$$

$$\rho_{4,j-1} = \rho_{4,j} - \frac{h}{2}(k_{\rho_4,1} + k_{\rho_4,2}), \quad j = n, n-1, \dots, 1. \quad (5.21)$$

O algoritmo utilizado para obtenção do controle ótimo para o modelo SIRD pode ser visto no Apêndice B e possui a mesma estrutura do algoritmo apresentado no modelo SIR, exceto pelas alterações realizadas nos sistemas de equações e na quantidade de variáveis estimadas. O modelo SIRD acrescenta a taxa de mortalidade c e a variável de estado D . No próximo capítulo, serão apresentados os resultados obtidos neste trabalho.

6 RESULTADOS

Este capítulo consiste em apresentar e discutir os resultados obtidos a partir dos métodos implementados e da rotina mostrada no Capítulo 5. Os resultados estão divididos em estimação dos parâmetros, validação do modelo e vacinação ótima. Na estimação de parâmetros, serão discutidos e apresentados alguns dos fatores que afetam a dinâmica e as notificações da COVID-19 no Amazonas e, em seguida, os resultados dos parâmetros estimados em diferentes meses de 2020 e 2021. Já na validação do modelo, serão mostrados os parâmetros, as curvas obtidas de S, I, R e D em comparação com as notificações reais e, também, o erro quadrático médio em relação aos dados de validação. Por fim, será discutido o resultado obtido a partir da vacinação ótima aplicada no cenário estimado mais recente..

6.1 Estimação dos parâmetros

Uma das dificuldades no ajuste de curva, utilizando os dados da COVID-19 no Amazonas, foi a escolha do intervalo de tempo que fornecesse o melhor resultado. Esta dificuldade ocorreu em virtude da confiabilidade e estabilidade das notificações devido a variação do comportamento da população. Quando se avalia os dados da COVID-19 no Amazonas, é necessário levar em consideração que eles estão sujeitos a alguns fatores que afetam principalmente a taxa de transmissão do vírus, entre eles:

- a) Mudança nos protocolos de saúde. Por exemplo, uso de máscara se tornou obrigatório a partir de julho em Manaus (MANAUS, 2020);
- b) Índice de isolamento da população: na Figura 4, é feita uma amostragem do percentual da população que se encontra em isolamento. É possível realizar uma análise do índice de isolamento em paralelo aos eventos ocorridos no Amazonas através da Figura 5 que apresenta o total de casos acumulados ao longo do tempo

e os eventos que ocorreram ao longo do tempo. Percebe-se que os momentos em que este índice é mais elevado são nos períodos em que saíram os Decretos Nº 42.099 (AMAZONAS, 2020a) e Nº 43.303 (AMAZONAS, 2020b);

Figura 4: Índice de Isolamento Social.

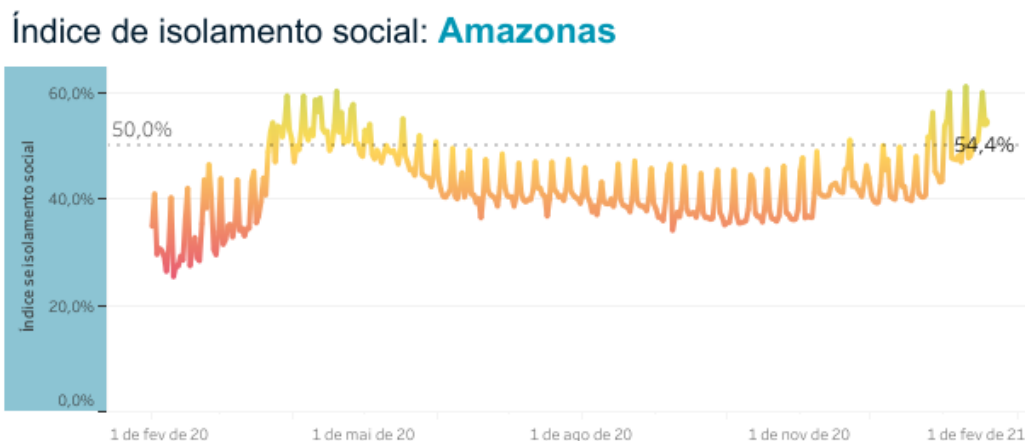
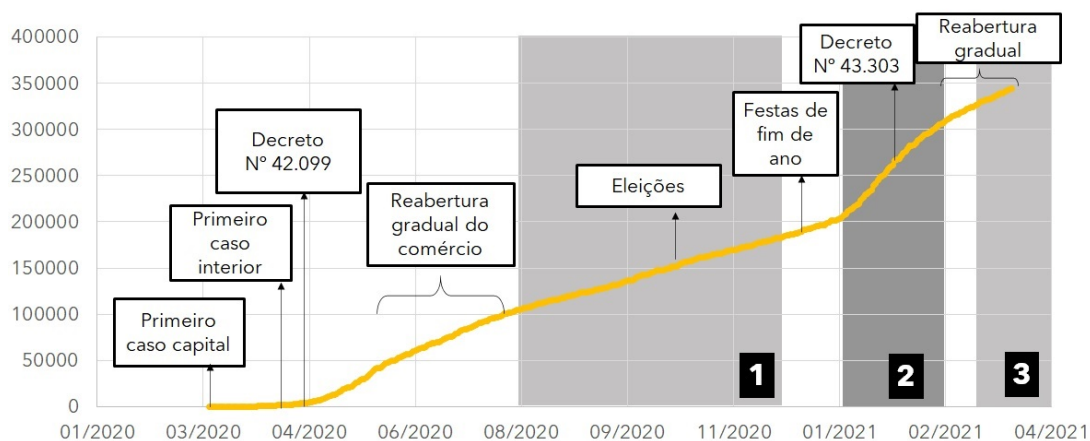


Figura 5: Total de casos de COVID-19 acumulados e a cronologia dos eventos ocorridos no Amazonas de março de 2020 a abril de 2021.

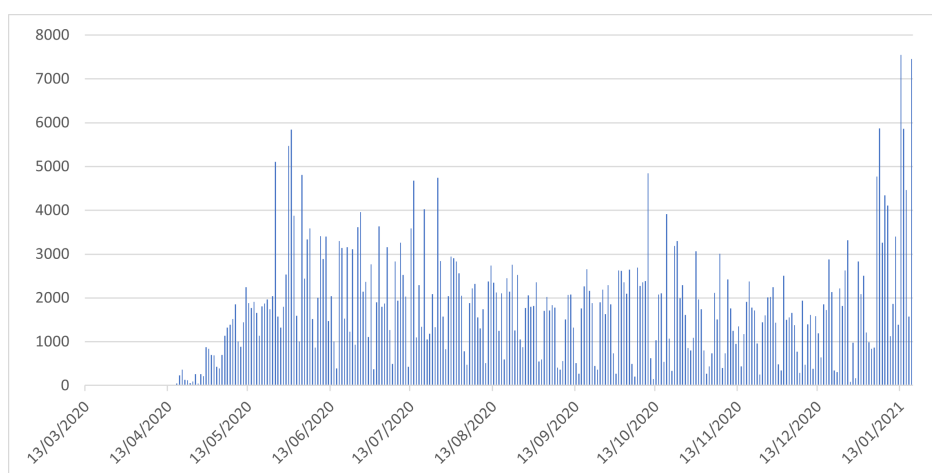


- c) Fechamento e reabertura do comércio: em 2020, a reabertura do comércio foi feita em etapas seguindo alguns critérios estabelecidos pelo Governo do Amazonas, entre eles o número de trabalhadores e clientes por cidadãos em circulação, nível de aglomeração de pessoas, vulnerabilidade do segmento perante a crise econômica, impactos na cadeia produtiva e na arrecadação. O período de reabertura pode ser visto na Figura 5. O primeiro ciclo ocorreu no dia 01 de junho de

2020, o segundo em 15 de junho de 2020, o terceiro em 29 de junho de 2020 e o último no dia 06 de julho de 2020 (Governo do Estado do Amazonas, 2020);

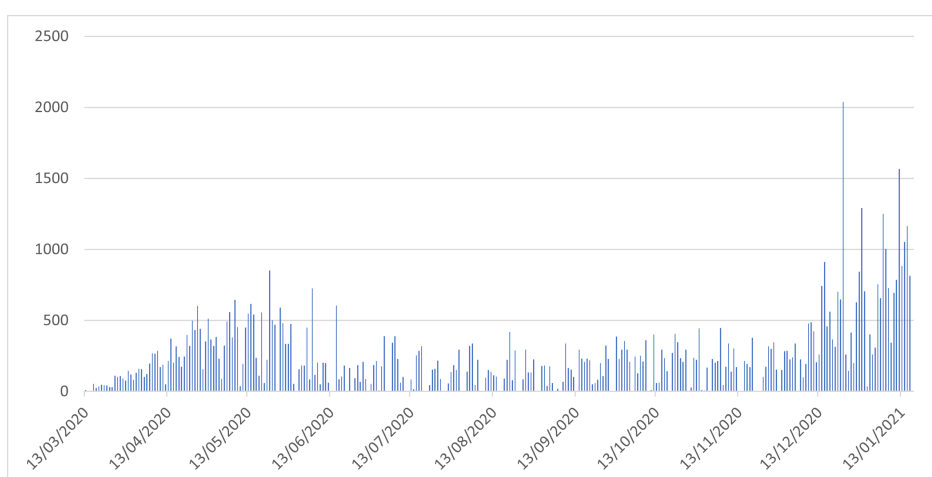
- d) Testagem: a testagem é o instrumento de medida das notificações, nos primeiros meses, houve um baixo percentual da população testada. *Dados do Ministério da Saúde mostram que, até 16 de abril, 8.072, ou 1,69% dos 476.272 testes laboratoriais para COVID-19 distribuídos aos Estados, foram destinados ao Amazonas.*(BBC, 2020)

Figura 6: Quantidade de testes realizados por dia: Teste Rápido.



Fonte: Fundação de Vigilância em Saúde do Amazonas.

Figura 7: Quantidade de testes realizados por dia: RT - PCR.



Fonte: Fundação de Vigilância em Saúde do Amazonas.

- e) Classificação dos óbitos: durante os primeiros meses de circulação do coronavírus no Amazonas, notou-se um aumento de mortes por Síndrome Respiratória

Aguda Grave (SRAG) e um aumento da média de óbitos em relação ao ano anterior, entretanto, estes óbitos não foram atribuídos ao coronavírus. No segundo semestre de 2020, houve uma reclassificação de óbitos por SRAG que estavam em investigação conforme novos critérios do Ministério da Saúde. Dos 654 óbitos ocorridos nos meses de Abril e Maio de 2020 em investigação pela Secretaria Municipal de Saúde de Manaus, 345 foram reclassificados (FVS-AM, 2020).

Uma das hipóteses ao adotar os modelos SIR e SIRD, é que a população deve ser homogênea e seus os parâmetros são constantes. A partir disso, entende-se que todos os pontos de intervenção na dinâmica da população (isolamento social, fechamento e reabertura do comércio, mudanças na medição de casos, etc) geram variação nos parâmetros do modelo. Desta forma, os parâmetros foram estimados em três cenários:

- Cenário 1: agosto de 2020 a novembro de 2020;
- Cenário 2: janeiro de 2021;
- Cenário 3: março de 2021.

6.1.1 Modelo SIR

A Tabela 2 e as Figuras 8, 9 e 10 mostram os resultados obtidos dos parâmetros estimados e das curvas de S, I e R para cada cenário de estimação. Estes resultados sustentam a hipótese de que há alteração do modelo dependendo do comportamento da população. O período de agosto de 2020 a novembro de 2020 foi o maior tempo em que a população manteve constante seu índice de isolamento social (Figura 4), nesse período, já havia ocorrido a abertura gradual do comércio e estavam consolidadas as medidas dos protocolos de saúde.

Comparando os resultados dos parâmetros de agosto de 2020 a novembro de 2020 com os resultados de janeiro de 2021, a taxa de reprodutibilidade basal (o número de casos secundários causado por um indivíduo infectado) tem um aumento de 6,27%, ou seja, há um aumento na velocidade de propagação da doença e consequentemente no número de casos. Este aumento pode ser explicado como resultado de alguns eventos que ocorreram no último trimestre de 2020 como eleições e festas de fim de ano. A exemplo, em Barreto et al. (2021), é discutido a diminuição da permanência domiciliar no período das festas de fim de ano.

Tabela 2: Parâmetros estimados para diferentes cenários - Modelo SIR.

Parâmetros	ago/2020 a nov/2020	jan/2021	mar/2021
a	0,0395	0,0737	0,0330
b	0,0335	0,0588	0,0281
$R_o = a/b$	1,179	1,253	1,177

Manaus registrou um aumento de 28,9% no número de internações por COVID-19 em dezembro. (...) O governo afirmou que o aumento de casos e internações está acontecendo por conta de aglomerações causadas nas eleições e em festas clandestinas da capital, conforme investigação epidemiológica (G1, 2020).

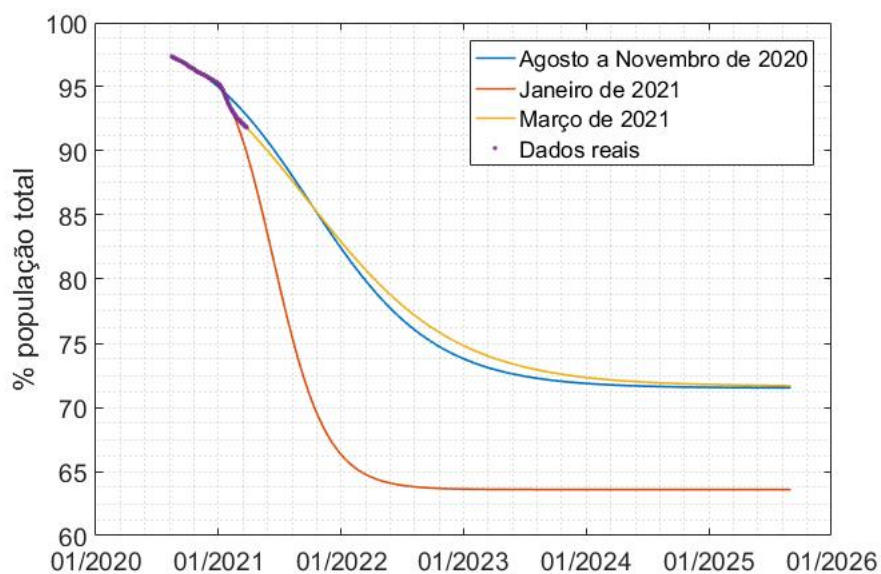
Vale ressaltar que os efeitos desses eventos na dinâmica do modelo não são perceptíveis instantaneamente em virtude do tempo de incubação¹ do vírus que, segundo a Organização Mundial de Saúde (OMS), varia de 1 a 14 dias. Logo, mesmo que esses eventos tenham ocorrido no último trimestre de 2020, nota-se o reflexo em janeiro de 2021. Além disso, uma nova variante do vírus foi identificada no Amazonas, a qual apresentou um maior potencial de transmissão.

(...) alta circulação de pessoas e o aumento da propagação do vírus Sars-CoV-2 tem favorecido o surgimento de ‘variantes de preocupação’ no Brasil, como é o caso da variante P1, identificada no Amazonas. O comunicado alerta para um cenário preocupante que alia o perfil potencialmente mais transmissível dessas variantes à ausência de medidas que possam ajudar a conter a propagação e circulação do vírus (Agencia Fiocruz de Noticias, 2021).

As Figuras 8 a 14 apresentam as curvas estimadas pelo MMQ para os três cenários de identificação. Para cada cenário, os dados fornecidos para realizar a estimação variaram de acordo com o período analisado. No cenário 1, válido de agosto de 2020 a novembro de 2020, os dados fornecidos foram de 14 de agosto de 2020 a 23 de setembro de 2020. O cenário 2, válido em janeiro de 2021, utilizou os dados referente ao mês em questão. E o cenário 3, da mesma forma, utilizou os dados referentes a março de 2021. Na Seção 6.2, serão detalhados os resultados da validação dos modelos a partir do cenário 1.

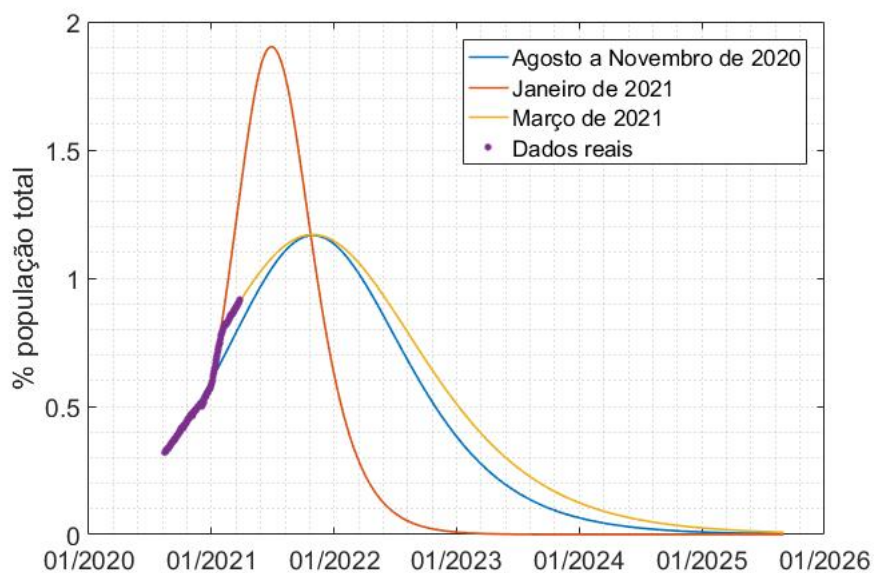
¹o tempo entre a infecção pelo vírus e o início dos sintomas da doença.

Figura 8: Comparação entre suscetíveis $S(t)$ estimados para os três cenários de identificação do modelo SIR e, em roxo, os dados reais dos suscetíveis.



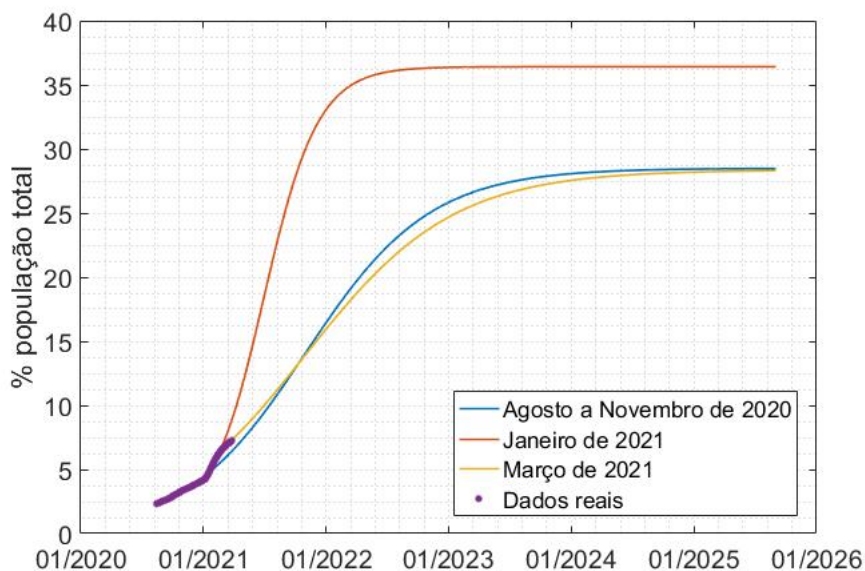
Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 9: Comparação entre infectados $I(t)$ estimados para os três cenários de identificação do modelo SIR e, em roxo, os dados reais dos infectados.



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 10: Comparação entre removidos $R(t)$ estimados para os três cenários de identificação do modelo SIR e, em roxo, os dados reais dos removidos (somatório de recuperados e óbitos).



Fonte: Elaborado pela autora.

Na Figura 9, é possível notar o pico de infecção e o tempo final para cada cenário estimado. A curva em vermelho representa a curva de $I(t)$ caso a população tivesse mantido a dinâmica de janeiro de 2021. Neste caso, o pico de infecção ocorreria em julho de 2021, atingindo 1,9% do total da população no Amazonas. Já a curva amarela é uma estimativa partindo da suposição de que a dinâmica permaneceria como em março de 2021 e o pico ocorreria em novembro de 2021, com 1,17% da população. O valor de $I(t)$ tende a zero para os cenários 1 e 3 no segundo semestre de 2025 e, para o cenário 2, no primeiro semestre de 2023. Apesar de haver uma diferença de aproximadamente 2 anos entre o final da epidemia dos cenários 1 e 3 e o cenário 2, a Figura 11 e a Tabela 3 mostram a diferença entre o total de casos final entre os cenários. O cenário 2 apresenta uma diferença de aproximadamente 330 mil casos a mais que os outros cenários, entre recuperados e óbitos.

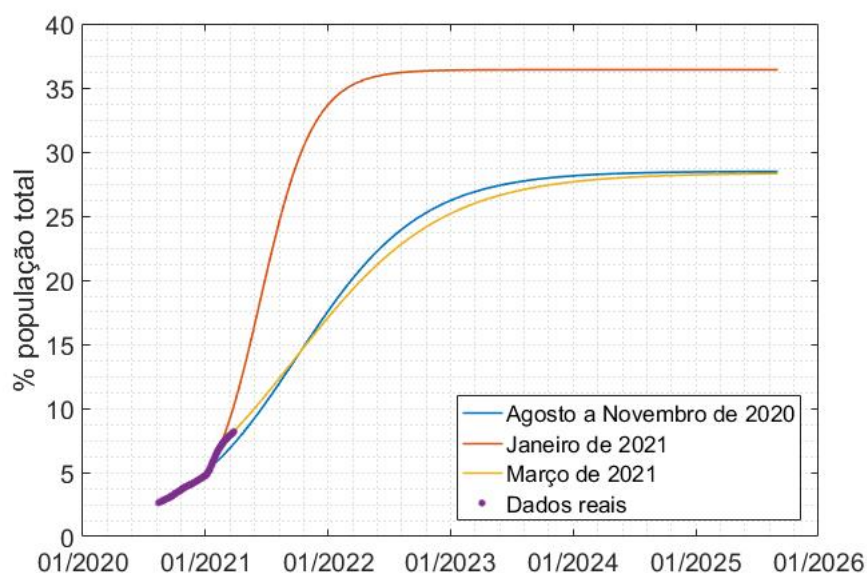
O modelo estimado para o cenário 3 apresenta um total de casos correspondente a 28,31% da população e para o cenário 2, 38,41%. A Figura 11 apresenta as curvas estimadas para cada cenário do total de casos da doença na população. A taxa de reprodução R_o é 6% menor quando comparada ao valor obtido no cenário 2. É possível interpretar este resultado como o reflexo das medidas de restrição de circulação de

Tabela 3: Comparativo do total de casos final estimados entre os três cenários definidos.

Total de Casos Final - Modelo SIR estimado			
Cenário	ago/2020 a nov/2020	jan/2021	mar/2021
<i>%População Total</i>	28,48%	36,41%	28,31%
<i>Absoluto</i>	1.198.200	1.532.000	1.191.200

pessoas adotadas pelo governo (Decreto nº 43.282) em janeiro de 2021, pela Figura 9, percebe-se que o pico de infecção do cenário 3 coincide com o cenário 1.

Figura 11: Comparação entre casos $C(t)$ estimados para os três cenários de identificação do modelo SIR e, em roxo, os dados reais dos casos confirmados.



Fonte: Elaborado pela autora.

6.1.2 Modelo SIRD

As Figuras 12, 13 e a Tabela 4 mostram as curvas e os parâmetros estimados a partir do modelo SIRD. As curvas de $I(t)$ apresentam o mesmo comportamento que no modelo SIR, em que é possível visualizar que o pico de infecção nos cenários 1 e 3 coincide, assim como a taxa de transmissão e, também, comparando o número de casos das Tabelas 3 e 5 e as curvas das Figuras 11 e 14, percebe-se que curva de $C(t)$ do modelo SIRD também apresenta resultado aproximadamente igual ao resultado do modelo SIR quando se olha os cenários 1 e 3. Por outro lado, o resultado da curva $D(t)$

Tabela 4: Parâmetros estimados em diferentes cenários - Modelo SIRD.

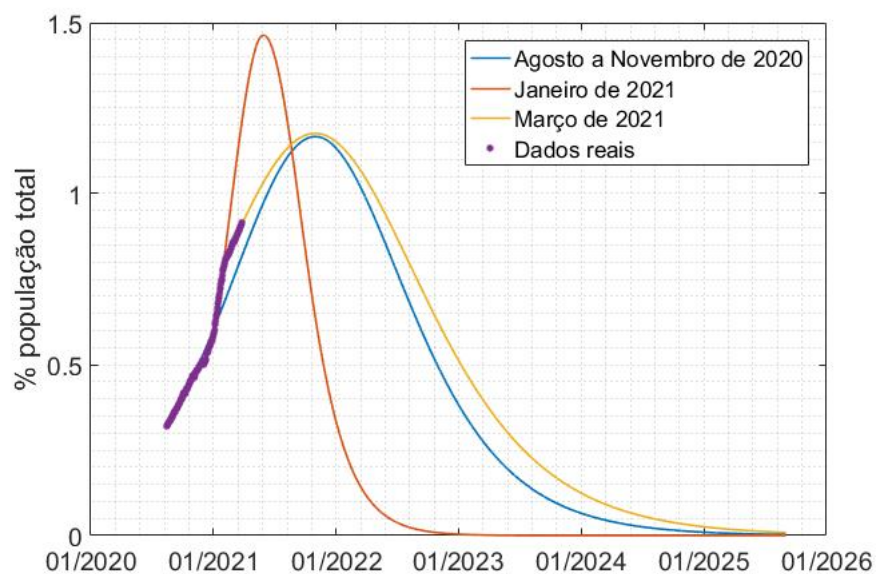
Parâmetros	ago/2020 a nov/2020	jan/2021	mar/2021
a	0,0395	0,0852	0,0331
b	0,0329	0,0675	0,0268
c	0,0006	0,0029	0,0013
$R_o = a/(b + c)$	1,179	1,209	1,177

dos cenários 1 e 3 é diferente.

Na Tabela 4, nota-se a diferença entre a taxa de mortalidade dos diferentes cenários e na Tabela 5, encontra-se o valor total absoluto do número de casos e óbitos. Estes resultados mostram que por mais que a taxa de transmissão e de reprodução nos cenários 1 e 3 sejam próximos, o cenário 3 apresenta um aumento de aproximadamente 120% para a taxa de mortalidade e, conseqüentemente, para o total de mortes. Ou seja, por mais que as medidas de restrição tenham refletido na taxa de transmissão do vírus, mantendo o número de infectados próximo ao valor do modelo estimado em agosto de 2020, isto não ocorre com o número de óbitos, visto que, no modelo estimado em março de 2021, o total de óbitos representaria 1,26% da população do Amazonas.

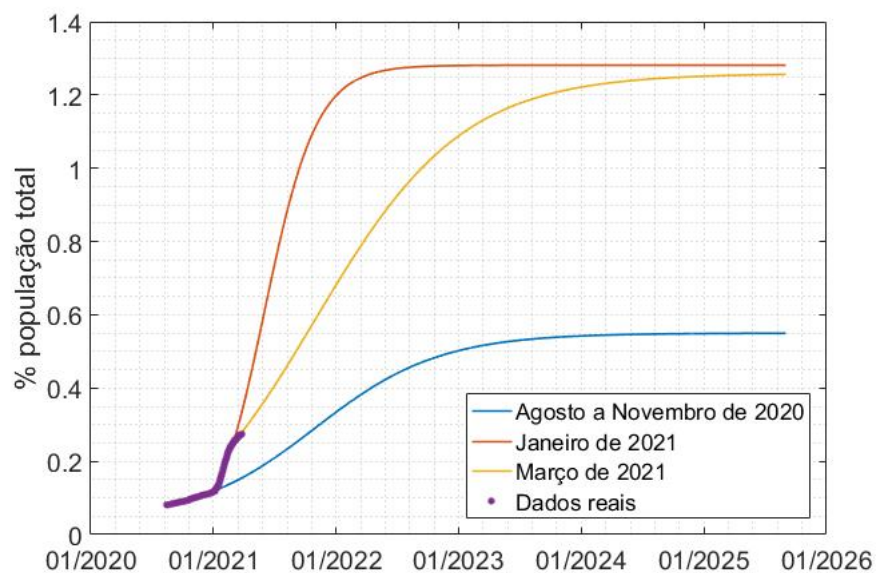
Por se tratar do modelo SIRD, são inseridos os dados reais referentes ao número de óbitos. Desta forma, além do ajuste das curvas $S(t)$, $I(t)$ e $R(t)$, há o ajuste para $D(t)$. Por mais que haja uma redução na quantidade de mortes diárias, justamente por haver uma diminuição de indivíduos infectados, para o MMQ, são fornecidos os valores acumulados diários de D . Logo, como $D(t)$ representa o valor de óbitos acumulados por dia, o total de óbitos em março de 2021 equivale a 3,35% do total de casos deste período. Para janeiro de 2021, o total de óbitos equivale a 2,89% em relação ao total de casos e para novembro de 2020, 2,54%. Ou seja, o total de casos final para o modelo estimado nos cenários 1 e 3 são aproximadamente iguais, entretanto existe uma diferença entre a proporção de óbitos e casos que refletem a relação entre óbitos e casos dos dados fornecidos para a identificação do modelo.

Figura 12: Comparação entre recuperados $I(t)$ estimados para os três cenários de identificação do modelo SIRD e, em roxo, os dados reais dos recuperado.



Fonte: Elaborado pela autora.

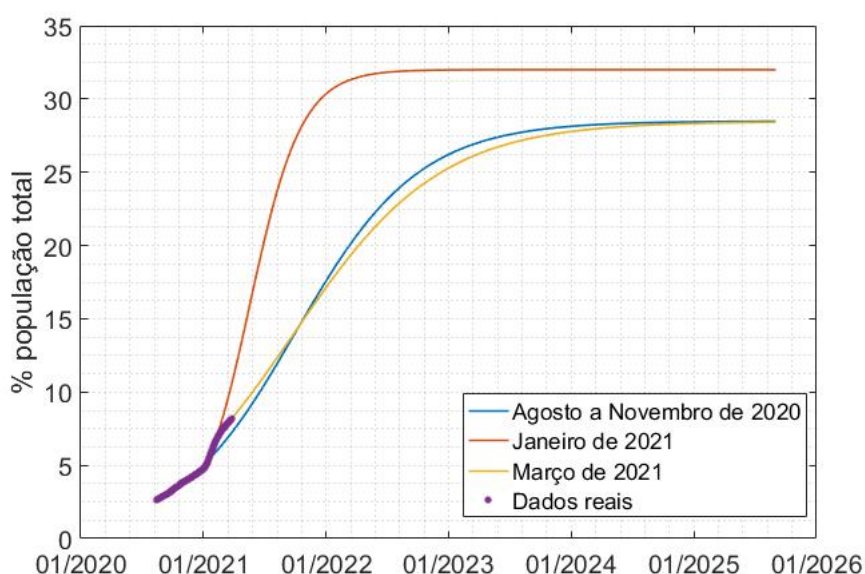
Figura 13: Comparação entre óbitos $D(t)$ estimados para os três cenários de identificação do modelo SIRD e, em roxo, os dados reais dos óbitos confirmados.



Fonte: Elaborado pela autora.

Tabela 5: Comparativo total de casos e óbitos - Modelo SIRD.

Total de Casos e Óbitos Final - Modelo SIRD						
Cenário	ago/2020 a nov/2020		jan/2021		mar/2021	
	Casos	Óbitos	Casos	Óbitos	Casos	Óbitos
<i>%População Total</i>	28,48%	0,55%	31,99%	1,28%	28,42%	1,26%
<i>Absoluto</i>	1.198.200	23.120	1.346.400	53.911	1.195.700	52.661

Figura 14: Comparação entre casos $C(t)$ estimados para três cenários de identificação do modelo SIRD e, em roxo, os dados reais dos casos confirmados.

Fonte: Elaborado pela autora.

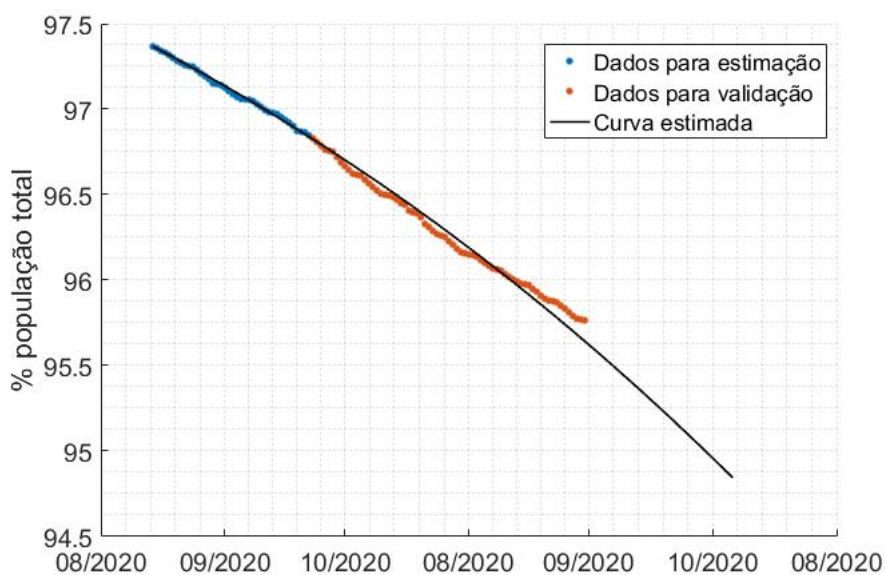
6.2 Validação dos modelos

6.2.1 Modelo SIR

Nas Figuras 15, 16 e 17, são exibidos os resultados das curvas validadas para S, I e R respectivamente. O intervalo de tempo fornecido foi do dia 14 de agosto de 2020 a 23 de setembro de 2020. Este intervalo foi escolhido ao ponderar os fatores mostrados na Seção 6.1 que podem afetar a identificação: maior período em que não houve grandes variações no índice de isolamento social e já havia ocorrido o último ciclo de reabertura do comércio. Utilizando este intervalo, os parâmetros estimados foram $a = 0,0395$, $b = 0,0335$ e $R_o = 1,179$. Observou-se igualmente que o modelo identi-

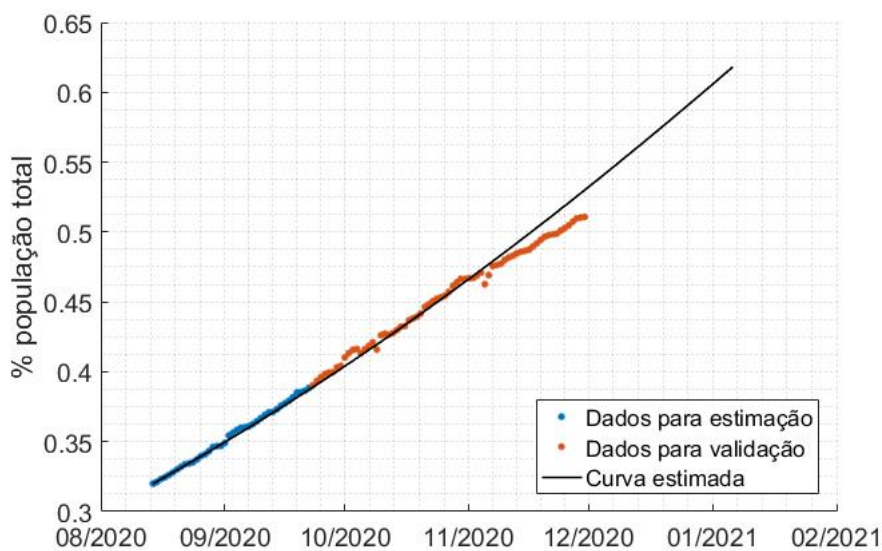
ficado é válido até dia 30 de novembro de 2020. O período de validade do modelo SIR neste cenário pode ser justificado pela alteração no comportamento da população em dezembro, alterando a dinâmica do modelo estimado. Segundo Barreto et al. (2021), há uma diminuição do isolamento social a partir de outubro de 2020, acentuando-se em dezembro de 2020.

Figura 15: Validação Modelo SIR - Suscetíveis.



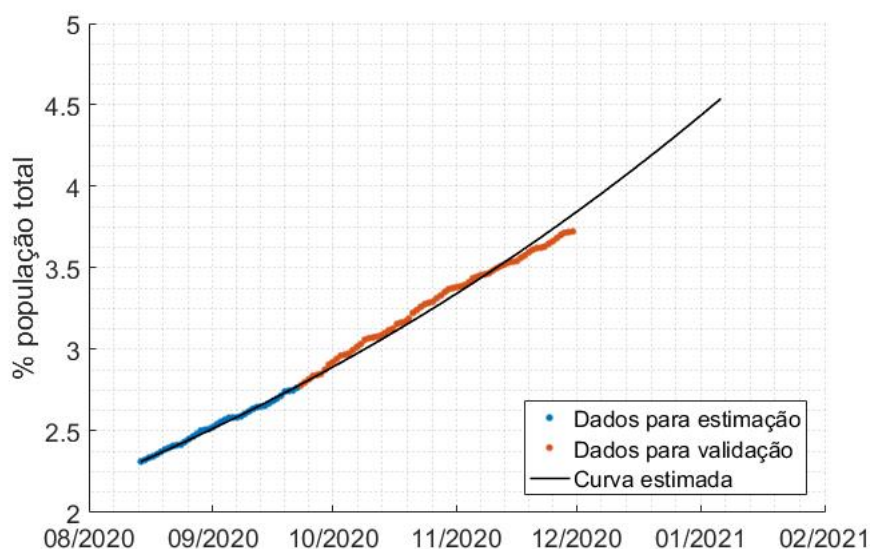
Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 16: Validação Modelo SIR - Infectados.



Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 17: Validação Modelo SIR - Removidos.



Fonte: Elaborado pela autora.

Para quantificar a validade do modelo, foi utilizado o índice de ajuste baseado no erro quadrático médio normalizado (NMSE) entre os dados de validação reais e os estimados. O índice de ajuste (IA) pode variar entre $-\infty$ e 1, sendo que $-\infty$ representa um ajuste ruim e 1 representa um ajuste perfeito. Ele é calculado conforme a Equação 6.1:

$$IA\% = \left[1 - \frac{\|X_{real} - X_{est}\|^2}{\|X_{real} - \bar{X}\|^2} \right] \times 100\%, \quad (6.1)$$

em que X_{real} representa o vetor dos dados reais do problema, X_{est} representa o vetor dos valores estimados e \bar{X} é o vetor cujas coordenadas correspondem à média entre X_{est} e X_{real} . Reafirmando que, para esta validação, foram utilizados dados diferentes dos que foram fornecidos para a estimação dos parâmetros. Ou seja, do intervalo de 14 de agosto a 30 de novembro, os primeiros 40 dias foram utilizados para estimar os parâmetros e os outros 68 dias para validar a curva encontrada. O índice de ajuste (IA) obtido foi de 97,32% para S , 94,83% para I e 97,39% para R (ver Tabela 6).

6.2.2 Modelo SIRD

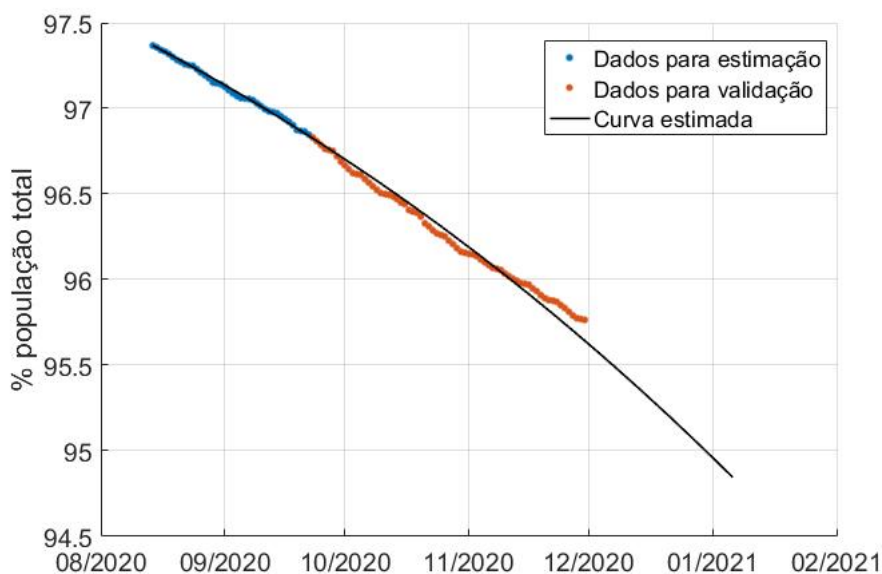
Para o modelo SIRD, foram utilizados os mesmos critérios do modelo SIR para escolha de intervalo de tempo fornecido para a estimativa e para a validação. As Fi-

Tabela 6: Índice de ajuste baseado no NMSE entre os dados estimados e os dados de reais - Modelo SIR.

IA - Modelo SIR		
S	I	R
97,32%	94,83%	97,39%

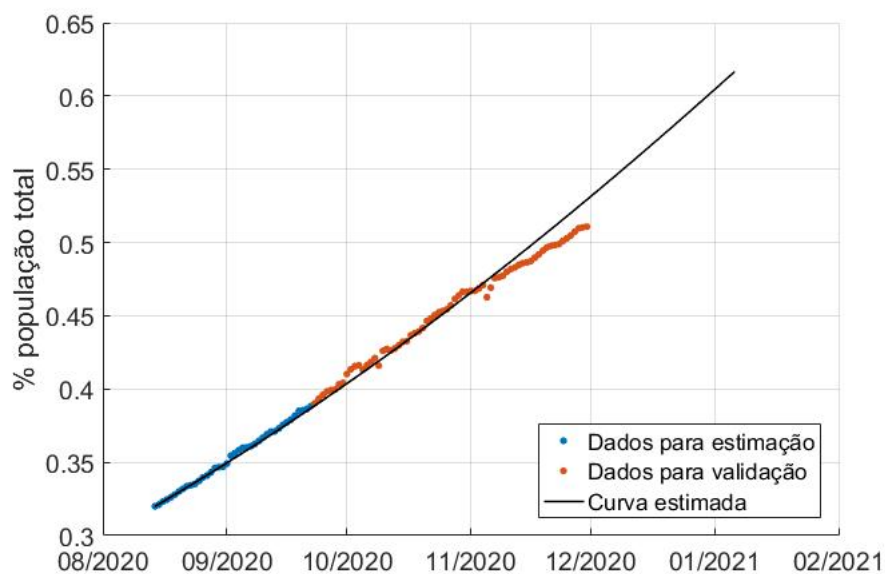
guras 18, 19, 20 e 21 exibem a comparação da curva estimada com os dados reais. Os índices de ajuste baseados no NMSE para os compartimentos do modelo SIRD podem ser vistos na Tabela 7. O IA foi calculado de acordo com a Equação 6.1 e apresentou os seguintes resultados: 97,34% para S , 95,29% para I , 97,25% para R e 97,48% para D . Os parâmetros estimados foram $a = 0,0395$, $b = 0,0329$, $c = 0,0006$ e $R_o = 1,179$, válidos de 14 de agosto de 2020 a 30 de novembro de 2020.

Figura 18: Validação Modelo SIRD - Suscetíveis.



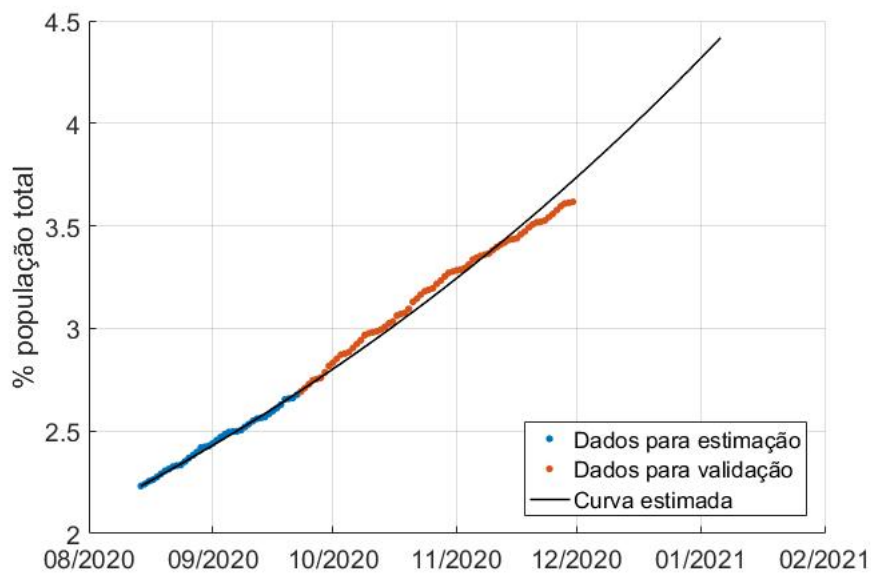
Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 19: Validação Modelo SIRD - Infectados.



Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 20: Validação Modelo SIRD - Recuperados.



Fonte: Elaborado pela autora.

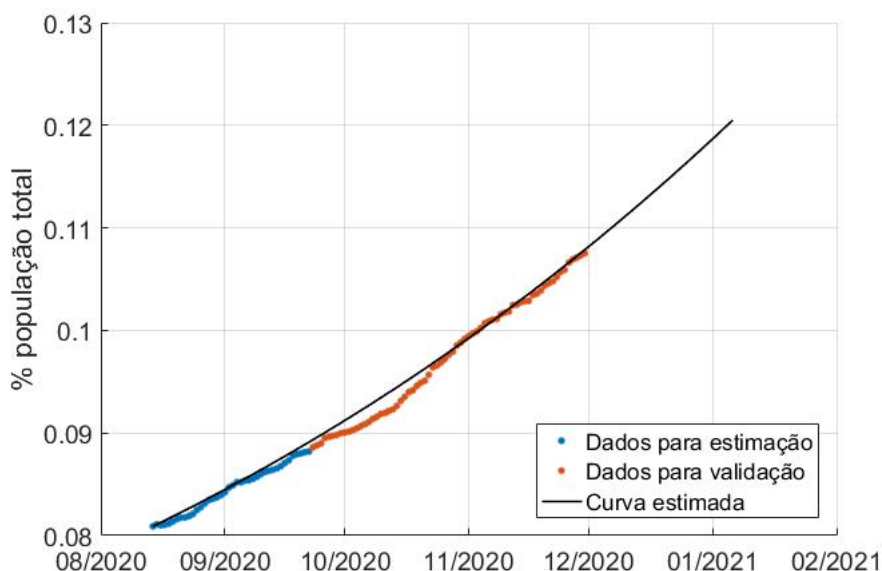
Tabela 7: Índice de ajuste baseado no NMSE entre os dados estimados e os dados de reais - Modelo SIRD.

IA - Validação SIRD			
S	I	R	D
97,34%	95,29%	97,25%	97,48%

Tabela 8: Parâmetros estimados no período de validação.

Parâmetros	Modelo SIR	Modelo SIRD
<i>a</i>	0,0395	0,0395
<i>b</i>	0,0335	0,0329
<i>c</i>	-	0,0006
R₀	1,179	1,179

Figura 21: Validação Modelo SIRD - Óbitos.



Fonte: Elaborado pela autora.

A Tabela 8 apresenta os parâmetros estimados de ambos os modelos discutidos no presente trabalho. Percebe-se que as taxas de transmissão assumem o mesmo valor e a taxa de remoção do modelo SIR é equivalente a soma das taxas de recuperação e mortalidade do modelo SIRD.

Tabela 9: Constantes utilizadas no PCO.

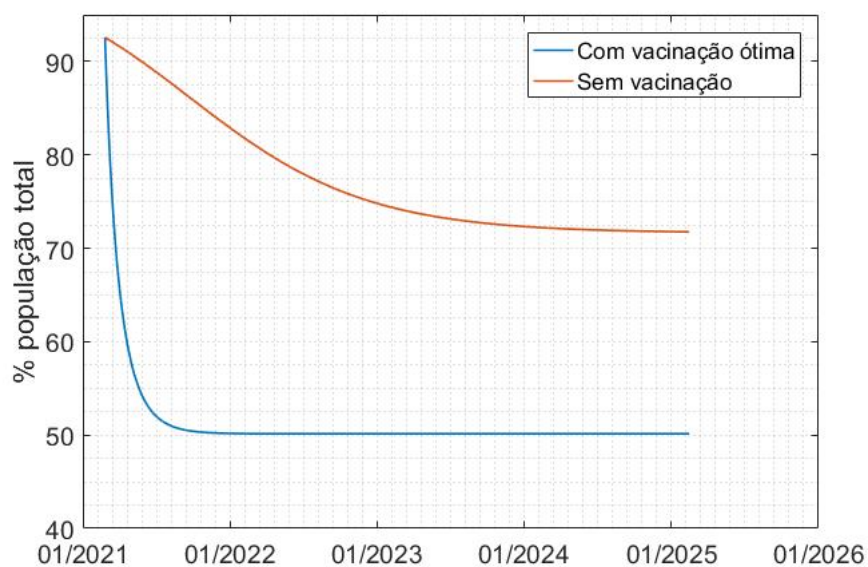
Parâmetros	Modelo SIR	Modelo SIRD
a	0,0330	0,0331
b	0,0281	0,0268
c	-	0,0013
T	365	
n	100	
N	4207714	
t_0	01/03/2020	

6.3 Vacinação Ótima

Para encontrar o controle ótimo (vacinação ótima) para os modelos SIR e SIRD, foi utilizado o algoritmo mostrado na Seção 5.2, sujeito às constantes mostradas na Tabela 9 em que as taxas de transmissão, recuperação e mortalidade foram estimadas na identificação do modelo do cenário 3. T corresponde ao horizonte de controle do sistema, n é o número de subdivisões do intervalo $[t_i, t_{i+1}]$, N é o total da população do Amazonas e t_0 é o tempo inicial de atuação do controle ótimo. A escolha deste cenário se deu pelo fato de ser o cenário que representa o modelo identificado mais recente entre os cenários estudados.

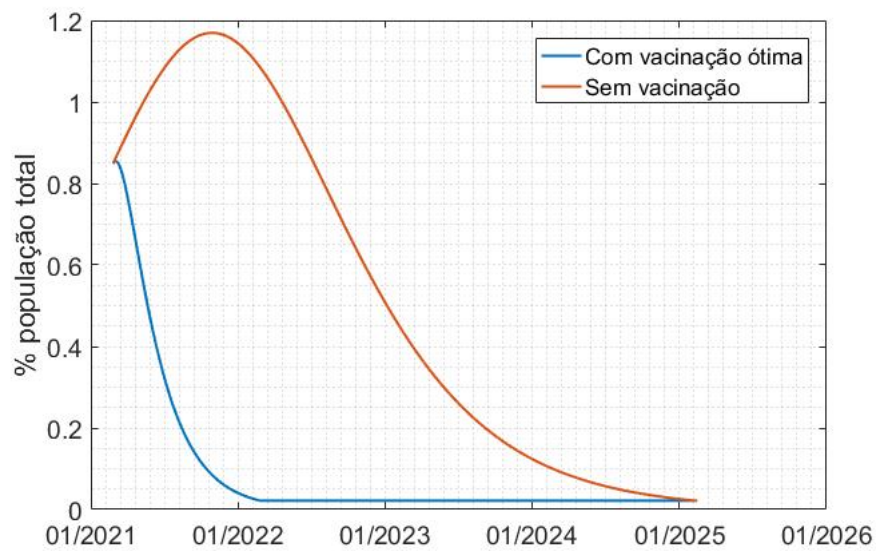
As Figuras 22, 23 e 24 apresentam as curvas de $S(t)$, $I(t)$, $R(t)$ sem e com controle ótimo para o modelo SIR, partindo da suposição de que a vacinação possui uma eficácia de 100%, ou seja, todos os indivíduos vacinados se tornarão imunizados. A Tabela 10 mostra o valor total de casos final, o pico da infecção e a população imunizada. Vale ressaltar que o pico da infecção é o máximo de infectados diários em um determinado momento, ele ocorre quando $\frac{aS(t)}{b} = 0$ e a partir deste ponto, a variação de $I(t)$ se torna negativa.

Figura 22: Gráfico de Suscetíveis sem e com Controle Ótimo - Modelo SIR.



Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 23: Gráfico de Infectados sem e com Controle Ótimo - Modelo SIR.

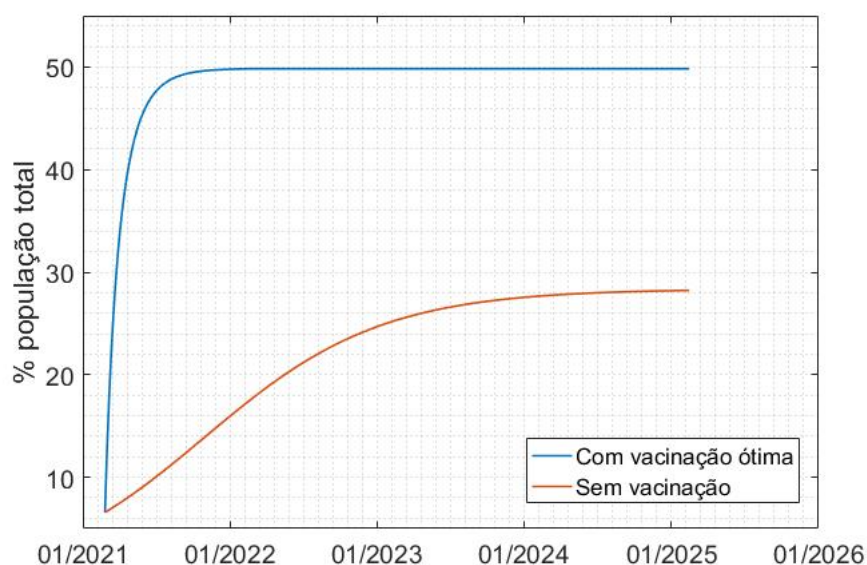


Fonte: Elaborado pela autora.

Tabela 10: Comparação do modelo SIR sem e com Controle Ótimo no intervalo de 365 dias.

Modelo SIR		
	Sem Controle Ótimo	Com Controle Ótimo
Total de casos	28,31%	8,91%
Pico de infecção	1,17%	0,85%
População imune (R)	4,64%	49,83%

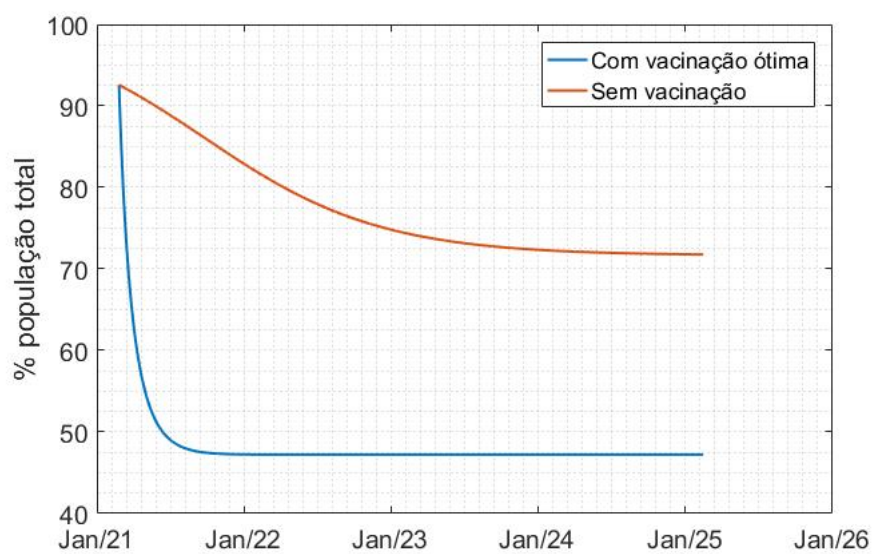
Figura 24: Gráfico de Recuperados sem e com Controle Ótimo - Modelo SIR.



Fonte: Elaborado pela autora.

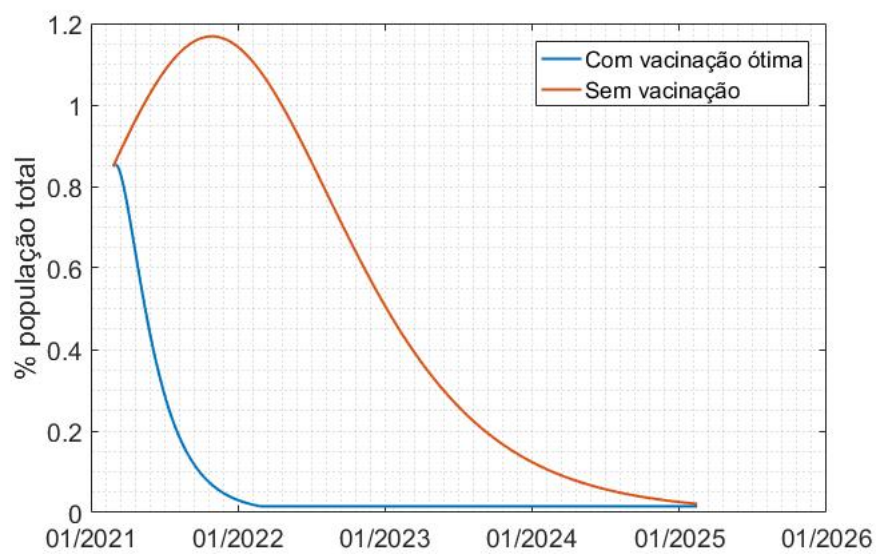
As Figuras 25, 26, 27 e 28 exibem a curva $S(t)$, $I(t)$, $R(t)$ e $D(t)$ sem e com controle ótimo para o modelo SIRD e os resultados podem ser vistos na Tabela 11. Apesar de ter resultados similares ao modelo SIR, neste modelo, é possível analisar unicamente o compartimento de óbitos que apresentou uma redução de 70% em relação à dinâmica não controlada.

Figura 25: Gráfico de Suscetíveis sem e com Controle Ótimo - Modelo SIRD.



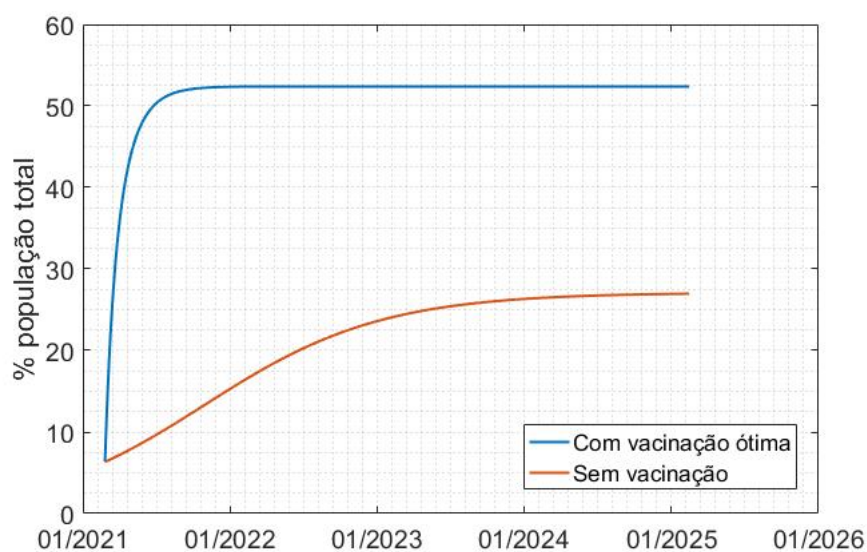
Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 26: Gráfico de Infectados sem e com Controle Ótimo - Modelo SIRD.



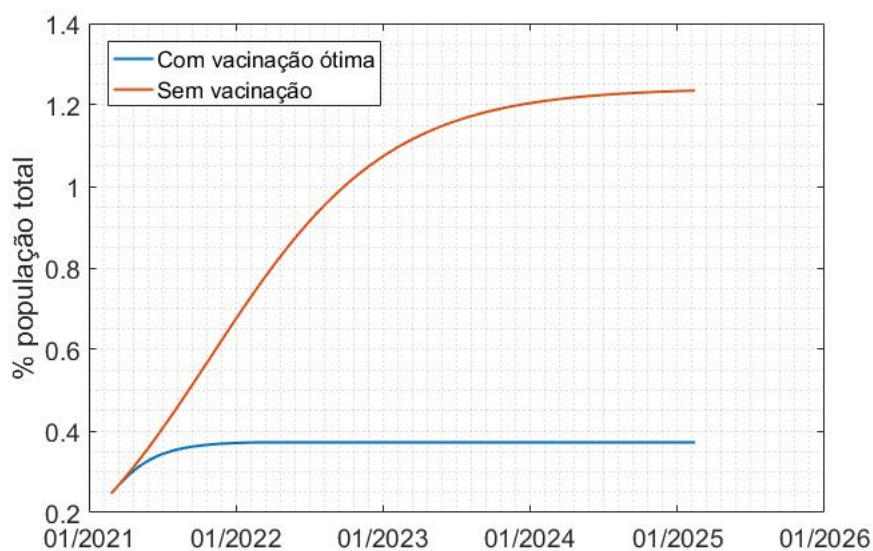
Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 27: Gráfico de Recuperados sem e com Controle Ótimo - Modelo SIRD.



Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 28: Gráfico de Óbitos sem e com Controle Ótimo - Modelo SIRD.



Fonte: Elaborado pela autora.

Em ambos os modelos, o controle ótimo apresenta as mesmas características e o valor encontrado para uma vacinação em um período de 1 ano é visto na Tabela 12, com uma diferença de 4% a mais de vacinados no modelo SIRD. Essa diferença pode ser explicada comparando os índices de desempenho J_{SIR} e J_{SIRD} representados pelas

Tabela 11: Comparação do modelo SIRD sem e com Controle Ótimo no intervalo de 365 dias.

Modelo SIRD		
	Sem Controle Ótimo	Com Controle Ótimo
Total de casos	28,29%	8,64%
Total de óbitos	1,24%	0,37%
Pico de infecção	1,17%	0,85%
População imune (R)	27,04%	52,38%

Tabela 12: Total de vacinados dos modelos SIR e SIRD identificados para março de 2021.

Modelo	População vacinada	
SIR	1.722.700	40,94%
SIRD	1.856.900	44,13%

Equações 5.6 e 5.14. Ao minimizar J_{SIRD} , além de minimizar o custo associado aos termos $I(t)$ e $u(t)$, há o termo $D(t)$.

Apesar de haver menos casos no sistema controlado, há um acréscimo em $R(t)$ (Figuras 24 e 27), esse acréscimo é ocasionado pelo aumento de indivíduos imunizados por vacinação, visto que o compartimento R representa o somatório de recuperados e imunizados. Através da implementação numérica do PCO, confirma-se de fato que as equações mostradas no Capítulo 5.2 minimizam a duração e o tamanho da pandemia. Na Tabela 13 é encontrado o custo associado para cada componente do índice de desempenho, calculado conforme as Equações 6.2, 6.3, 6.4 e 6.5:

$$J_I = \int_{t_0}^{t_f} I^2(t) \approx \sum_{t_0}^{t_f} I_i^2, \quad (6.2)$$

$$J_D = \int_{t_0}^{t_f} D^2(t) \approx \sum_{t_0}^{t_f} D_i^2, \quad (6.3)$$

$$J_U = \int_{t_0}^{t_f} 0,5u^2(t) \approx \sum_{t_0}^{t_f} 0,5u_i^2, \quad (6.4)$$

$$J = J_I + J_D + J_U. \quad (6.5)$$

O valor absoluto do índice de desempenho J corresponde a 0,0077 e a 0,0121 para o modelo SIR e SIRD respectivamente.

Tabela 13: Índice de desempenho para os modelos SIR e SIRD sujeito aos parâmetros estimados no mês de março de 2021.

Modelo	J_I	J_D	J_u	J
SIR	0.0057	-	0.0020	0.0077
SIRD	0.0053	0.0043	0.0025	0.0121

Os resultados apresentados neste capítulo mostram que os modelos SIR e SIRD podem ser utilizados para descrever a dinâmica da COVID-19 no estado do Amazonas em cenários pré-definidos e que é possível obter um controle ótimo para estes modelos.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

7.1 Conclusões

Neste trabalho, foi realizado o estudo de uma estratégia ótima para controlar a pandemia da COVID-19 por meio de vacinação da população. Para isso, fez-se necessária a identificação e a validação dos modelos SIR e SIRD propostos para descrever a dinâmica da COVID-19 no Estado do Amazonas. Os resultados dos parâmetros apresentados anteriormente e o método utilizado mostraram um ajuste de curva satisfatório para os cenários em que foram estimados. Isto foi possível por meio da utilização do MMQ, o qual se configura como uma identificação caixa-cinza pois trabalha diretamente com dados reais para estimação dos parâmetros dos modelos propostos.

Por adotar os modelos compartimentais em sua forma simples (sem dinâmica vital e outros termos que afetariam a complexidade do modelo), uma etapa fundamental foi analisar o contexto pelo qual a população do estado passava, verificar períodos em que houve aumento ou diminuição no isolamento social e todos os eventos que também contribuíram para alteração no comportamento e interação da população. A identificação do modelo permitiu igualmente verificar o impacto na taxa de reprodução R_o das medidas de restrição impostas pelo Governo do Amazonas no primeiro trimestre de 2021 pelas identificações feitas nos cenários 2 e 3, em que o cenário 2 apresentou um R_o maior que o cenário 3.

Em uma situação hipotética, em que se optou por flexibilizar o isolamento social com objetivo de alcançar a imunidade de rebanho e reduzir a duração da pandemia, nota-se pela comparação entre os cenários 1 e 2 que esta estratégia não seria vantajosa em virtude do aumento de casos e óbitos do cenário 2, mesmo que a duração da pandemia seja inferior ao cenário 1. Isso ocorre pois a estimação da taxa de reprodu-

tibilidade basal R_0 é feita a partir dos dados da população sujeita a um determinado comportamento de forma que, ao haver uma flexibilização, este parâmetro pode assumir um valor maior que o anterior em virtude do maior contato de suscetíveis com infectados.

A aplicação da Teoria do Controle Ótimo nos modelos epidemiológicos se mostrou de grande vantagem para reduzir a duração da epidemia, reduzir a quantidade de indivíduos infectados e, também, para obter o menor custo possível representado pelo índice de desempenho J . Tratando-se do controle proposto (vacinação), um dos resultados obtidos por meio das simulações apresentadas mostra que vacinar 100% da população não é uma solução ótima tendo em vista o problema de controle ótimo (PCO) formulado neste trabalho. Por outro lado, a solução não pode ser implementada de forma trivial, visto que diversos fatores devem ser levados em consideração como a eficácia da vacina e a capacidade de vacinação do estado. Além disso, o controle por vacinação apresentado para os modelos SIR e SIRD se concentra na vacinação dos suscetíveis. Atualmente, devido ao surgimento de novas variantes da COVID-19 e à perda de imunidade nos indivíduos recuperados, não há distinção na vacinação de quem é suscetível ou não. Em casos onde há necessidade de mais de uma dose da vacina para garantir a imunidade, o planejamento utilizando a estratégia ótima também deve levar este fator em consideração e, também, o tempo em que um indivíduo permanece imunizado.

Uma das dificuldades encontradas no desenvolvimento do trabalho, em paralelo ao tratamento dos dados epidemiológicos, foi solucionar numericamente o PCO por meio do teorema do Princípio de Pontryagin. Ao aplicar o teorema, são obtidos os sistemas dinâmicos codependentes das variáveis de estado e coestado em que o primeiro está sujeito a uma condição inicial e o segundo está sujeito a uma condição de contorno *final*. Visto que os métodos numéricos de Euler e Runge-Kutta necessitam de uma condição inicial, a alternativa encontrada na literatura permitiu a implementação do método de varredura de avanço e retorno.

Em resumo, o trabalho aqui proposto mostra que é possível estudar o sistema dinâmico da COVID-19 no Estado do Amazonas por meio dos modelos epidemiológicos SIR e SIRD, assim como sintetizar um controle ótimo para esta dinâmica de forma que assuma valores ótimos, reduzindo a quantidade de indivíduos infectados e mortos pela doença na população dentro do horizonte de controle estabelecido.

7.2 Sugestões para trabalhos futuros

Com o objetivo de dar continuidade à pesquisa, abordando aspectos não estudados no presente trabalho ou de melhorar as formulações apresentadas, faz-se a seguir algumas sugestões e considerações para trabalhos futuros:

1. Controle ótimo em um modelo SIRD com atraso de tempo na variável de controle devido ao tempo necessário para indivíduos suscetíveis se tornarem imunizados;
2. Identificação de outro modelo levando em consideração a reinfecção (perda de imunidade) de indivíduos recuperados;
3. Estimação de parâmetros de um modelo SIRD de forma adaptativa a partir da introdução de novos dados reais, fazendo com que as taxas de transmissão, recuperação e mortalidade não sejam constantes;
4. Controle ótimo em um modelo SIRD levando em consideração a necessidade da aplicação de duas doses de vacina para imunização;
5. Controle ótimo em um modelo SIRD levando em consideração a eficácia da vacinação.

REFERÊNCIAS

Agencia Fiocruz de Notícias. **Fiocruz detecta mutação associada a variantes de preocupação no país**. 2021. Disponível em: <<https://portal.fiocruz.br/noticia/fiocruz-detecta-mutacao-associada-variantes-de-preocupacao-no-pais>>. Acesso em: março de 2021.

ALMEIDA, P. R. de. **Modelos Epidêmicos SIR, Contínuos e Discretos, e Estratégias de Vacinação**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Viçosa, 2014.

AMAZONAS. **Decreto nº 42.099, de 21 de março de 2020**: Dispõe sobre medidas complementares temporárias, para enfrentamento da emergência de saúde pública de importância internacional, decorrente do novo coronavírus. Manaus, AM: Diário Oficial do Estado do Amazonas, 2020.

_____. **Decreto Nº 43.303, de 23 de janeiro de 2021**: Dispõe sobre a ampliação da restrição temporária de circulação de pessoas, na forma que especifica, como medida para enfrentamento da emergência de saúde pública de importância internacional, decorrente do novo coronavírus, e dá outras providências. Manaus, AM: Diário Oficial do Estado do Amazonas, 2020.

BARRETO, I. C. de H. C. et al. Colapso na saúde em manaus: o fardo de não aderir às medidas não farmacológicas de redução da transmissão da covid-19. **SciELO Preprints**, 02 2021.

BATISTA, M. Estimation of the final size of the coronavirus epidemic by the sir model. **The lancet**, Elsevier, v. 360, n. 9341, p. 1233–1242, 2020.

BBC. **Muita chuva, poucos testes e mais gente na rua: o que levou Amazonas a explosão de casos de covid-19**. 2020. Disponível em: <<https://www.bbc.com/portuguese/brasil-52333611>>. Acesso em: janeiro de 2021.

BOLZONI, L. et al. Time-optimal control strategies in sir epidemic models. **Mathematical Biosciences**, v. 292, p. 86 – 96, 2017.

BRITTON, T.; BALL, F.; TRAPMAN, P. A mathematical model reveals the influence of population heterogeneity on herd immunity to sars-cov-2. **Science**, American Association for the Advancement of Science, v. 369, n. 6505, p. 846–849, 2020. ISSN 0036-8075. Disponível em: <<https://science.sciencemag.org/content/369/6505/846>>.

COELHO, A. **Identificação de sistemas dinâmicos lineares**. Editora da UFSC, 2004. ISBN 9788532802804. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=RJujAAAACAAJ>>.

COMUNIAN, A.; GABURRO, R.; GIUDICI, M. Inversion of a sir-based model: A critical analysis about the application to covid-19 epidemic. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, v. 413, p. 132674, 2020. ISSN 0167-2789. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167278920303912>>.

CUNHA, M. C. C. **Métodos numéricos**. [S.l.]: Editora da UNICAMP, 2000.

ELHIA, M.; RACHIK, M.; BENLAHMAR, E. Optimal control of an sir model with delay in state and control variables. **International Scholarly Research Notices**, Hindawi, v. 2013, 2013.

FERNANDEZ-CAR, E.; ZUAZUA, E. Control theory: History, mathematical achievements and perspectives. 01 2003.

FREITAS, L. F. de S. **Vacinação de doenças infecciosas de transmissão direta: quantificando condições de controle considerando portadores**. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2018.

FVS-AM. **Boletim diário Covid-19 no Amazonas 1/10/2020**. 2020. Disponível em: <https://www.fvs.am.gov.br/media/publicacao/01_10_20_BOLETIM_DI%C3%81RIO_DE_CASOS_COVID-19.pdf>.

G1. **Manaus tem alta de 28% no número de internações por Covid-19 em dezembro**. 2020. Disponível em: <<https://g1.globo.com/am/amazonas/noticia/2020/12/27/manaus-tem-alta-de-28percent-no-numero-de-internacoes-por-covid-19-em-dezembro.ghtml>>. Acesso em: janeiro de 2021.

GIAMBERARDINO, P. D.; IACOVIELLO, D. Short communication. **Biomedical Signal Processing and Control**, v. 31, n. C, p. 377–380, 2017.

Governo do Estado do Amazonas. **Governo do Amazonas divulga plano de reabertura com regras de distanciamento, higiene, comunicação e monitoramento**. 2020. Disponível em: <<http://encurtador.com.br/nyBJY>>. Acesso em: janeiro de 2021.

GRASS, D. et al. **Optimal Control of Nonlinear Processes: With Applications in Drugs, Corruption, and Terror**. Springer Berlin Heidelberg, 2008. ISBN 9783540776475. Disponível em: <<https://books.google.fr/books?id=M7qGPmzrVAKC>>.

IZMAILOV, A.; SOLODOV, M. **Otimização - Volume 1**. 3ª. ed. [S.l.]: IMPA, 2014. ISBN 978-85-244-0389-7.

KIRK, D. **Optimal Control Theory: An Introduction**. Dover Publications, 2004. (Dover Books on Electrical Engineering Series). ISBN 9780486434841. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=fCh2SAtWIdwC>>.

LENHART, S.; WORKMAN, J. **Optimal Control Applied to Biological Models**. Taylor & Francis, 2007. (Chapman & Hall/CRC Mathematical and Computational Biology). ISBN 9781584886402. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=NBcTXZK61doC>>.

LIBOTTE, G. B. et al. Determination of an optimal control strategy for vaccine administration in covid-19 pandemic treatment. **Computer Methods and Programs in Biomedicine**, v. 196, p. 105664, 2020. ISSN 0169-2607. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0169260720314978>>.

LUENBERGER, D. G.; YE, Y. **Linear and Nonlinear Programming**. 4^a. ed. [S.l.]: Springer, 2016. ISBN 978-3-319-18842-3.

LUIZ, M. H. R. **Modelos Matemáticos em Epidemiologia**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2012.

MANAUS. **Lei Nº 2.643, de 30 de julho de 2020**: Dispõe sobre a obrigatoriedade do uso de máscara de proteção no município de manaus e dá outras providências. Manaus, AM: Diário Oficial de Manaus, 2020.

MARINOV, T. T.; MARINOVA, R. S. Dynamics of covid-19 using inverse problem for coefficient identification in sir epidemic models. **Chaos, Solitons & Fractals: X**, v. 5, p. 100041, 2020. ISSN 2590-0544. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2590054420300221>>.

MONTEIRO, L. H. A. **Sistemas Dinâmicos**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.

NAIDU, D. **Optimal Control Systems**. CRC Press, 2018. (Electrical Engineering Series). ISBN 9781351830317. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=Kn50DwAAQBAJ>>.

OGATA, K. **Engenharia de controle moderno**. PRENTICE HALL BRASIL, 2011. ISBN 9788576058106. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=iL3FYgEACAAJ>>.

OLIVEIRA, I. M. de. **Modelos epidemiológicos SEIR**. Tese (Doutorado) — Faculdade de Ciências do Porto, Porto, 2008.

SCHULZ, R. A.; COIMBRA-ARAÚJO, C. H.; COSTICHE, S. W. S. **COVID-19: A model for studying the evolution of contamination in Brazil**. 2020.

SOUZA, P.; DIAS, C.; ARRUDA, E. Optimal control model for vaccination against h1n1 flu. **Semina**, v. 41, p. 105–114, 06 2020.

TARANTOLA, A. **Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation**. [S.l.]: SIAM - Society for Industrial and Applied Mathematics, 2005. ISBN 0-89871-572-5.

APÊNDICE A

Código 7: Identificação de Parâmetros do Modelo SIRD

```

1 function [rate, y, SIRD_0,N,ti_data, tf_data,t,date0] = ...
   SIRD_Parameters_Estimation_COVID_V2()
2
3 [Cdata, Ddata, Rdata,date0] = getdata_covid_amazonas();
4
5 Idata = Cdata-Rdata - Ddata;
6 N = 4207714; %populacao total
7 Sdata = N - Cdata;
8
9 %Intervalo de tempo utilizado para identificacao
10 ti_data = 350;
11 tf_data = 378;
12
13 c = zeros(length(Sdata(ti_data:tf_data)),4); %matriz da base ...
   de dados
14
15 c(:,1)= Sdata(ti_data:tf_data)'; %Base de dados de S
16 c(:,2) = Idata(ti_data:tf_data)'; %Base de dados de I
17 c(:,3) = Rdata(ti_data:tf_data)'; %Base de dados de R
18 c(:,4) = Ddata(ti_data:tf_data)';%obitos
19
20 function C = SIRD(rate,t)
21     %rate = matriz dos parametros do modelo
22     SIR_0 =[Sdata(ti_data);Idata(ti_data); ...
   Rdata(ti_data);Ddata(ti_data)] %Condicoes Iniciais
23
24 [T,Cv]=ode45(@DifEq,t,SIR_0);
25
26 function dC = DifEq(t,c) %Sistema de Equacoes - Modelo SIR
27
28     dcdt=zeros(4,1);
29     dcdt(1)= -rate(1).*c(1)*c(2)/N;
30     dcdt(2)= rate(1).*c(1)*c(2)/N-rate(2).*c(2)-rate(3).*c(2);

```

```
31     dcdt(3)= rate(2).*c(2);
32     dcdt(4) = rate(3).*c(2);
33
34     dC=dcdt;
35
36     end
37 C=Cv;
38 end
39
40 t = ti_data:tf_data;
41 rate0=[0;0;0];
42
43 % Estimar parametros
44 [rate,Rsdnrm,Rsd]=lsqcurvefit(@SIRD,rate0,t,c)
```

APÊNDICE B

Código 8: Determinação do controle ótimo para o modelo SIRD utilizando o Princípio de Pontryagin

```

1 function [optimal_SIRD,optimal_u, vac,u,vacAC] = ...
    Optimal_Control_SIRD()
2 clear all
3 close all
4
5 [rate, y, SIR_0, N, ti_data, tf_data,t,date0] = ...
    SIRD_Parameters_Estimation_COVID_V2();
6
7 Np = 1;
8 test = -1;
9 Δ = 0.001;
10 n = 100;
11 ti = ti_data;
12 tf = ti_data+365;
13 %tf = t(end);
14 T = linspace(ti,tf, n*(tf-ti) + 1);
15
16 h2 = 1/n;
17 h = h2/2;
18
19 SIR_0 = y(ti - ti_data +1,:)/N;
20
21 %Parametros
22 a = rate(1);
23 b = rate(2);
24 c = rate (3);
25
26 e = 1; %eficacia da vacina
27
28 % Indice J = int[ alfa*I^2 + beta*D^2 + gamma*u^2];
29 alfa = 1;
30 beta = 1;

```

```
31 gamma = 0.5;
32
33 max_u = 1; %Restricao de u
34
35 %Matrizes para:
36 % u: controle
37 % xi: estados - SIR
38 % pi: coestados - "rho"
39 x10 = SIR_0(1);
40 x20 = SIR_0(2);
41 x30 = SIR_0(3);
42 x40 = SIR_0(4);
43
44 u = zeros(1,n*(tf-ti) + 1);
45 x1 = zeros(1,n*(tf-ti) + 1);
46 x2 = zeros(1,n*(tf-ti) + 1);
47 x3 = zeros(1,n*(tf-ti) + 1);
48 x4 = zeros(1,n*(tf-ti) + 1);
49
50 x1(1) = x10;
51 x2(1) = x20;
52 x3(1) = x30;
53 x4(1) = x40;
54
55 p1 = zeros(1,n*(tf-ti) + 1);
56 p2 = zeros(1,n*(tf-ti) + 1);
57 p3 = zeros(1,n*(tf-ti) + 1);
58 p4 = zeros(1,n*(tf-ti) + 1);
59
60 %Condicao de transversalidade
61 p1(n+1) = 0;
62 p2(n+1) = 0;
63 p3(n+1) = 0;
64 p4(n+1) = 0;
65
66 %Metodo de varredura para frente e para tras
67 while(test < 0)
68 oldu = u;
69
70 oldx1 = x1;
71 oldx2 = x2;
72 oldx3 = x3;
```

```

73 oldx4 = x4;
74
75 oldp1 = p1;
76 oldp2 = p2;
77 oldp3 = p3;
78 oldp4 = p4;
79
80 %a) Metodo de Runge-Kutta de ordem 2 para frente
81 for i = 1:n*(tf-ti)
82
83 k11 = - a*(x1(i))*(x2(i))/Np - e*u(i)*(x1(i));
84 k12 = (-b -c)*x2(i) + a*(x1(i))*(x2(i))/Np;
85 k13 = e*u(i)*x1(i) + b*(x2(i));
86 k14 = c*x2(i);
87
88 k21 = - a*(x1(i)+h2*k11)*(x2(i)+h2*k12)/Np - ...
      (0.5*e*(u(i+1)+u(i))*(x1(i)+h2*k11));
89 k22 = (-b-c)*(x2(i)+h2*k12) + a*(x1(i)+h2*k11)*(x2(i)+h2*k12)/Np;
90 k23 = 0.5*e*(u(i+1)+u(i))*(x1(i)+h2*k11)+ b*((x2(i)+h2*k12));
91 k24 = c*(x2(i)+h2*k12);
92
93 x1(i+1) = x1(i) + h*(k11+k21);
94 x2(i+1) = x2(i) + h*(k12+k22);
95 x3(i+1) = x3(i) + h*(k13+k23);
96 x4(i+1) = x4(i) + h*(k14+k24);
97
98
99 end
100
101 %b) Metodo de Runge-Kutta de ordem 2 para tras
102 for i = 1:n*(tf-ti)
103
104 j = n*(tf-ti) + 2 - i;
105
106 k11 = p1(j)*(a*x2(j)/Np + e*u(j))- a*x2(j)*p2(j)-e*u(j)*p3(j);
107 k12 = -2*alfa*x2(j)+p1(j)*a*x1(j)/Np-p2(j)*(a*x1(j)- b-c ...
      )-p3(j)*b - p4(j)*c;
108 k13 = 0;
109 k14 = -2*beta*x4(j);
110
111 k21 = (p1(j)-h2*k11)*(a*(x2(j)+x2(j-1))/2/Np + 0.5*e*(u(j) + ...
      u(j-1)))- a*(x2(j)+x2(j-1))/2*(p2(j)-h2*k12)-0.5*e*(u(j) + ...

```



```

        u(j-1)) * (p3(j) - h2 * k13);
112 k22 = -2 * alfa * (x2(j) + x2(j-1)) / 2 + (p1(j) - h2 * k11) * a / Np / 2 * (x1(j) + ...
        x1(j-1)) - (p2(j) - h2 * k12) * (a * (x1(j) + x1(j-1)) / 2) ...
        - (p2(j) - h2 * k12) * (-b - c) - (p3(j) - h2 * k13) * b - (p4(j) - h2 * k14) * c;
113 k23 = 0;
114 k24 = -2 * beta * (x4(j) + x4(j-1)) / 2;
115
116 p1(j-1) = p1(j) - (h) * (k11 + k21);
117 p2(j-1) = p2(j) - (h) * (k12 + k22);
118 p3(j-1) = p3(j) - (h) * (k13 + k23);
119 p4(j-1) = p4(j) - (h) * (k14 + k24);
120
121 end
122
123
124 %Caracterizacao de u --> dH/du = 0
125 u1 = min(max(0, (p1.*x1 - p3.*x1) / (2 * gamma * e)), max_u);
126
127 %Verificacao de convergencia
128 u = 0.5 * (u1 + oldu);
129
130 temp1 = Δ * sum(abs(u)) - sum(abs(oldu - u));
131 temp21 = Δ * sum(abs(x1)) - sum(abs(oldx1 - x1));
132 temp22 = Δ * sum(abs(x2)) - sum(abs(oldx2 - x2));
133 temp23 = Δ * sum(abs(x3)) - sum(abs(oldx3 - x3));
134 temp24 = Δ * sum(abs(x4)) - sum(abs(oldx4 - x4));
135 temp31 = Δ * sum(abs(p1)) - sum(abs(oldp1 - p1));
136 temp32 = Δ * sum(abs(p2)) - sum(abs(oldp2 - p2));
137 temp33 = Δ * sum(abs(p3)) - sum(abs(oldp3 - p3));
138 temp34 = Δ * sum(abs(p4)) - sum(abs(oldp4 - p4));
139
140 test = min(temp1, min(temp21, min(temp22, ...
        min(temp23, min(temp31, ...
        min(temp32, min(temp34, min(temp33, temp24))))));
141 end

```