

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS

FELIPE DE JESUS DE SOUZA DUARTE

ESTUDO SOBRE AS REDUÇÕES DE FORÇAS CORTANTES PRECONIZADAS PELA
NORMA ABNT NBR 6118 PARA VIGAS DE CONCRETO ARMADO

MANAUS
2022

FELIPE DE JESUS DE SOUZA DUARTE

ESTUDO SOBRE AS REDUÇÕES DE FORÇAS CORTANTES PRECONIZADAS PELA
NORMA ABNT NBR 6118 PARA VIGAS DE CONCRETO ARMADO

VERSÃO CORRIGIDA

A versão original encontra-se no processo SEI/UFAM Nº 23105.014292/2022-17

Trabalho de conclusão de curso,
apresentado ao Departamento de
Engenharia Civil da Universidade Federal
do Amazonas, como requisito parcial à
obtenção do título de Bacharel em
Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. Wagner Queiroz Silva

MANAUS

2022

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

D812e Duarte, Felipe de Jesus de Souza
Estudo sobre as reduções de forças cortantes preconizadas pela norma ABNT NBR 6118 para vigas de concreto armado / Felipe de Jesus de Souza Duarte . 2022
81 f.: il. color; 31 cm.

Orientador: Wagner Queiroz Silva
TCC de Graduação (Engenharia Civil) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Força cortante. 2. Redução da força cortante. 3. Concreto armado. 4. Vigas. I. Silva, Wagner Queiroz. II. Universidade Federal do Amazonas III. Título



Ministério da Educação
Universidade Federal do Amazonas
Departamento de Engenharia Civil

FOLHA DE APROVAÇÃO

FELIPE DE JESUS DE SOUZA DUARTE

ESTUDO SOBRE AS REDUÇÕES DE FORÇAS CORTANTES PRECONIZADAS PELA
NORMA ABNT NBR 6118 PARA VIGAS DE CONCRETO ARMADO

Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado em 02 de setembro de 2022

Banca examinadora:

Prof. Dr. Wagner Queiroz Silva - UFAM (Orientador)

Prof. Dr. Régis Pamponet da Fonseca - UFAM

Prof. MSc. Saymo Wendel de Jesus Peixoto Viana - UFAM



Documento assinado eletronicamente por **Wagner Queiroz Silva, Professor do Magistério Superior**, em 02/09/2022, às 17:28, conforme horário oficial de Manaus, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Régis Pamponet da Fonseca, Professor do Magistério Superior**, em 02/09/2022, às 17:29, conforme horário oficial de Manaus, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Saymo Wendel de Jesus Peixoto Viana, Professor do Magistério Superior-Substituto**, em 02/09/2022, às 22:26, conforme horário oficial de Manaus, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufam.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1153178** e o código CRC **4F801C7E**.

Av. Octávio Hamilton Botelho Mourão - Bairro Coroado 1 Campus Universitário Senador Arthur Virgílio Filho,
Setor Norte - Telefone: (92) 3305-1181
CEP 69080-900, Manaus/AM, decft@ufam.edu.br

AGRADECIMENTOS

A Deus pelo dom da vida que me dá, por ter me permitido chegar até aqui e por me dar saúde para alcançar meus objetivos.

A minha família, mais particularmente aos meus pais, que não mediram esforços para me dar educação e me sustentar, me incentivando a terminar minha graduação e apoiando em todos os momentos.

A Paula por me ajudar com recursos do Word e também por me incentivar a terminar meu curso.

Ao prof. Dr. Wagner Queiroz Silva, que foi meu orientador. Pelas várias reuniões que tivemos, por todo o auxílio e paciência, me apontando o caminho, com artigos, monografias, livros e outros materiais.

Muito obrigado a todos.

RESUMO

Parte integrante da estrutura de uma edificação, as vigas são os elementos estruturais responsáveis principalmente por suportar cargas transversais proveniente de lajes e pisos e transmitir estas cargas aos pilares. Dimensioná-la da maneira correta para resistir aos esforços solicitantes é fundamental para garantir a segurança da estrutura. A força cortante é um exemplo destes esforços internos que agem na viga de concreto armado. A norma brasileira ABNT NBR 6118 trata do dimensionamento de vigas de concreto armado e preconiza que os esforços cortantes podem ser reduzidos próximos aos apoios da viga, de acordo com o tipo de carregamento. Este trabalho procurou avaliar os efeitos desta redução no dimensionamento de vigas. Para o desenvolvimento deste estudo, fez-se uma revisão bibliográfica sobre alguns dos principais modelos estruturais para análise de vigas: Modelo de Euler-Bernoulli, Modelo de Timoshenko e Modelo da Trelíça de Morsch. Realizou-se o dimensionamento automático usando planilhas eletrônicas, pelos modelos de cálculo I e II da norma, avaliando-se o dimensionamento sem e com a redução do esforço cortante solicitante de cálculo V_{sd} . Considerou-se para o estudo uma viga bi apoiada de altura fixa e comprimento variável, obtendo assim diversas relações de vão e altura. Com isso, procurou-se analisar a influência que esta redução do esforço cortante próxima aos apoios exerce sobre o dimensionamento da armadura transversal. Procurou-se também, por meio da revisão, entender por que a norma permite tal redução. A partir dos resultados obtidos, foi visto que a redução do esforço cortante permitiu o dimensionamento de casos de vigas, para as quais não estaria sendo possível sem a consideração da redução do esforço. Foi visto também que, em relação à variação de esforços solicitantes e resistentes, as vigas submetidas a carregamentos concentrados apresentaram uma maior variação da área de aço necessária, por exemplo, em relação às vigas sob carregamento distribuído, quando a redução é considerada.

Palavras-chave: Força cortante. Redução da força cortante. Concreto armado. Vigas.

ABSTRACT

An integral part of the structure of a building, beams are the structural elements responsible mainly for supporting transverse loads from slabs and floors and transmitting these loads to the pillars. Dimensioning it in the right way to resist the forces required is essential to ensure the safety of the structure. The shear force is an example of these internal forces acting on the reinforced concrete beam. The Brazilian standard ABNT NBR 6118 deals with the design of reinforced concrete beams and recommends that the shear forces can be reduced close to the beam supports, according to the type of loading. This work sought to evaluate the effects of this reduction in the design of beams. For the development of this study, a literature review was carried out on some of the main structural models for beam analysis: Euler-Bernoulli Model, Timoshenko Model and Morsch Trellis Model. The automatic dimensioning was performed using electronic spreadsheets, by the calculation models I and II of the standard, evaluating the dimensioning without and with the reduction of the shear force calculation value V_{sd} . A bi-supported beam of fixed height and variable length was considered for the study, thus obtaining different span and height relationships. With that, the study analysed the influence that this reduction of the shear force close to the supports exerts on the design of the transverse reinforcement. It was also sought, through the review, to understand why the standard allows such a reduction. From the results obtained, it was seen that the reduction of the shear force allowed the design of cases of beams, for which it would not be possible without considering the reduction of the force. It was also seen that, in relation to the variation of the forces, the beams submitted to concentrated loads presented a greater variation of the required steel area, for example, in relation to the beams under distributed loading, when the reduction is considered.

Keywords: Shear force. Shear force reduction. Reinforced concrete. Beams.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Viga com carregamento transversal	12
Figura 1.2 – Diagrama de esforços cortantes da viga da Figura 1.1, em kN.....	13
Figura 1.3 – Simulação via MEF de uma viga em concreto armado.....	14
Figura 2.1 – Viga submetida à força P	18
Figura 2.2 – Modelo de viga de Euler-Bernoulli.....	19
Figura 2.3 – Linha elástica de viga com carga concentrada	19
Figura 2.4 – Tensão de cisalhamento em viga.....	21
Figura 2.5 – Deslocamento de seção de viga de Timoshenko.....	22
Figura 2.6 – Comportamento de diferentes modelos em relação a deformações	24
Figura 2.7 – Ensaio de flexão à 4 pontos.....	26
Figura 2.8 – Fissuras próximas aos apoios em uma viga	27
Figura 2.9 – Viga nos estádios I e II.....	28
Figura 2.10 – Trajetória das tensões internas em uma viga.....	29
Figura 2.11 – Modelo de Treliça de Morsch (modelo I)	30
Figura 2.12 – Modelo de Treliça Generalizada (modelo II).....	31
Figura 2.13 – Banzo comprimido inclinado em direção aos apoios.....	32
Figura 2.14 – Forças internas resistentes da treliça	32
Figura 2.15 – Parcela de redução do banzo comprimido	33
Figura 2.16 – Tensões internas em uma viga e inclinação do banzo superior	34
Figura 2.17 – Redução de força cortante para carga distribuída	37
Figura 2.18 – Redução da força cortante para carga concentrada	38
Figura 3.1 – Largura de influência da viga.....	44
Figura 3.2 – Entrada de dados geométricos.....	45
Figura 3.3 – Entrada de dados do material	46
Figura 3.4 – Entrada de dados do carregamento	47
Figura 3.5 – Distâncias “a” e “b” da força P para os apoios	47
Figura 4.1 – Gráfico modelo de cálculo I (L/h).....	55
Figura 4.2 – Gráfico modelo de cálculo II (L/h)	56
Figura 4.3 – Comparativo de A_{sw} pelo modelo de cálculo I e II	57
Figura 4.4 – Gráfico modelo de cálculo I com redução da força cortante	59
Figura 4.5 – Gráfico modelo de cálculo II com redução da força cortante	60

Figura 4.6 – Comparativo de A_{sw} pelo modelo de cálculo I e II com redução da força cortante	61
Figura 4.7 – Comparativo $V_{sd} \times V_{sw}$ com e sem redução pelo modelo de cálculo I.....	62
Figura 4.8 – Comparativo $V_{sd} \times V_{sw}$ com e sem redução pelo modelo de cálculo II	63
Figura 4.9 – Comparativo A_{sw} com e sem redução pelo modelo de cálculo I.....	64
Figura 4.10 – Comparativo A_{sw} com e sem redução pelo modelo de cálculo II	65
Figura 4.11 – Gráfico modelo de cálculo I (L/h).....	66
Figura 4.12 – Gráfico modelo de cálculo II (L/h)	67
Figura 4.13 – Comparativo de A_{sw} pelo modelo de cálculo I e II	68
Figura 4.14 – Gráfico modelo de cálculo I com redução da força cortante	70
Figura 4.15 – Gráfico modelo de cálculo II com redução da força cortante	71
Figura 4.16 – Comparativo de A_{sw} pelo modelo de cálculo I e II com redução da força cortante	71
Figura 4.17 – Comparativo $V_{sd} \times V_{sw}$ com e sem redução pelo modelo de cálculo I.....	72
Figura 4.18 – Comparativo $V_{sd} \times V_{sw}$ com e sem redução pelo modelo de cálculo II	73
Figura 4.19 – Comparativo A_{sw} com e sem redução pelo modelo de cálculo I.....	74
Figura 4.20 – Comparativo A_{sw} com e sem redução pelo modelo de cálculo II	74

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Viga bi engastada com vão de 5 metros	25
Tabela 3.1 – Comparativo de valores teste 1, modelo I	48
Tabela 3.2 – Comparativo de valores teste 2, modelo I	49
Tabela 3.3 – Comparativo de valores teste 1, modelo II	50
Tabela 3.4 – Comparativo de valores teste 2, modelo II	51
Tabela 4.1 – Relação L/h e vão efetivo	55
Tabela 4.2 – Variação do fator de redução	58
Tabela 4.3 – Valores de V_{sd} com e sem redução	69

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	12
1.1. OBJETIVOS	14
1.2. JUSTIFICATIVA	15
1.3. APRESENTAÇÃO DA MONOGRAFIA	16
2. REVISÃO DA LITERATURA	17
2.1. VIGAS	17
2.1.1. Teoria Clássica de Euler-Bernoulli	18
2.1.2. Teoria de vigas de Timoshenko	21
2.1.3. Comparação Teoria Clássica x Teoria de Timoshenko	24
2.1.4. Modelo da Treliça Generalizada	26
2.1.4.1. Influência do banzo inclinado no esforço cortante.....	31
2.2. CONSIDERAÇÕES SOBRE A NBR 6118 (2014).....	34
2.2.1. Modelo de cálculo I	35
2.2.2. Modelo de cálculo II.....	36
2.2.3. Redução da força cortante próximo aos apoios.....	37
2.2.4. Outras considerações sobre a norma NBR 6118 (2014).....	39
3. METODOLOGIA E DESENVOLVIMENTO	43
3.1. TESTE DE VALIDAÇÃO 1 – MODELO DE CÁLCULO I.....	48
3.2. TESTE DE VALIDAÇÃO 2 – MODELO DE CÁLCULO I.....	49
3.3. TESTE DE VALIDAÇÃO 1 – MODELO DE CÁLCULO II	49
3.4. TESTE DE VALIDAÇÃO 2 – MODELO DE CÁLCULO II	50
3.5. VALORES DE L/h E VÃO EFETIVO	51
3.6. REDUÇÃO DA FORÇA CORTANTE.....	51
3.7. PRINCIPAIS EQUAÇÕES UTILIZADAS NO MODELO DE CÁLCULO I	52
3.8. PRINCIPAIS EQUAÇÕES UTILIZADAS NO MODELO DE CÁLCULO II.....	53

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES	54
4.1 VIGAS COM CARGAS DISTRIBUÍDAS	54
4.1.1. Modelo sem redução da força cortante	54
4.1.2. Modelo com redução da força cortante	58
4.1.3. Comparativo modelo sem redução x modelo com redução	62
4.2. VIGAS COM CARGAS CONCENTRADAS	65
4.2.1. Modelo sem redução da força cortante	66
4.2.2. Modelo com redução da força cortante	68
4.2.3. Comparativo modelo sem redução x modelo com redução	72
5. CONSIDERAÇÕES FINAIS	76
6. REFERÊNCIAS	78

1. INTRODUÇÃO

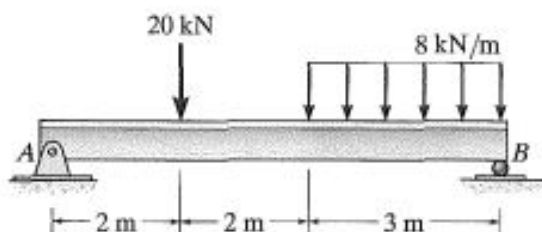
Um dos principais elementos de uma edificação, seja uma residência unifamiliar, um galpão, um edifício de múltiplos pavimentos ou outra construção, é a sua estrutura. A estrutura deverá manter a estabilidade e a segurança da construção, e assim garantir a qualidade da obra, o que pode aumentar a sua vida útil.

Na concepção de um projeto estrutural, cabe ao engenheiro civil a escolha do material que melhor se adequa às necessidades da obra e os cálculos do projeto, levando em conta os esforços que cada elemento da construção irá suportar. Vigas, pilares, elementos de fundação, entre outros, devem ser bem dimensionados para suportarem carregamentos distribuídos e/ou concentrados, que resultarão em esforços internos e externos na estrutura. Esta etapa é conhecida como análise ou cálculo estrutural.

Esforços externos são forças aplicadas na estrutura, como por exemplo o peso de uma parede ou um equipamento apoiado sobre a viga, ou ainda a reação dos apoios dessa viga mediante estas ações externas. Já os esforços internos são a resposta que a estrutura da viga dá mediante as forças externas (MORILLA, 2010). A depender das hipóteses consideradas para o modelo de análise, as respostas em termos de esforços internos podem apresentar algumas diferenças, que caracteriza os diferentes modelos estruturais.

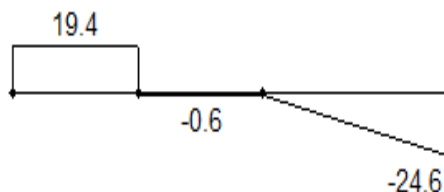
No projeto estrutural, um dos principais esforços internos em vigas com cargas transversais é o esforço cortante. Este esforço representa o efeito da força cisalhante em determinada seção da viga (MARTHA, 2022) e sua influência ao longo da viga pode ser observada melhor através de um diagrama de esforços cortantes, como na Figura 1.2, que mostra a variação da força cortante ao longo do comprimento da viga da Figura 1.1, sujeita a carregamentos transversais.

Figura 1.1 - Viga com carregamento transversal.



Fonte: Hibbeler (2009).

Figura 1.2 - Diagrama de esforços cortantes da viga da Figura 1.1, em kN.



Fonte: Autoria própria (2022).

Conhecer a real variação dos valores destes esforços é importante, pois estes são os principais parâmetros para que o engenheiro calcule as dimensões da viga de concreto armado.

Os projetos estruturais são baseados em códigos normativos, sendo para estruturas de concreto no Brasil aplicada a norma brasileira ABNT NBR 6118 (2014).

Nesta norma está prevista a possibilidade de redução dos esforços cortantes próximos aos apoios, em vigas com carregamento concentrado e/ou distribuído, atendidos alguns requisitos que são discutidos posteriormente no item 2.2.3 do presente trabalho.

Para se calcular uma estrutura como uma viga, por exemplo, podem ser usados vários modelos estruturais e, com isso, se chegar a resultados diferentes, mesmo se tratando de uma mesma estrutura. Isso porque, a depender do modelo estrutural de cálculo utilizado, um resultado pode ser mais refinado e exato do que outro. Isto vai depender das generalizações feitas para se calcular, da dificuldade de cálculo que, por sua vez, irá depender da consideração de diferentes hipóteses iniciais, da complexidade matemática e do grande número de variáveis que podem estar envolvidas.

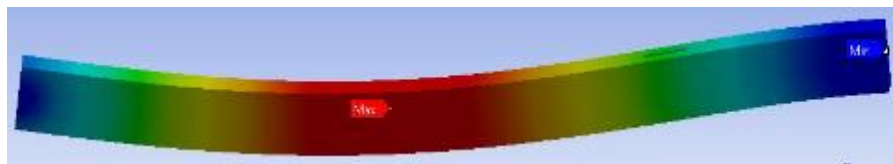
Para auxiliar os engenheiros civis a obterem resultados cada vez mais precisos e próximos da realidade, hoje se pode contar também com computadores cada vez mais avançados e rápidos que podem resolver problemas que antes eram difíceis de serem avaliados “manualmente” por conta da complexidade envolvida nos cálculos.

Como exemplo de um modelo ou método de cálculo estrutural, pode-se citar o Método dos Elementos Finitos (MEF), utilizado inclusive em diversos programas de cálculo na engenharia civil, que faz algumas considerações e formulações matemáticas e já se mostrou ser uma ferramenta eficiente para a resolução de problemas de análise estrutural (SOUZA, 2019).

É importante observar que o MEF não será utilizado no presente trabalho.

A Figura 1.3 mostra o exemplo de uma simulação via MEF para a análise linear de uma viga em concreto armado.

Figura 1.3 – Simulação via MEF de uma viga em concreto armado.



Fonte: Silva e Rosa (2015).

O presente trabalho procurou abordar três principais modelos estruturais de cálculo de vigas que são bastante empregados até os dias de hoje: o modelo de Euler-Bernoulli, o modelo de viga de Timoshenko e o modelo da treliça de Morsh. Foram analisadas também as reduções de força cortante que a NBR 6118 (2014) preconiza em seu item 17.4.1.2.1 e como essas reduções influenciam no cálculo da armadura transversal da viga.

1.1. OBJETIVOS

O objetivo geral deste trabalho foi estudar as reduções de forças cortantes em estruturas de vigas, que são previstas em norma brasileira, e das suas implicações para projetos estruturais.

Para se chegar ao objetivo geral, cumpriram-se os seguintes objetivos específicos:

1. Revisar conceitos relacionados aos efeitos de forças cortantes junto a apoios de vigas, visando compreender as reduções de força cortante preconizadas pelas normas brasileiras;
2. Avaliar a aplicação das reduções de força cortante da norma de estruturas de concreto para vigas com diferentes relações entre a altura da seção e o vão;
3. Estudar a influência das reduções de força cortante no dimensionamento e projetos de estruturas de concreto armado.

1.2. JUSTIFICATIVA

A norma brasileira de estruturas de concreto armado NBR 6118 (2014) reserva um tópico específico para a análise de esforços cortantes que, atendidos certos pré-requisitos, podem ser reduzidos nas regiões próximas aos apoios das vigas. Esta redução pode ter relação com as hipóteses simplificadoras consideradas nas deduções das expressões para cálculo de tensões em peças submetidas a carregamentos transversais (HIBBELER, 2009). Além disso, resultados experimentais com vigas de concreto apresentaram valores diferentes daqueles calculados com modelos clássicos da resistência dos materiais. Citam-se, por exemplo, os trabalhos de Leonhardt e Mönning (1977), que mostraram que a treliça clássica de Morsh conduz a um valor de tensão nas armaduras transversais maiores que as medidas em experimentos em laboratórios. Observou-se também que os valores calculados, segundo este método, para a compressão no banzo superior e para a tração no banzo inferior da treliça são, respectivamente, menores e maiores que os obtidos em situações reais, exceto em alguns pontos da viga. Maiores comentários serão apresentados posteriormente.

Tais diferenças podem estar relacionadas ao comportamento real da viga, lembrando que as hipóteses simplificadoras podem ter validade limitada em função de outras condições. Um exemplo de hipótese simplificadora clássica é a consideração de que as seções permanecem planas após a viga deformar por ação de cargas transversais (HIBBELER, 2009). Existem modelos que consideram a influência das tensões de cisalhamento no comportamento mecânico da viga, tais como o modelo de Timoshenko (GIFFHORN, 2019). A adoção de uma ou de outra hipótese depende do caso em estudo, pois terá maior ou menor influência nos resultados.

Os modelos de cálculo de projetos necessitam de melhoria, tendo em vista a modernização dos materiais, cada vez mais resistentes e seguros, e dos processos construtivos.

Neste trabalho buscou-se analisar os motivos pelos quais a redução da força cortante pode ser considerada em projetos de vigas e a influência dessa redução nos projetos estruturais e no dimensionamento de vigas de concreto armado.

1.3. APRESENTAÇÃO DA MONOGRAFIA

O conteúdo do trabalho encontra-se em seis capítulos, divididos da seguinte forma:

No capítulo 1 foi feita uma introdução do tema, com alguns aspectos básicos sobre as estruturas de vigas e a análise de forças cortantes, sendo em seguida apresentados os objetivos geral e específico, a justificativa do trabalho e esta organização da monografia.

No capítulo 2 é apresentada a revisão bibliográfica, com conceitos sobre vigas e seus métodos de análises, abordando principalmente as teorias de vigas de Euler-Bernoulli, de Timoshenko e a teoria da treliça de Morsh. Alguns pontos da norma brasileira ABNT NBR 6118 (2014), que trata sobre estruturas de concreto, assim como o ponto central deste trabalho, que são as reduções da força cortante preconizadas na norma.

No capítulo 3 é apresentada a metodologia utilizada e o desenvolvimento, com as considerações feitas para os cálculos e para a automatização realizada através de uma planilha eletrônica de cálculo para as armaduras transversais.

No capítulo 4 são apresentados os resultados e discussões, com análises de gráficos, de tabelas e algumas conclusões baseadas no desenvolvimento do estudo.

No capítulo 5 serão apresentadas as considerações finais, com uma síntese sobre as conclusões tiradas dos resultados do trabalho.

E, para encerrar, o capítulo 6 trará todas as referências de livros, artigos, monografias, sites e vídeos consultados.

2. REVISÃO DA LITERATURA

Neste capítulo será feita uma revisão bibliográfica sobre os principais assuntos abordados no decorrer do desenvolvimento deste trabalho, a começar pela descrição do ponto de vista da análise estrutural de um elemento de construção primordial nas estruturas, que são as vigas, e duas das principais teorias de análises de seu comportamento mecânico.

Esta revisão visa principalmente compreender o funcionamento das vigas de concreto armado quando submetidas à força cortante, além de buscar informações na literatura técnica relacionadas às reduções de esforços cortantes preconizadas pela norma.

2.1. VIGAS

As vigas são elementos de estruturas que tem por uma de suas características a medida de comprimento com ordem de grandeza muito maior que as medidas de altura e largura da seção transversal. Além disso, exercem a função de transferir as cargas de lajes e/ou outras cargas pontuais para os pilares de apoio (GIFFHORN, 2019).

Geralmente, as forças exercidas nas vigas são perpendiculares ao seu eixo longitudinal, podendo estas forças serem distribuídas linearmente ou concentradas.

Os apoios de uma viga podem ser de três tipos, de acordo com seus graus de liberdade:

- a) Apoios de 1º gênero (ou apoios simples): restringem o movimento em uma direção vertical;
- b) Apoios de 2º gênero (ou rótula): restringem o movimento em duas direções, vertical e horizontal;
- c) Apoios de 3º gênero (ou engastes): além de restringirem o movimento em duas direções, como no apoio de 2º gênero, também impedem a rotação da seção transversal.

A seguir se encontra o modelo de uma viga, com um apoio do tipo engaste no ponto A e com a outra extremidade, no ponto B, livre, havendo neste exemplo ilustrativo uma força P concentrada de direção vertical e sentido de baixo para cima.

Figura 2.1 - Viga submetida à força P.



Fonte: Buffoni (2022).

Como reação à força P, surgirão forças reativas no apoio em A e forças internas ao longo da viga, o que causará tensões de tração, de compressão e de cisalhamento, além de deslocamentos por conta da deformação que a força aplicada irá causar na viga.

Este deslocamento e as forças internas podem ser calculados de acordo com métodos empregados para a análise estrutural da viga.

Alguns destes métodos propõem algumas simplificações que tem por finalidade fazer com que os engenheiros consigam quantificar estes fenômenos, mensurando assim os valores de esforços atuantes em peças estruturais. Mas essas simplificações devem ter um limite de aplicação, de modo que não haja uma grande influência nos resultados finais que possa comprometer o dimensionamento estrutural.

Em se tratando do comportamento de vigas à flexão simples, dois modelos de análise podem ser destacados: a teoria de vigas clássica de Euler-Bernoulli e a teoria de vigas de Timoshenko. A seguir, serão descritos estes dois métodos, com uma breve comparação entre eles. Posteriormente, um modelo de análise específico para cálculo dos esforços cortantes em vigas em concreto armado será tratado.

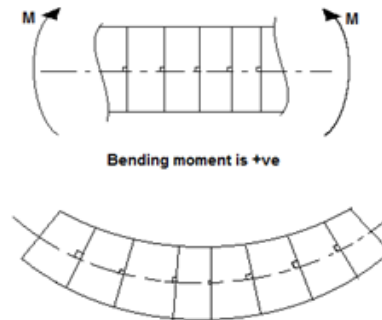
2.1.1. Teoria clássica de Euler-Bernoulli

A teoria de vigas clássica de Euler-Bernoulli considera três premissas em relação ao modo como as tensões deformam o material. Segundo esta teoria, a viga terá o seguinte comportamento antes e depois das cargas aplicadas (HIBBELER, 2009):

- a) O eixo que se encontra na superfície livre de tensões (linha neutra) não mudará de tamanho, apenas se curvará devido ao momento fletor aplicado;
- b) Todas as seções transversais da viga permanecem planas e perpendiculares ao eixo longitudinal da viga;
- c) Quaisquer deformações das seções transversais da viga, dentro de seu próprio plano, serão desprezadas.

Na Figura 2.2, ilustra-se a situação na qual as seções da viga permanecem perpendiculares ao eixo longitudinal, antes e depois de aplicado o momento fletor M e a viga sofrer deformação de flexão.

Figura 2.2 - Modelo de viga de Euler-Bernoulli.



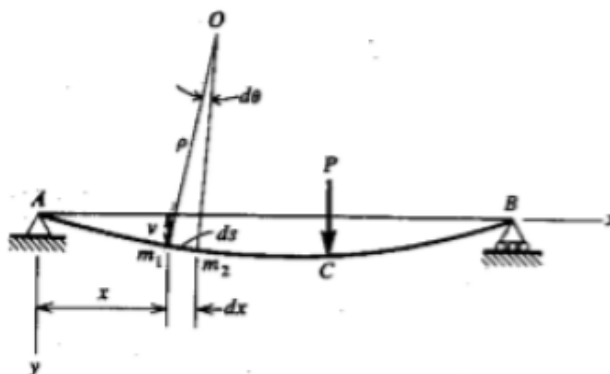
Fonte: Hibbeler (2009).

Na Figura 2.3, para a viga AB , sendo P uma força aplicada no ponto C , a linha ACB representa a viga deformada após a aplicação desta força.

Sabendo que o material da viga obedece a lei de Hooke, ou seja, o material se comporta de maneira linear elástica, define-se que:

1. v é o deslocamento vertical do ponto m_1 , antes e depois da deformação;
2. $d\theta$ é a rotação do raio de curvatura ρ que liga o ponto O aos pontos m_1 e m_2 respectivamente;
3. dx é a distância infinitesimal entre os pontos m_1 e m_2 na estrutura deformada.

Figura 2.3 - Linha elástica de viga com carga concentrada.



Fonte: Timoshenko e Gere (1983).

O raio de curvatura ρ é dado pela seguinte expressão:

$$ds = \rho d\theta \quad (1)$$

onde ds é a distância entre os pontos m_1 e m_2 na deformada.

Segundo Buffoni (2022), para vigas com pequenos ângulos de rotação, tem-se que

$$ds \approx dx \quad (2)$$

e, conseqüentemente,

$$\theta \approx \tan \theta = \frac{dv}{dx} \quad (3)$$

Assim, derivando a equação (3) e igualando-a à equação da curvatura, chega-se à fórmula abaixo:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad (4)$$

onde:

M é o momento fletor;

EI é a rigidez à flexão da viga.

Outras equações podem ser obtidas a partir destas relações com o momento fletor M e a força cortante V (HIBBELER, 2009):

$$\frac{dV}{dx} = -q \quad (5)$$

$$\frac{dM}{dx} = V \quad (6)$$

Esta teoria não considera deformações decorrentes de tensões de cisalhamento (GIFFHORN, 2019).

Sabe-se que uma viga submetida a um carregamento externo e às reações de apoio, tem a seguinte expressão para se obter a tensão de cisalhamento (HIBBELER, 2009):

$$\tau = \frac{VQ}{Ib} \quad (7)$$

onde:

τ é a tensão de cisalhamento do elemento localizado à distância y vertical do eixo neutro da seção;

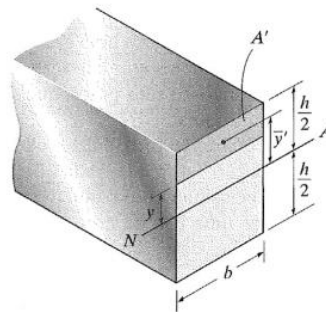
V é a força cortante, ou de cisalhamento, naquele ponto da viga;

I é o momento de inércia da área da seção transversal cheia da viga, calculado em torno da linha neutra;

b é a largura da seção transversal no ponto onde será medido τ ;

Q é o momento estático da área A' em relação à linha neutra.

Figura 2.4 - Tensão de cisalhamento em viga.



Fonte: Hibbeler (2009)

É importante observar que, quanto maior a força cortante, maior as tensões de cisalhamento. Ou seja, como os esforços cortantes tendem a ser maiores próximos aos apoios, conseqüentemente as tensões de cisalhamento serão maiores também próximas aos apoios da viga. A variação da tensão de cisalhamento será máxima próxima à linha neutra e nula na superfície da viga (HIBBELER, 2009).

2.1.2. Teoria de vigas de Timoshenko

A teoria de vigas de Timoshenko leva em conta, além dos efeitos da flexão, as deformações por cisalhamento.

Quando uma viga é deformada, além da seção transversal sofrer movimentos de translação devido à flexão, há também movimento de rotação em relação ao eixo horizontal devido a tensões de cisalhamento (FLEISCHFRESSER, 2012).

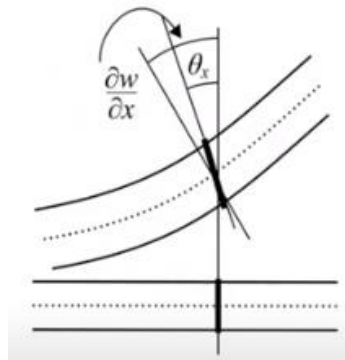
Diferentemente da teoria de Euler-Bernoulli, a seção da viga, apesar de continuar plana, não permanece perpendicular á linha neutra, levando assim a resultados mais refinados e mais próximos da realidade. Observa-se que os valores obtidos pela teoria de Timoshenko diferem da teoria clássica de Euler-Bernoulli quanto menor for a razão comprimento-altura da seção e quanto maior for a carga transversal (SILVA, 2019).

Resumidamente, podem-se adotar três premissas básicas do modelo de viga de Timoshenko (FLEISCHFRESSER, 2012):

- a) O material da viga é homogêneo, isotrópico e obedece à lei de Hooke. Ou seja, as deformações são lineares;
- b) As seções planas antes da aplicação das cargas permanecem planas após a deformação, mas não perpendiculares ao eixo longitudinal da viga;
- c) As tensões normais no eixo y são muito pequenas em relação às tensões normais no eixo x e, portanto, as relações tensão-deformação podem ser ignoradas.

Seja a Figura 2.5 a seguir, que ilustra o comportamento da viga de Timoshenko.

Figura 2.5 - Deslocamento de seção de viga de Timoshenko.



Fonte: Murta (2022).

A seção de viga acima, além de sofrer um deslocamento devido à flexão, também sofreu uma rotação devido ao cisalhamento. Percebe-se que a seção em negrito, antes normal à linha neutra tracejada, após a deformação, não permanece normal. Conforme Murta (2022), chamando θ_x da Figura 2.5 de ϕ , chega-se às equações de momento fletor M e força de cisalhamento V abaixo:

$$M = EI \frac{d\varphi}{dx} \quad (8)$$

$$V = kGA \left(\frac{dY}{dx} - \varphi \right) \quad (9)$$

onde k é o fator de correção ao cisalhamento, que depende da forma geométrica da seção, G é o módulo de elasticidade transversal, A é a área da seção, E é o módulo de elasticidade, I é a inércia em área da seção, e φ é a diferença de inclinação da seção antes e depois da deformação causada por uma força atuante na viga.

De acordo com Hibbeler (2009), as equações de equilíbrio de forças e momentos de uma viga submetida a uma carga distribuída $Q(x)$ é:

$$\frac{dV}{dx} = -Q \quad (10)$$

$$\frac{dM}{dx} = V = -EI \frac{d^2\varphi}{dx^2} \quad (11)$$

Substituindo as equações (8) e (9) em (10) e (11), chega-se em:

$$kGA \left(\frac{d\varphi}{dx} - \frac{d^2Y}{dx^2} \right) = Q \quad (12)$$

$$EI \frac{d^2\varphi}{dx^2} = kGA \left(\varphi - \frac{dY}{dx} \right) \quad (13)$$

Derivando-se a equação (13) em relação à x e organizando algebricamente, chega-se a equação (14), que é chamada de equação de viga de Timoshenko (MURTA, 2022):

$$EI \frac{d^4w}{dx^4} = q(x) - \frac{EI}{kAG} \frac{d^2q}{dx^2} \quad (14)$$

Na equação (14), o valor de k depende da forma da seção transversal. Para seções retangulares cheias, o valor de k será de $5/6$ (COWPER, 1966).

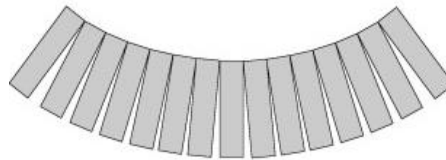
2.1.3. Comparação Teoria Clássica x Teoria de Timoshenko

A Figura 2.6 compara a deformação das seções transversais de uma viga submetida a uma força Q e um momento M , quando analisada pelas duas teorias. As seções do modelo de Euler-Bernoulli encontram-se planas e perpendiculares ao eixo longitudinal da viga, enquanto que as seções do modelo de Timoshenko, apesar de continuarem planas, não se mantêm normais ao eixo longitudinal.

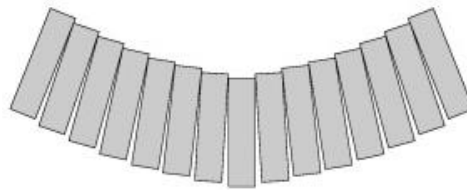
Figura 2.6 - Comportamento de diferentes modelos em relação a deformações.



a) Viga não deformada.



b) Viga deformada de acordo com o modelo de Euler-Bernoulli.



c) Viga deformada de acordo com o modelo de Timoshenko.

Fonte: Zhou et al (2019).

A Tabela 2.1 apresenta parte de um estudo conduzido por Silva (2019), onde se podem ver resultados de deslocamentos obtidos segundo diferentes teorias, tendo sido considerado pelo autor os modelos de Timoshenko e de Bernoulli para uma viga bi engastada com vão de 5 metros, submetida a um carregamento distribuído de 20 kN/m, onde se variou a altura de sua seção transversal, obtendo-se assim várias relações L/h .

Tabela 2.1 - Viga bi engastada com vão de 5 metros.

Deslocamento máximo (mm)		Altura da seção (mm)	Razão (1)/(2)	vão (m)	Razão vão/altura
Tmoshenko (1)	Bernoulli (2)				
2,888	2,775	300	1,04	5	16,7
1,256	1,171	400	1,07	5	12,5
0,667	0,599	500	1,11	5	10,0
0,404	0,347	600	1,16	5	8,3
0,267	0,218	700	1,22	5	7,1
0,189	0,146	800	1,29	5	6,3
0,141	0,103	900	1,37	5	5,6
0,109	0,075	1000	1,45	5	5,0
0,087	0,056	1100	1,55	5	4,5
0,072	0,043	1200	1,67	5	4,2
0,06	0,034	1300	1,76	5	3,8
0,052	0,027	1400	1,93	5	3,6
0,045	0,022	1500	2,05	5	3,3
0,04	0,018	1600	2,22	5	3,1
0,035	0,015	1700	2,33	5	2,9
0,032	0,013	1800	2,46	5	2,8
0,029	0,011	1900	2,64	5	2,6
0,026	0,0094	2000	2,77	5	2,5

Fonte: Silva (2019).

Nota-se que, para as seções com maiores alturas, acima de 1500 mm, o deslocamento máximo calculado segundo a teoria de Timoshenko é maior que o dobro do deslocamento calculado segundo a teoria de Bernoulli.

Ainda para efeitos de comparação, seja uma viga engastada em uma extremidade e livre na outra, com uma carga P de direção vertical e sentido de baixo pra cima. Levando em conta a teoria clássica e o modelo de Timoshenko, respectivamente, o deslocamento dessa viga, segundo Murta (2022), seria:

$$w(l) = \frac{P}{EI} \left(l \frac{l^2}{2} - \frac{l^3}{6} \right) = \frac{Pl^3}{3EI} \quad (15)$$

$$w(l) = \frac{Pl}{kAG} + \frac{Pl^3}{3EI} = \frac{Pl^3}{3EI} \left(\frac{3EI}{kAGl^2} + \mathbf{1} \right) \quad (16)$$

Nota-se que o que diferencia as equações (15) e (16) é o último termo, destacado em negrito na equação (16). Analisando este termo, pode-se perceber que, se atendida a equação (17), os deslocamentos tanto para a teoria clássica quanto para a viga de Timoshenko tendem a ser os mesmos.

$$\frac{EI}{kAGl^2} \ll 1 \quad (17)$$

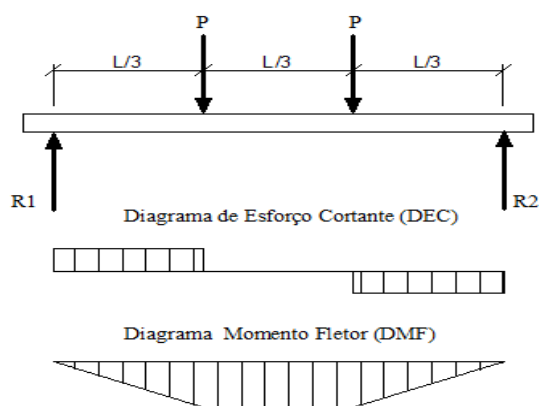
Esta análise reforça um estudo conduzido por Silva (2019) que mostrou que, para vigas de seção retangular e carregamento distribuído, variando-se os tipos de apoios e a altura da seção transversal e mantendo-se o vão constante, as diferenças de deslocamento em relação ao modelo de Euler-Bernoulli e ao de Timoshenko podem ser maiores quanto menor for a relação entre o vão e a altura da seção, podendo essa diferença chegar a ser maior que o dobro. Conforme a relação vão/altura aumenta, essa diferença entre ambos os modelos tende a ser menor, podendo chegar a ser insignificante do ponto de vista da análise estrutural.

2.1.4. Modelo da Treliça Generalizada

Os itens anteriores abordaram os modelos de cálculo para a análise de vigas de um modo geral, que podem ser usados em outras peças na engenharia que tem um comportamento de uma viga, desde edificações até as asas de um avião, por exemplo.

O modelo de treliça generalizada já é mais utilizado para o dimensionamento das armaduras transversais de uma viga em concreto armado, pois este modelo norteia os modelos de cálculo I e II da NBR 6118 (2014), como afirma Bastos (2021).

Figura 2.7 - Ensaio de flexão à 4 pontos.



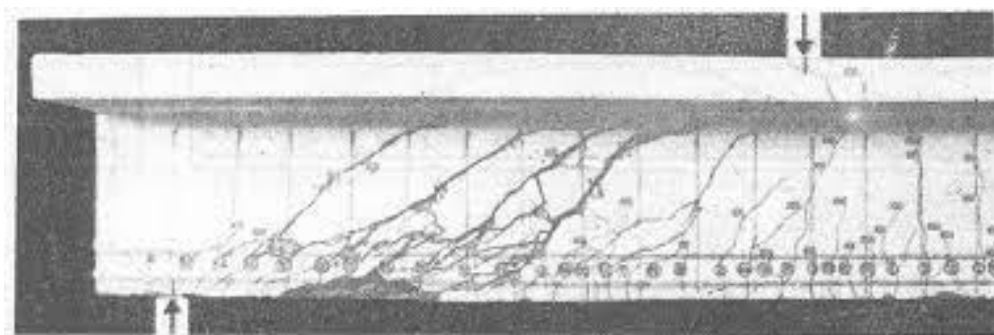
Fonte: Cordova *et al* (2016).

A Figura 2.7, apresenta uma viga hipotética submetida a duas forças concentradas P, equidistantes dos apoios. Attingido o seu estado limite último de flexão, a viga começa a apresentar fissuras perpendiculares em relação ao eixo longitudinal, estando a maior parte

das fissuras entre as forças aplicadas, região na qual há apenas flexão pura. Ou seja, entre as duas forças concentradas, a força cortante é zero, existindo apenas tensões normais de flexão, conforme se vê no gráfico de esforço cortante e momento fletor também ilustrados na mesma Figura 2.7. Estas fissuras partem da região mais tracionada para a região mais comprimida.

Ensaio em laboratórios demonstram que, próximo aos apoios, as fissuras apresentam-se inclinadas em relação ao eixo da viga. Isso acontece porque nessa região as tensões de cisalhamento e/ou forças cortantes são máximas, exercendo assim influência na forma como a viga irá se fissurar. As trincas, rachaduras e fissuras do elemento estrutural irão acontecer de forma inclinada sempre próxima aos apoios devido aos esforços de cisalhamento, que crescem nesse sentido, conforme se pode observar na Figura 2.8, que apresenta a imagem de uma viga submetida à ensaio de laboratório.

Figura 2.8 - Fissuras próximas aos apoios em uma viga.



Fonte: Bastos (2021).

Tensões de cisalhamento maiores próximas aos apoios ocorrem devido ao fato de que, além de atuar sobre a viga forças externas de direção vertical e sentido de cima para baixo na maioria das vezes, atuam também as reações dos apoios sobre a viga, que possuem a mesma direção vertical, mas sentido oposto. Ou seja, exatamente o que causa o cisalhamento em determinado elemento: forças resultantes atuando em uma mesma direção, porém em sentidos opostos.

Em uma viga de concreto armado, o que irá suportar os esforços de momento fletor são as barras longitudinais, que são geralmente dimensionadas pelo valor máximo do momento fletor. Já as barras transversais, ou estribos, irão ser dimensionadas de acordo com os esforços cortantes e irão suportar estes esforços e/ou tensões de cisalhamento. Dito isto, os estribos geralmente deverão estar mais concentrados perto dos apoios, onde as tensões de

cisalhamento são maiores, e em menor número no centro do vão, onde as tensões de cisalhamento são menores. É importante ainda atentar-se para a necessidade de sempre atender a quantidade mínima de armadura estipulado pela norma NBR 6118 (2014).

Segundo Pinheiro *et al* (2003), para se caracterizar uma seção de concreto armado, imagina-se a aplicação de uma força que começa do zero e vai aumentando sua intensidade. A seção resistente passa por diversas fases de deformação e fissuras que podem ser divididas em três: estágio I, II e III.

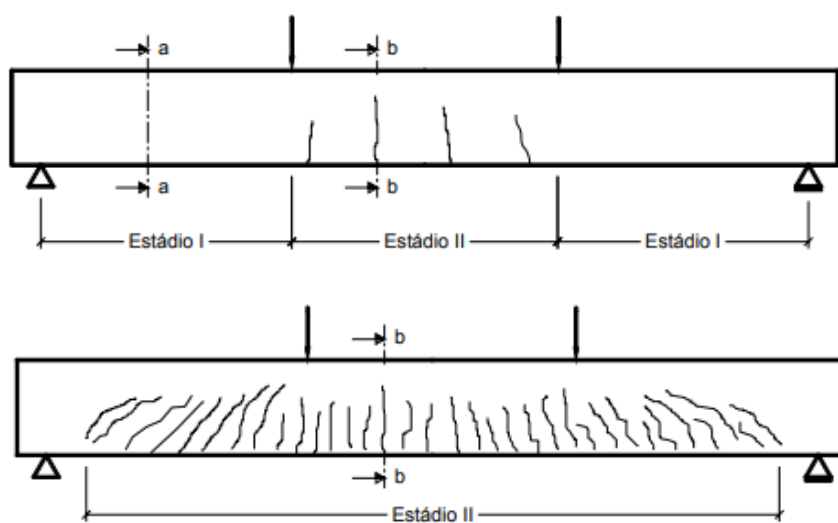
No estágio I o concreto resiste às tensões de tração da flexão causada pelo carregamento aplicado que, neste estágio, ainda é pequeno. As tensões normais são lineares ao longo da seção e obedecem à lei de Hooke. Nesta fase é calculada, por exemplo, a armadura mínima que irá resistir ao chamado momento de fissuração, que separa o estágio I do estágio II.

No estágio II, o concreto não resiste mais a tração, há o surgimento de fissuras que crescem na direção da borda comprimida e as tensões normais ainda obedecem à lei de Hooke e se encontram lineares apenas na borda comprimida. Pode haver o escoamento do aço ou não. O estágio II termina com o início da plastificação da região do concreto comprimido.

O último estágio, que é o III, é caracterizado pela plastificação do concreto na borda comprimida e sua iminente ruptura. É neste estágio que é feito o dimensionamento, o cálculo na ruptura.

A Figura 2.9 representa uma viga submetida inicialmente aos estádios I e II e, com o aumento da carga, apenas ao estágio II.

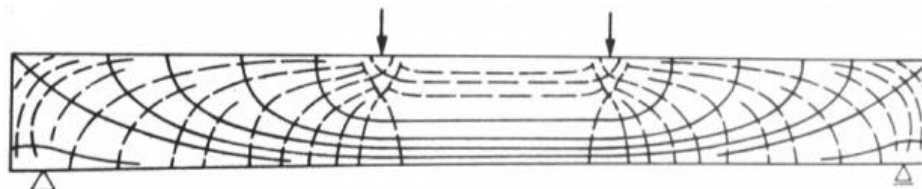
Figura 2.9 - Viga nos estádios I e II.



Fonte: Bastos (2021).

Este comportamento também pode ser ilustrado imaginando-se linhas de tensões. A Figura 2.10 apresenta as linhas de tensão em uma viga submetida a duas cargas de intensidade P.

Figura 2.10 - Trajetória das tensões internas em uma viga.



Fonte: Leonhardt e Mönnig (1977).

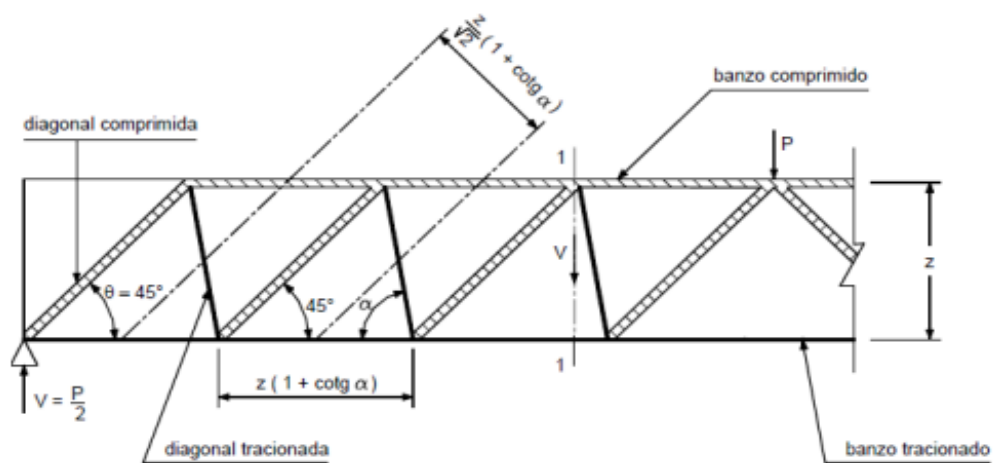
Sabendo que as linhas contínuas representam tensões de tração e as linhas tracejadas representam tensões de compressão, observa-se no trecho entre os pontos de aplicação das forças P que há uma linearidade na distribuição destas linhas, sendo as mesmas paralelas entre si. Isto acontece porque nesta região, para esse modelo de carregamento, não há tensões de cisalhamento por não haver esforço cortante, mas apenas momento fletor. Já quando se considera uma seção que se aproxima dos apoios, por conta da tensão de cisalhamento crescente, percebe-se que esse padrão se modifica, com as linhas de tensões de tração (contínuas) indo em direção à borda superior da viga e as linhas de tensões de compressão (tracejadas) indo em direção à borda inferior da viga (BASTOS, 2021).

É importante chamar atenção para o fato de que, assim como as linhas de tensão são inclinadas, as fissuras próximas aos apoios também são, como visto nas Figuras 2.8 e 2.9.

O modelo que norteia o dimensionamento das armaduras em uma viga de concreto armado é denominado Modelo de Treliça de Morsch (BASTOS, 2021). Este modelo supõe que uma viga de concreto e aço pode ter o comportamento semelhante ao de uma treliça isostática como mostra a Figura 2.11, que representa uma viga de concreto armado.

O interior desta viga se comporta como se houvesse uma treliça com banzos inferiores tracionados e banzos superiores comprimidos, além de diagonais tracionadas e comprimidas.

Figura 2.11 - Modelo de Treliça de Morsch (Modelo I).



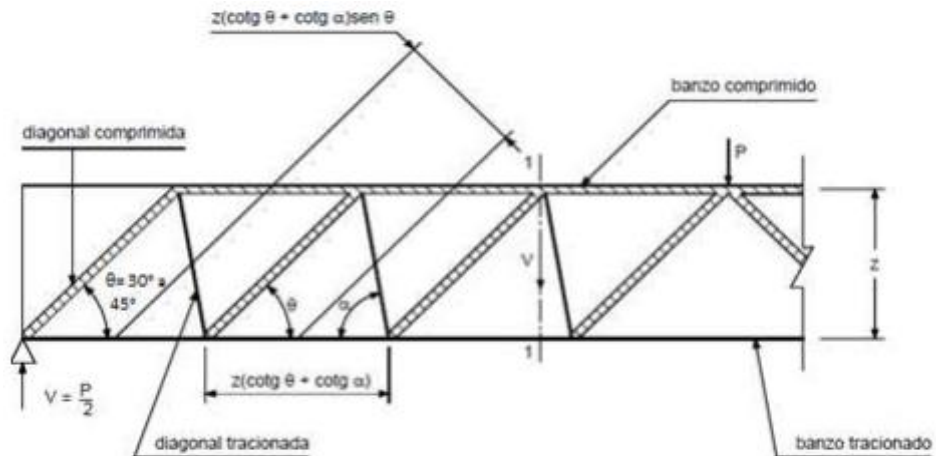
Fonte: Bastos (2021).

Segundo Sousa Filho *et al* (2021), por analogia, as diagonais tracionadas são os estribos da viga e as diagonais comprimidas são chamadas também de bielas comprimidas de concreto. Ou seja, o Modelo de Treliça de Morsch supõe que haverá na parte superior da viga o concreto comprimido e, na parte inferior, aço tracionado, além de bielas comprimidas de concreto e aço tracionado na vertical (estribos), sucessivamente ao longo da viga.

Como se pode perceber na Figura 2.11, a inclinação das bielas comprimidas de concreto será de 45° . A norma brasileira NBR 6118 (2014) admite dois modelos de cálculo para o dimensionamento de armaduras transversais seguindo o método da treliça de Morsch.

No modelo I, as diagonais comprimidas apresentam inclinação θ de 45° em relação ao eixo longitudinal da viga. Este modelo se baseia exatamente na treliça proposta por Ritter e Morsch (SOUSA FILHO *et al*, 2021) e nas linhas de tensão de compressão vistas na Figura 2.10. Posteriormente, outros pesquisadores constataram que essas linhas de tensão não se encontravam exatamente inclinadas a 45° e que, admitindo uma variação neste ângulo, poderia se chegar a estruturas mais econômicas. Este modelo, que os ângulos variam entre 45° e 30° , e que é mostrado na Figura 2.12, é chamado de modelo II ou Modelo da Treliça Generalizada (MELLER e VARGAS, 2016).

Figura 2.12 - Modelo de Treliça Generalizada (modelo II).



Fonte: Bastos (2021)

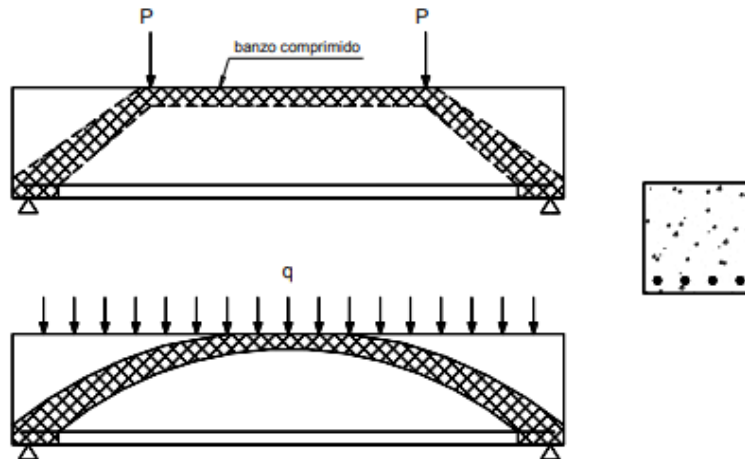
Além das diferenças entre os ângulos nos dois modelos, no modelo I a parcela complementar de resistência do concreto V_c tem valor fixo, independente da força cortante de cálculo V_{sd} . Já no modelo II, esta parcela V_c varia, sofrendo uma redução com o aumento da força cortante de cálculo V_{sd} (MELLER e VARGAS, 2016).

A inclinação dos estribos pode variar entre 45° e 90° . Mas, por não ser usual e nem prático o controle das inclinações dos estribos em obras, admite-se, para efeitos de cálculo, os estribos com ângulo de 90° em relação ao eixo longitudinal da viga (PINHEIRO *et al*, 2003).

2.1.4.1. Influência do banzo inclinado no esforço cortante

Observando novamente a Figura 2.10, percebe-se que as linhas de tensões de compressão e, conseqüentemente, os banzos de concreto comprimido, se inclinam em direção aos apoios, como se pode ver na Figura 2.13 a seguir. Isso faz com que a biela comprimida inclinada que surge próxima aos apoios absorva uma parte da força cortante (BASTOS, 2021).

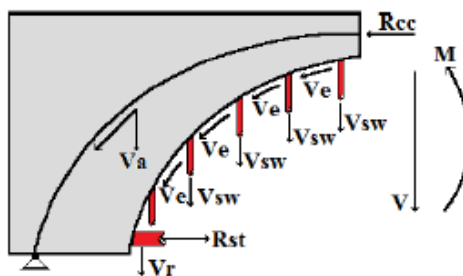
Figura 2.13 - Banzo comprimido inclinado em direção aos apoios.



Fonte: Bastos (2021).

Como consequência dessa inclinação, surge um sistema de forças e reações no interior da viga, mostradas na Figura seguinte.

Figura 2.14 - Forças internas resistentes da treliça.



Fonte: Camacho (2013).

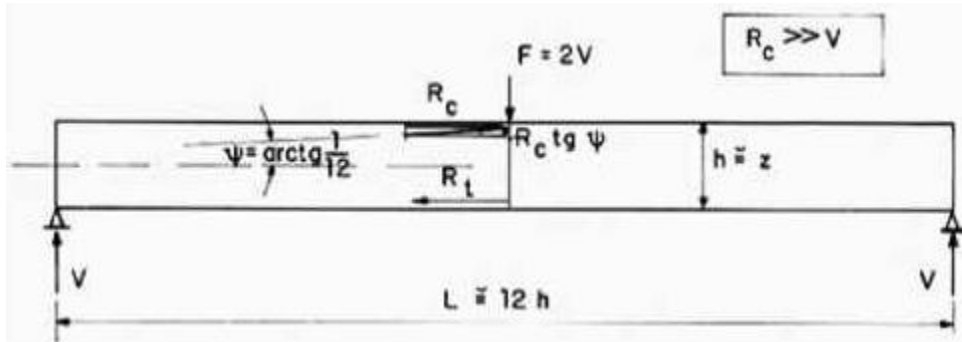
Onde:

- V – esforço cortante que atual na seção da viga;
- V_{sw} – esforço cortante absorvido pelos estribos;
- V_r – esforço cortante absorvido pelo efeito de rebite da armadura longitudinal;
- V_e – esforço cortante absorvido pelos agregados do concreto ao longo da fissura;
- V_a – Parcela da cortante que se direciona diretamente para os apoios.

Ainda em relação ao Modelo da Treliça de Morsch, há uma diferença entre os valores das tensões medidas e as previstas pelo modelo. O maior responsável por essa diferença é a inclinação do banzo comprimido da treliça em direção aos apoios.

Observa-se que, em uma peça esbelta, ou seja, o comprimento L sendo muito maior que a altura h , as forças de compressão provenientes da flexão no banzo comprimido são muito maiores que as forças de cisalhamento, como podemos observar na Figura 2.15 abaixo. Em decorrência da inclinação do banzo comprimido, há uma significativa redução da força cortante próxima aos apoios, que é onde o banzo se encontra mais inclinado.

Figura 2.15 - Parcela de redução do banzo comprimido.



Fonte: Fusco (2008).

Segundo Fusco (2008), analisando-se a Figura 2.15, pode-se chegar à seguinte expressão para o cálculo da força cortante reduzida ($V_{reduzida}$):

$$V_{reduzida} = V - R_c \operatorname{tg} \Psi \quad (18)$$

Admitindo-se, conforme a Figura 2.15, que o vão L seja da ordem de $12 \cdot h$ (doze vezes o valor da altura da viga) e que Ψ seja $\operatorname{arctg}(\frac{h}{L})$, onde Ψ é o ângulo que o banzo comprimido faz com a horizontal, obtém-se a seguinte relação:

$$R_c = \frac{V L/2}{h} = 6V \quad (19)$$

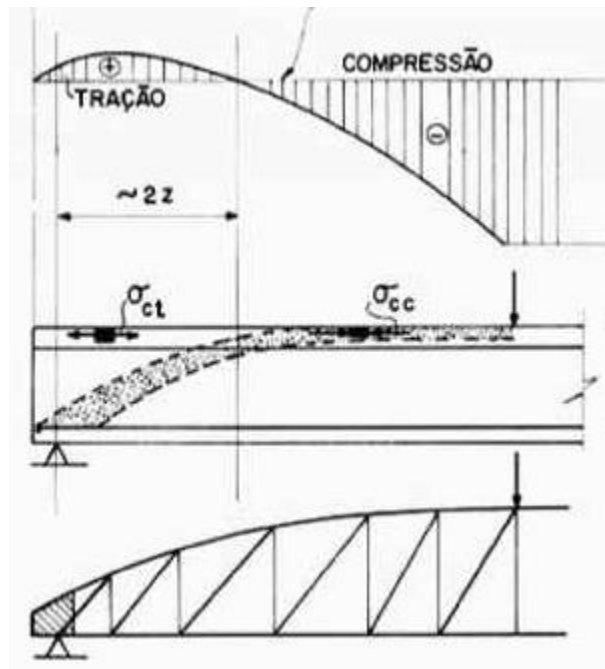
Substituindo a equação 18 na equação 19 chegaremos ao valor da força cortante reduzida dada em função da força cortante calculada V :

$$V_{reduzida} = V - \frac{6V}{12} = \frac{V}{2} \quad (20)$$

Ou seja, a força cortante reduzida, segundo a análise, pode chegar à metade da força cortante total obtida pelo cálculo a partir de um modelo de viga. Essa diferença pode ser explicada pela inclinação do banzo comprimido, que absorve parte da cortante.

Mas, no trecho próximo aos apoios, devido às fortes inclinações das tensões de compressão e tração no interior da viga, conforme visto na Figura 2.10, também podem aparecer tensões de tração, como mostra a Figura 2.16 abaixo:

Figura 2.16 - Tensões internas em uma viga e inclinação do banzo superior.



Fonte: Fusco (2008).

Observa-se, na figura acima, que a distância cuja face superior da viga está exposta à tração é de aproximadamente $2z$, ou seja, duas vezes a medida da altura da viga.

2.2. CONSIDERAÇÕES SOBRE A NBR 6118 (2014)

Em relação ao cálculo de vigas de concreto armado, a NBR 6118 (2014) dá as diretrizes de como se deve proceder para o cálculo da armadura resistente aos esforços cortantes, os estribos. Para isso, existem dois tipos de modelos para o cálculo dessa armadura: modelo de cálculo I e II. A seguir será descrito como se deve proceder nestes dois modelos de cálculo.

2.2.1. Modelo de cálculo I

Segundo a NBR 6118 (2014), deve-se verificar o estado-limite último da estrutura. Para isso, as duas condições abaixo devem ser atendidas:

$$V_{sd} \leq V_{rd2} \quad (21)$$

$$V_{sd} \leq V_{rd3} = V_c + V_{sw} \quad (22)$$

onde:

V_{sd} é a força cortante solicitante de cálculo na seção, já majorada de um fator de segurança;

V_{rd2} é a força cortante resistente de cálculo, relativa à ruína das diagonais comprimidas de concreto, cujo cálculo será explorado mais abaixo;

V_{rd3} é a força cortante resistente de cálculo relativa à ruína por tração diagonal, onde V_c é a parcela da cortante absorvida por mecanismos relativos ao modelo da treliça e V_{sw} é a parcela resistida pela armadura transversal.

Se a equação (21) não for atendida, a viga não passa pela verificação de compressão nas bielas e se deve optar por modificar algumas dimensões, como aumentar a seção da viga ou aumentar o f_{ck} do concreto.

O modelo de cálculo I admite a inclinação das diagonais de compressão, de acordo com o modelo da treliça já descrito, de 45° e a parcela V_c com um valor constante, independentemente de V_{sd} .

Em primeiro lugar, deve-se verificar a compressão diagonal do concreto, dada pela equação (23) a seguir:

$$V_{rd2} = 0,27\alpha_{v2}f_{cd}b_wd \quad (23)$$

onde:

$$\alpha_{v2} = \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right) \quad (24)$$

sendo f_{ck} expresso em megaPascal (MPa);

f_{cd} é o valor de f_{ck} , em MPa, minorado de um fator de segurança de 1,4;

b_w é a largura da seção da viga, expressa em mm;

d é a altura útil da seção, igual à distância da borda comprimida ao centro de gravidade da armadura longitudinal de tração, expressa em mm.

O passo seguinte será o cálculo da armadura transversal, dado pela fórmula:

$$V_{sd} = V_c + V_{sw} \quad (25)$$

onde:

$$V_{sw} = \left(\frac{A_{sw}}{s} \right) 0,9d f_{ywd} (\sen \alpha + \cos \alpha) \quad (26)$$

$V_c = 0$ nos elementos estruturais tracionados quando a linha neutra se situa fora da seção;

$V_c = V_{c0}$ na flexão simples e na flexo-tração com a linha neutra cortando a seção;

$V_c = V_{c0} (1 + M_0/M_{sd, \text{máx}}) \leq 2V_{c0}$ na flexo-compressão;

$$V_{c0} = 0,6f_{ctd}b_wd \quad (27)$$

sendo:

$$f_{ctd} = f_{ctk,inf}/\gamma_c \quad (28)$$

onde:

s é o espaçamento entre os elementos da armadura transversal A_{sw} , medido segundo o eixo longitudinal da viga;

f_{ywd} é a resistência à tração do aço;

α é o ângulo de inclinação da armadura transversal em relação ao eixo longitudinal, admitindo valores, para esse modelo de cálculo, de $45^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$;

$M_{sd, \text{máx}}$ - momento fletor de cálculo máximo no trecho em análise.

2.2.2. Modelo de cálculo II

Diferentemente do modelo de cálculo I, o modelo II admite inclinações das diagonais de compressão entre 30° e 45° . Outra diferença é que a parcela complementar V_c sofre redução com o aumento de V_{sd} .

Em lugar da equação (23), usa-se:

$$V_{rd2} = 0,54\alpha_{v2}f_{cd}b_wd\sen^2\theta (\cotg \alpha + \cotg\theta) \quad (29)$$

Para o cálculo de armadura transversal, têm-se o mesmo que na equação (25), onde:

$$V_{sw} = \left(\frac{A_{sw}}{s} \right) 0,9df_{ywd}(\cotg \alpha + \cotg \theta)\text{sen } \alpha \quad (30)$$

$V_{c0} = 0$, em elementos estruturais tracionados quando a linha neutra se situa fora da seção;

$V_c = V_{c1}$, na flexão simples e na flexo-tração com a linha neutra cortando a seção;

$V_c = V_{c1} (1 + M_0/M_{sd, \text{máx}}) \leq 2V_{c1}$ na flexo-compressão, com:

$V_{c1} = V_{c0}$ quando $V_{sd} \leq V_{c0}$;

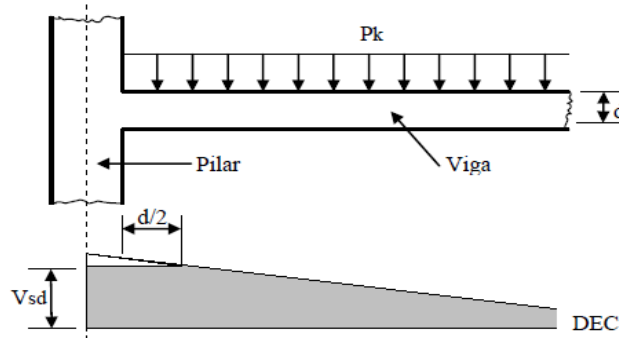
$V_{c1} = 0$ quando $V_{sd} = V_{rd2}$, interpolando-se linearmente para valores intermediários.

2.2.3. Redução da força cortante próximo aos apoios

Ainda sobre considerações referentes à norma de estruturas de concreto, em seu item 17.4.1.2.1, é possível fazer uma redução da força cortante (V_{sd}) próxima aos apoios da viga para o cálculo de armadura transversal. Isso se a carga e as reações de apoio forem aplicadas em faces opostas. Há duas hipóteses:

- a) Para cargas distribuídas, a força cortante pode ser considerada como sendo constante entre o apoio e a seção situada à distância $d/2$ da face do apoio, onde d é igual à altura da viga.

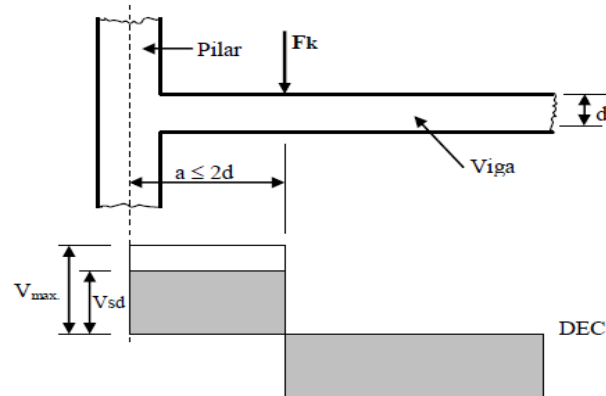
Figura 2.17 - Redução de força cortante para carga distribuída.



Fonte: Camacho (2013)

- b) Para cargas concentradas, a força cortante entre o eixo teórico do apoio e uma distância igual a duas vezes a altura da viga pode ser reduzida de um fator ($a/2d$). Ou seja, a força cortante máxima nesse trecho é multiplicada por esse fator, obtendo-se assim a força cortante reduzida, constante neste trecho.

Figura 2.18 - Redução da força cortante para carga concentrada.



Fonte: Camacho (2013).

Estas reduções podem ser realizadas apenas para o cálculo de armaduras. Não se aplicam para a verificação da resistência à compressão diagonal do concreto e nem para a verificação da força cortante última.

Segundo Covas (2022), a redução da força cortante também não se aplica a vigas oriundas do modelo de grelhas ou pórtico espacial, apesar do item 17.4.1.2.1 da NBR não citar esta restrição. Isso devido ao fato das grelhas serem discretizadas em inúmeras barras com a aplicação das respectivas cargas concentradas e momentos fletores dos extremos das barras ao longo da viga. Assim, não temos de forma clara a condição de cargas distribuídas e concentradas que se encontra em vigas contínuas comuns e que a NBR 6118 (2014) cita em seu texto. Agindo a favor da segurança e levando em conta inúmeros casos particulares que surgiram para esta consideração no modelo de grelha, a reduções não se aplicam a este modelo.

Esta redução do esforço cortante para o cálculo dos estribos, para cargas concentradas e distribuídas, também está presente na antiga norma de estruturas de concreto, ABNT NB-1, em seu item 4.1.4.3 com os mesmos parâmetros de distância e valor de redução (NETTO, 2021).

2.2.4. Outras considerações sobre a norma NBR 6118 (2014)

Em seu item 18.3, a norma trata de aspectos sobre vigas. As observações referem-se a vigas isostáticas com a relação $L/h \geq 2,0$ e $L/h \geq 3,0$ para vigas contínuas, sendo L o comprimento do vão teórico e h a altura total da viga. As vigas que não obedecem a essa relação são consideradas vigas-parede.

Outros pontos levantados neste item versam sobre:

a) Armadura longitudinal:

O dimensionamento da armadura longitudinal deve ser feito levando em conta o máximo momento fletor, porque é ela quem irá resistir aos esforços de flexão, e as condições mais desfavoráveis possíveis, sempre priorizando a segurança. Sua distribuição transversal e longitudinal ao longo da viga deve respeitar os espaçamentos máximos e mínimos dispostos na norma.

b) Armadura transversal para força cortante:

Segundo o item 18.3.2.2 da norma, os estribos que resistirão aos esforços cortantes devem envolver a armadura longitudinal por meio de um ramo horizontal e não devem ter diâmetro menor que 5 mm, sem exceder 1/10 da largura da alma da viga. Se a barra for lisa, seu diâmetro não pode ser maior que 12 mm.

O espaçamento mínimo dos estribos, em relação ao eixo longitudinal, deve permitir a passagem do vibrador para garantir um bom adensamento do concreto. O espaçamento máximo depende das duas condições a seguir:

→ Se $V_d \leq 0,67V_{rd2}$, então $S_{m\acute{a}x} = 0,6d \leq 300$ mm;

→ Se $V_d > 0,67V_{rd2}$, então $S_{m\acute{a}x} = 0,3d \leq 200$ mm.

O espaçamento transversal máximo entre ramos sucessivos de armadura constituída de estribos deve atender aos seguintes valores:

→ Se $V_d \leq 0,20V_{rd2}$, então $S_{t, m\acute{a}x} = d \leq 800$ mm;

→ Se $V_d > 0,20V_{rd2}$, então $S_{t, m\acute{a}x} = 0,6d \leq 350$ mm.

Ainda em relação a esforços cortantes, a norma também traz no item 17.4.1 o que já foi explicado anteriormente: para elementos lineares, armados ou protendidos, os dois modelos de cálculo para os estribos fazem uma analogia com o modelo da treliça, de banzos paralelos. Todos os elementos estruturais submetidos a esforços cortantes, com exceção de pilares e blocos de fundação submetidos majoritariamente à compressão, lajes nervuradas e elementos estruturais onde a base é maior do que cinco vezes a altura da seção ($b_w > 5d$), deve conter armadura transversal mínima constituída por estribos que obedeçam a uma taxa geométrica de:

$$\rho_{sw} = \frac{A_{sw}}{b_w s \operatorname{sen}\theta} \geq 0,2 \frac{f_{ct,m}}{f_{ywk}} \quad (31)$$

onde:

A_{sw} - área da seção transversal dos estribos;

s - espaçamento dos estribos segundo o eixo longitudinal do elemento estrutural;

α - inclinação dos estribos em relação ao eixo longitudinal;

b_w - largura média da alma, ao longo da altura útil da seção;

f_{ywk} - resistência característica ao escoamento do aço da armadura transversal;

$f_{ct,m}$ - resistência à tração do aço.

Isolando-se A_{sw}/s na equação (31), chega-se à equação (32).

$$\frac{A_{sw,min}}{s} \geq \frac{0,2 f_{ctm}}{f_{ywk}} b_w \operatorname{sen}\alpha \quad (32)$$

Para estribos verticais ($\alpha = 90^\circ$) e adotando um espaçamento s de 100 cm, resulta na equação (33), segundo Bastos (2021):

$$A_{sw,min} = \frac{20 f_{ctm}}{f_{ywk}} b_w \quad (33)$$

Em seu item 21.3.3, a norma fala que aberturas em vigas, para passagem de tubulação vertical, por exemplo, não devem ter diâmetro maior que 1/3 da largura da seção transversal na região do furo e que deve ser verificada a capacidade de resistir a esforços de cisalhamento da viga em questão.

No item 14.4.2.1, a NBR 6118 (2014) também define as placas, elemento estrutural mais comumente chamado de lajes. Em uma comparação entre uma laje e uma viga, objeto

de estudo deste trabalho, pode-se dizer que o vão dos dois elementos será o mesmo, em uma estrutura predial por exemplo. O que irá diferenciá-los é a relação altura/vão, que no caso da viga será maior. Deste modo, o comportamento mecânico da força cortante em lajes tem relação com vigas de pequena altura.

Em seu item 19.4.1, a norma trata sobre lajes e elementos lineares com $b_w \geq 5d$ e fala que, obedecidas estas dimensões, as lajes maciças ou nervuradas podem prescindir de armadura transversal quando a força cortante de cálculo obedecer à expressão abaixo.

$$V_{sd} \leq V_{rd1} \quad (34)$$

Em relação a lajes com armadura para força cortante, a NBR 6118 (2014) trata no item 19.4.2 desta questão, sendo estabelecido que a resistência dos estribos pode ser considerada com os seguintes valores máximos, sendo permitida interpolação linear:

- I. 250 MPa, para lajes com espessura até 15 cm;
- II. 435 MPa (f_{ywd}), para lajes com espessura maior que 35 cm.

Além disso, aplicam-se os critérios estabelecidos no item 17.4.2, que trata da verificação do estado limite último em elementos lineares, ou seja, tanto em vigas quanto em lajes.

Segundo Netto (2021), ainda se tratando de armaduras transversais em lajes, a antiga norma NB-1 permitia dispensar a armadura transversal abaixo de certos níveis de solicitação com base no fato de que as fissuras das lajes são mais espaçadas e as alturas, em geral, são pequenas.

Fontes (2017) afirma que o uso de lajes nervuradas proporciona uma economia de concreto em sua região tracionada, em relação à lajes maciças. Por outro lado, quando essa estrutura deve possuir armaduras transversais que combatam os esforços de cisalhamento, a montagem dos estribos é um pouco dificultada. Sendo assim, quando possível, o autor sugere que se deva dispensar a armadura de cisalhamento para facilitar a montagem do sistema.

Comparando as prescrições e os resultados experimentais e teóricos das normas canadense (CSA A23-04), americana (ACI-318.14) e brasileira (NBR 6118/2014) em relação ao dimensionamento de lajes nervuradas ao cisalhamento, constatou-se que, das três,

a norma brasileira é a que apresenta resultados menos conservadores. Além disso, para aumentar a segurança, recomenda-se que, para a verificação de nervuras de lajes nervuradas sem armadura, o V_{rd1} seja multiplicado por um fator de 0,90 (FONTES, 2017).

A norma brasileira apresenta resultados não conservadores para V_{rd1} e conservadores para o dimensionamento ao cisalhamento quando providos de estribos. Por esse motivo, recomenda-se a adoção de que o V_{rd1} seja multiplicado por um fator de 0,90, a favor da segurança, e de que o item 19.4.1 da NBR 6118 (2014), que trata de lajes sem armaduras para força cortante, seja revisto conforme equação abaixo:

$$V_{sd} \leq \alpha_n V_{rd1} \quad (35)$$

onde:

α_n é o coeficiente de redução da força cortante para nervuras de lajes nervuradas com valor igual a 0,90.

Diferentemente das outras duas normas estrangeiras, para o cálculo da resistência ao cisalhamento pela NBR 6118 (2014), com ou sem o coeficiente proposto anteriormente, o valor de b_w deve ser sempre o menor valor da largura da seção ao longo da altura útil h .

3. METODOLOGIA E DESENVOLVIMENTO

Inicialmente foi realizada a revisão bibliográfica por meio de periódicos, teses, dissertações, trabalhos de conclusão de curso, livros e publicações sobre o cálculo de vigas em relação a forças cortantes, tensões de cisalhamento e reduções de forças cortantes nas regiões dos apoios.

Através desta pesquisa, foi possível desenvolver conhecimento sobre métodos de análise de vigas, efeitos da força cortante e cálculo de tensões de cisalhamento, procurando observar as diferentes hipóteses de cada método.

Buscou-se também encontrar justificativas do por que a NBR 6118 (2014) permitir a redução dos esforços cortantes próximos aos apoios para o cálculo dos estribos.

As análises e cálculos de parâmetros puderam ser então realizados por meio de planilhas eletrônicas para tratamento e análise dos resultados por meio de gráficos. Optou-se por usar planilhas eletrônicas também por causa da maior rapidez em resultados e cálculos que envolvem tantas variáveis, conforme a entrada dos dados. Dessa maneira, a avaliação de diferentes casos de vigas se tornou mais prática com a possibilidade de variação dos parâmetros, como o comprimento da viga e de seus carregamentos que, conforme iam sendo modificados, forneciam automaticamente os resultados de dimensionamento e verificações de segurança.

Para a elaboração da planilha para o cálculo automático das armaduras dos estribos, foi usada como referência principal a apostila do professor Paulo Bastos (2021) da Universidade Estadual Paulista sobre “Dimensionamento de Vigas de Concreto Armado à Força Cortante”, além de outras referências citadas no capítulo 2, como CAMACHO (2013) e MELLER e VARGAS (2016). Por meio dos exemplos de exercícios resolvidos destas referências, deu-se início ao desenvolvimento da planilha, primeiramente para a automatização dos cálculos do modelo de cálculo I da ABNT NBR 6118 (2014) e, posteriormente, para o modelo de cálculo II.

Foram então definidos modelos com variação da relação entre a altura da seção transversal (h) e o vão da viga (L), visando generalizar o processo de análise e permitir comparações de resultados mais gerais.

O modelo de viga definido foi o de uma viga bi apoiada, com carregamentos distribuídos permanentes e variáveis, e um segundo modelo com carregamentos concentrados permanentes e variáveis. Assim, optou-se por realizar a análise comparativa

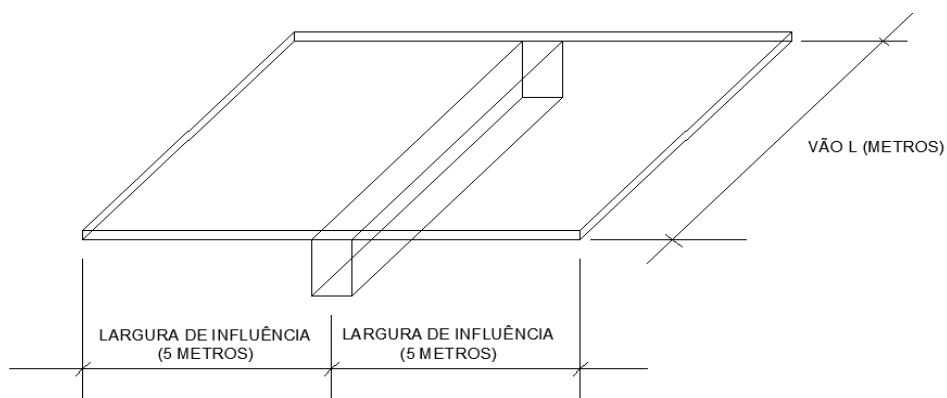
destes, considerando-se carregamentos diferentes sendo analisados separadamente. Ou seja, analisou-se o comportamento da viga apenas para os carregamentos distribuídos e, depois, apenas para os carregamentos concentrados.

Para os carregamentos distribuídos foram levados em conta o peso próprio da viga, uma carga distribuída permanente e uma carga distribuída variável. Os valores foram obtidos a partir da norma ABNT NBR 6120 (2019).

A carga distribuída permanente é a soma dos pesos próprios da laje que a viga sustenta, do revestimento e do porcelanato, sendo sua maior parcela proveniente do peso próprio da laje.

O peso próprio da laje é calculado em função do peso específico do concreto armado, que é igual a 25 kN/m^3 segundo NBR 6120 (2019), da espessura da laje, tendo sido adotado o valor fixo usual de 20 cm, e da largura de influência para a viga. No caso da largura de influência, considerou-se uma largura de 5 metros para cada lado, totalizando 10 metros, conforme se observa na Figura 3.1.

Figura 3.1 – Largura de influência da viga.



Fonte: Autoria própria (2022).

O peso próprio do revestimento também é calculado em função na espessura do revestimento, que foi adotada em 2 cm, da largura de influência e do peso específico do revestimento de 19 kN/m^3 , segundo NBR 6120 (2019).

O peso próprio do porcelanato é o produto entre a largura de influência e o peso específico do porcelanato de $0,25 \text{ kN/m}^2$, segundo NBR 6120 (2019).

Em relação ao carregamento distribuído variável, optou-se por adotar o valor que a NBR 6120 (2019) estipula para escritórios, que é de 2 kN/m^2 . Este valor foi multiplicado pela largura de influência da laje, resultando assim em uma força distribuída de 20 kN/m .

Para os carregamentos concentrados, definiu-se duas forças concentradas de 100 kN agindo simultaneamente. Somando-se estas duas forças de 100 kN, obtém-se uma ordem de grandeza semelhante à força distribuída.

Inicialmente, alguns valores de entrada foram estabelecidos, de modo que a interface para dados de entrada da planilha de cálculo foi dividida em três partes: dados geométricos, dados do material e dados do carregamento, como se pode observar nas Figuras 3.2, 3.3 e 3.4 respectivamente, que representam um trecho da interface da planilha desenvolvida.

Figura 3.2 - Entrada de dados geométricos.

<u>Dados geométricos:</u>			
			Vão (L)= 10 m
			Vão (Lef.) = 10,25 m
bw =	25,0	cm	L/h = 20,00
h =	50,0	cm	h/L = 0,05
Cobrimento =	5,0	cm	L0 = 10 m
d útil =	45,0	cm	t1 = 0,25 m
			t2 = 0,25 m

Fonte: Autoria própria (2022).

Em relação aos dados geométricos, os valores que foram definidos como dados de entrada e que, por essa razão, podem ser modificados, foram:

- a largura da viga (b_w),
- a sua altura (h),
- o cobrimento dos estribos, que foi definido valor fixo de 5 cm,
- o vão (L),
- a espessura dos pilares de apoio (t_1 e t_2).

Para os dados de entrada dos parâmetros dos materiais é preciso fornecer o tipo de concreto, o tipo de aço e, no caso do modelo de cálculo II, o valor do ângulo θ , que corresponde à inclinação das diagonais comprimidas, ou bielas de compressão, no modelo da treliça clássica (BASTOS, 2021). A Figura 3.3 apresenta este trecho da interface da planilha.

Figura 3.3 - Entrada de dados do material.

<u>Dados do material:</u>			
Concreto	C25		$\gamma_c = 1,4$
Aço	CA50		$\gamma_s = 1,15$
F _{ywk} =	50	kN/cm ²	$\gamma_g = 1,4$
F _{ck} =	25	MPa	$\gamma_q = 1,4$
F _{ywd} =	43,5	kN/cm ²	

Fonte: Autoria própria (2022).

Em relação aos demais dados do material, como o valor da resistência característica à compressão, estes dependem do tipo de concreto e do tipo de aço escolhido. Com base nessa informação, têm-se então definidos os valores do f_{ywk} do aço e do f_{ck} do concreto. Estes valores podem ser modificados na planilha usada para o cálculo dos estribos.

Os valores que aparecem também na Figura 3.3 (γ_c , γ_s , γ_g e γ_q) são os coeficientes de segurança e seus valores são dados pela própria norma, sendo γ_c utilizado para o cálculo de f_{cd} e f_{ctd} , γ_s utilizado no cálculo do f_{ywd} , γ_q utilizado nas cargas variáveis e γ_g nas cargas permanentes.

O concreto escolhido para todos os modelos no presente trabalho foi o de classe C25 e o aço, de classe CA50, por serem parâmetros mais comuns e mais utilizados em obras.

Em relação aos dados do carregamento, observa-se que o objetivo é calcular a força cortante de cálculo (V_{sd}). Para isso, considera-se a soma de cinco componentes de forças cortantes, sendo cada uma das componentes provenientes de diferentes ações.

Para este trabalho, foram consideradas as seguintes ações atuantes: o peso próprio da viga (g_0), uma carga distribuída permanente (g_1), uma carga distribuída variável (q), uma força concentrada permanente (P_g) e uma força concentrada variável (P_q), como se pode observar na Figura 3.4 a seguir.

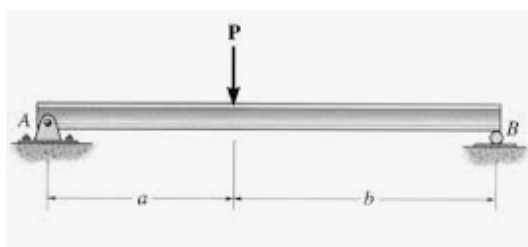
Figura 3.4 - Entrada de dados do carregamento.

Dados do carregamento:					
Vsd =	449,3	kN		Vsk (kN)	Vsd' (kN)
g0 (peso próprio)=	3,13	kN/m	16,02	22,42	
g1 (carga dist. permanente) =	16,6	kN/m	85,08	119	
q (carga dist. variável) =	10	kN/m	51,25	71,75	
Pg (força conc. permanente) =	150	kN	144,51	202,32	
a =	0,375	m			
b =	9,875	m			
Ra =	144,51	kN			
Rb =	5,49	kN			
Pq (força conc. variável) =	25	kN	24,09	33,72	
Ra =	24,09				
Rb =	0,91				

Fonte: Autoria própria (2022).

Para as cargas concentradas é preciso fornecer também o valor da distância de aplicação em relação aos apoios, por exemplo, que na Figura 3.4 corresponde aos parâmetros “a” e “b”, em metros. A Figura 3.5 abaixo ilustra melhor estas dimensões.

Figura 3.5 - Distâncias "a" e "b" da força P para os apoios.



Fonte: Hibbeler (2009).

Para cada uma das cinco componentes é calculado então o valor da força cortante característica (V_{sk}) que posteriormente é multiplicado pelo respectivo fator de segurança γ_f , resultando assim nos valores da força cortante de cálculo de cada uma das cinco ações (V_{sd}). Estas componentes quando somadas, resultam no valor final de cálculo V_{sd} , que é então utilizado para o cálculo das armaduras.

A planilha foi feita com base em alguns exercícios resolvidos. De maneira a testar a automatização dos cálculos, foram analisados inicialmente quatro testes, tendo estes sido bem-sucedidos, confirmando o bom funcionamento da planilha.

A seguir apresentam-se os resultados dos testes de validação da planilha, sendo divididos em testes de validação 1 e 2 para cada modelo de cálculo.

3.1. TESTE DE VALIDAÇÃO 1 – MODELO DE CÁLCULO I

O primeiro exercício resolvido usado foi tirado da 4ª edição do livro “Estruturas de Concreto Armado”, de Roberto Chust de Carvalho, pág. 296, e se trata de uma viga submetida a um esforço cortante característico de 1300 kN, com dimensões de 70 cm de base por 204 cm de altura e vão de 5 metros, aço CA50, com ϕ de 12,5 mm e concreto C26.

Abaixo se encontra um comparativo com os principais valores dos resultados do exercício e dos resultados calculados pela planilha.

Tabela 3.1 - Comparativo de valores teste 1, modelo I.

Parâmetro	Resultados de CARVALHO (2014)	Presente trabalho
V_{rd2}	6289,9 kN	6289,9 kN
V_c	1108,8 kN	1108,8 kN
V_{sw}	711,2 kN	711,2 kN
A_{sw}	9,087 cm ² /m	9,09 cm ² /m
Espaçamento entre estribos	27,50 cm ($\phi = 12,5$ mm)	27,0 cm ($\phi = 12,5$ mm)

Fonte: Autoria própria (2022).

Como se observa na Tabela 3.1, apenas o valor do espaçamento entre estribos diferiu um pouco. Isso se dá devido ao fato de que os cálculos da planilha são mais exatos e, pelo cálculo do espaçamento entre estribos depender da área de um estribo e, conseqüentemente, do valor de π , é de se esperar que a planilha use mais casas decimais e, com isso, apresente um valor mais exato.

É importante citar também que a princípio foi encontrada uma diferença maior entre os resultados dos exercícios e os resultados da planilha. Para tentar diminuir essa diferença, foi adicionada a função “ARRED” na planilha junto aos cálculos de A_{sw} , V_{rd2} , f_{ctd} e espaçamento entre estribos, que diz respeito à quantidade de casas decimais para arredondamentos. Conforme ia se aumentando a precisão, percebeu-se que os valores tendiam a se igualar, mostrando assim que o fato de alguns valores diferirem, não dizia respeito a algum erro de formulação da planilha, mas apenas por questões de arredondamento.

3.2. TESTE DE VALIDAÇÃO 2 – MODELO DE CÁLCULO I

O teste 2 para o modelo de cálculo I foi obtido do canal “Guia da Engenharia” MOURA (2019).

O exercício diz respeito a uma viga bi-apoiada, com 14 cm de largura e 40 cm de altura, vão de 4,5 metros, carregamento distribuído de 20 kN/m, concreto C20, aço CA50 e ϕ de 5 mm, para a qual se pede a área de aço necessária e o cálculo do espaçamento entre estribos.

Como a viga está sujeita a um carregamento distribuído, o máximo esforço cortante característico está na região dos apoios e equivale 45 kN.

Alguns dos valores calculados segundo a referência e os resultados obtidos com o uso da planilha de cálculo encontram-se na Tabela 3.2 abaixo.

Tabela 3.2 - Comparativo de valores teste 2, modelo I.

Parâmetro	Resultados de MOURA (2019)	Presente trabalho
V_{rd2}	178,8 kN	178,8 kN
V_c	33,4 kN	33,6 kN
V_{sw}	29,6 kN	29,4 kN
A_{sw}	2,1 cm ² /m	2,1 cm ² /m
Espaçamento entre estribos	17,50 cm ($\phi = 5$ mm)	18,7 cm ($\phi = 5$ mm)

Fonte: Autoria própria (2022).

O valor que mais se difere é o espaçamento entre estribos. Essa diferença pode ser justificada pelo fato de que a planilha apresenta um cálculo mais exato sem arredondamentos. Observa-se também que a referência utiliza uma tabela de área de aço da seção conforme o espaçamento, que consta na norma NBR 6118 (2014).

3.3. TESTE DE VALIDAÇÃO 1 – MODELO DE CÁLCULO II

Para o teste do modelo de cálculo II, utilizaram-se outros dois exercícios resolvidos com ordens de grandeza diferentes (CARVALHO, 2014).

O teste consiste de uma viga com largura de 25 cm e altura de 90 cm, sendo a altura útil de 80 cm, concreto C20, aço CA50, valor da força cortante máxima característica de 255,5 kN e armadura com ϕ de 6,3 mm, com o ângulo das bielas comprimidas de concreto θ adotado de 30°. Foi calculada a área de aço necessária e o espaçamento entre estribos.

Os valores obtidos na referência e no presente trabalho encontram-se na Tabela 3.3.

Tabela 3.3 - Comparativo de valores teste 1, modelo II.

Parâmetro	Resultados de CARVALHO (2014)	Presente trabalho
V_{rd2}	614 kN	614,6 kN
V_c	70,2 kN	70,3 kN
V_{sw}	287,8 kN	287,4 kN
A_{sw}	5,30 cm ² /m	5,30 cm ² /m
Espaçamento entre estribos	12,10 cm ($\phi = 6,3$ mm)	11,8 cm ($\phi = 6,3$ mm)

Fonte: Autoria própria (2022).

Pode-se ver que todos os valores tiveram diferenças mínimas e que, apesar de a área de aço A_{sw} resultar no mesmo valor final, o espaçamento entre estribos diferiu de pouco mais de 2 %. O que pode justificar que essa diferença novamente é a questão de arredondamentos dos valores de cálculo, observando que a planilha aplica resultados com maior precisão.

3.4. TESTE DE VALIDAÇÃO 2 – MODELO DE CÁLCULO II

Para o teste 2, foi utilizado um exercício resolvido da apostila do professor Paulo Bastos, item 5.17.2, página 62, que conta com uma viga de largura 100 cm e 225 cm, vão de 3 metros e força cortante característica máxima de 2000 kN, aço CA50 e concreto C25, com ângulo de inclinação das bielas comprimidas de concreto θ igual a 45°, a qual se pede para calcular a área de aço necessária para resistir aos esforços e o espaçamento entre estribos.

Os valores obtidos estão na Tabela 3.4 a seguir.

Tabela 3.4 - Comparativo de valores teste 2, modelo II.

Parâmetro	Resultados de BASTOS (2021)	Presente trabalho
V_{rd2}	9.329 kN	9.329,5 kN
V_c	1.407 kN	1.406,8 kN
V_{sw}	1.393 kN	1.393,2 kN
A_{sw}	16,55 cm ² /m	16,56 cm ² /m
Espaçamento entre estribos	14,8 cm ($\phi = 12,5$ mm)	14,8 cm ($\phi = 12,5$ mm)

Fonte: Autoria própria (2022).

3.5. VALORES DE L/h E VÃO EFETIVO

Após a validação da planilha desenvolvida, procedeu-se a definição de parâmetros para os modelos a serem estudados no presente trabalho.

Optou-se por adotar um valor fixo de altura da viga h de 50 cm e valores diferentes do comprimento do vão efetivo L , que variaram de 1 metro a 10,25 metros. Calcularam-se as armaduras para vãos efetivos iguais a 1.00, 1.50, 2.75, 4.00, 5.25, 6.50, 7.75, 9.00 e 10.25 metros.

Optou-se por considerar os apoios como pilares de concreto armado com seção transversal de 25 x 25 cm para todos os modelos.

3.6. REDUÇÃO DA FORÇA CORTANTE

A redução da força cortante foi aplicada de acordo com a NBR 6118 (2014) para o caso de carregamentos distribuídos por meio da seguinte expressão:

$$F_{redução,distribuída} = 1 - \frac{\left(\frac{t_1}{2} + \frac{h}{2}\right)}{\frac{L_{ef}}{2}} \quad (36)$$

onde:

- t_1 é a largura do pilar dos extremos;
- h é a altura da viga;

- L_{ef} é o comprimento efetivo da viga, calculado de acordo com o item 14.6.2.4 da NBR 6118 (2014).

Já para carregamentos concentrados, o fator de redução da força cortante de cálculo se encontra na equação (37):

$$F_{redução,concentrada} = \frac{a}{2h} \quad (37)$$

onde:

- “a” é a distância da força concentrada para o apoio, melhor visualizada na figura 2.18;
- h é a altura da viga.

O diâmetro dos estribos foi fixado em 10 mm, com o número de ramos de dois, para o cálculo da área de aço, por serem valores usuais.

3.7. PRINCIPAIS EQUAÇÕES UTILIZADAS NO MODELO DE CÁLCULO I

Algumas equações já se encontram descritas nano capítulo 2 desta monografia. É o caso de V_{rd2} (eq. 23); V_{sw} (equações 25 e 26); V_c que, neste caso, é igual à V_{co} (eq. 27); e V_{sd} , sendo esta última a força cortante resistente de cálculo, ou seja, a força cortante característica multiplicada por um coeficiente de segurança.

Em relação ao cálculo da área de aço A_{sw} , a equação que foi utilizada na planilha de cálculo se encontra abaixo e é uma simplificação da equação (26), tomando a seguinte forma:

$$A_{sw} = \frac{V_{sw}}{0,9d_{útil}f_{ywd}} \quad (38)$$

Em relação ao cálculo da área de aço mínima $A_{sw, \text{mín}}$, a fórmula utilizada foi a equação (33) e esta formulação é usada tanto para o modelo de cálculo I quanto para o II.

3.8. PRINCIPAIS EQUAÇÕES UTILIZADAS NO MODELO DE CÁLCULO II

No modelo de cálculo II, a equação utilizada para o cálculo de V_{rd2} é a equação (29) descrita no item 2.2.2.

Para o cálculo de V_{sw} , foi utilizada a equação (22), descrita no item 2.2.1.

Em relação à V_c , que em vigas submetidas à flexão simples é igual à V_{c1} , têm-se a seguinte equação:

$$V_c = V_{c1} = \frac{V_{c0} (V_{rd2} - V_{sd})}{V_{rd2} - V_{c0}} \quad (39)$$

V_{sd} é calculado da mesma forma como descrito no item anterior para o modelo de cálculo I, assim como acontece com a área de aço mínima necessária, $A_{sw, \text{mín}}$ (eq. 33).

Quanto ao cálculo da área de aço A_{sw} , simplificando a equação (30) do item 2.2.2 e isolando-se A_{sw} , chega-se à equação (40), que foi utilizada no desenvolvimento da planilha.

$$A_{sw} = \frac{V_{sw}}{0,9d_{\text{útil}}f_{ywd}(\cot\theta + \cot\alpha)\text{sena}} \quad (40)$$

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

A seguir, serão apresentados os resultados dos cálculos obtidos a partir da utilização das planilhas desenvolvidas neste trabalho.

Os resultados gráficos serão apresentados a partir das relações L/h para todos os modelos de cálculo, visando dar maior generalidade.

4.1 VIGAS COM CARGAS DISTRIBUÍDAS

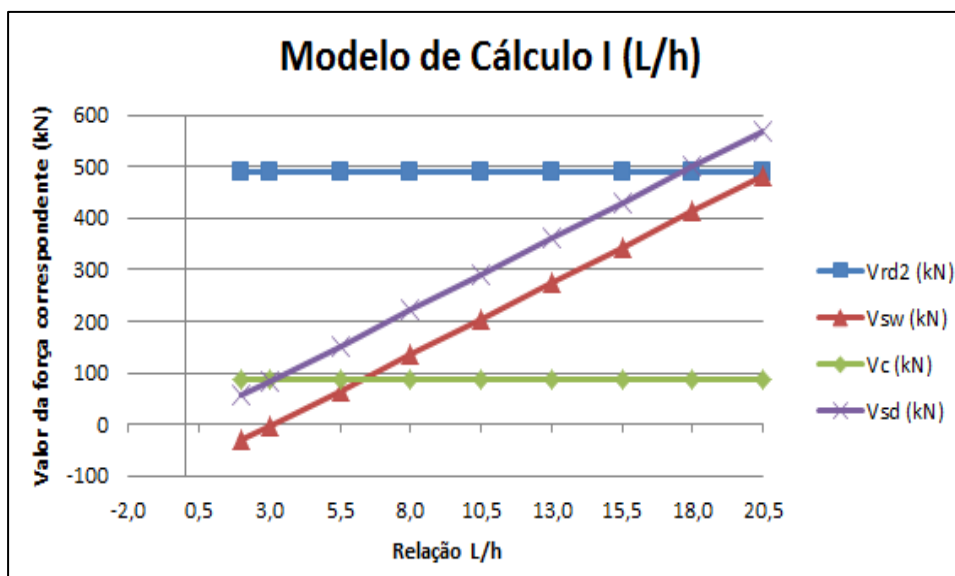
As vigas analisadas com carga distribuída foram submetidas a um carregamento que é a soma do peso próprio da viga, um carregamento distribuído permanente mais um carregamento variável. Como o comprimento da viga varia, estes carregamentos também variam conforme o vão efetivo.

Em princípio, a viga bi apoiada foi submetida aos esforços cortantes sem redução. Depois, foi aplicada a redução das forças cortantes próximo aos apoios, como preconiza a norma brasileira NBR 6118 (2014). Apresentam-se a seguir os resultados sem e com a aplicação da redução.

4.1.1. Modelo sem redução da força cortante

A Figura 4.1 a seguir representa o gráfico da variação de L/h nas abcissas e a intensidade de quatro forças nas ordenadas, calculadas conforme o modelo de cálculo I, sendo estas a força cortante resistente de cálculo relativa à ruína da biela comprimida de concreto, V_{rd2} ; a parcela da força cortante solicitante resistida pela armadura, V_{sw} ; a parcela da força cortante absorvida por mecanismos complementares ao da treliça, V_c ; e a força cortante solicitante de cálculo na seção, V_{sd} .

Figura 4.1 - Gráfico modelo de cálculo I (L/h).



Fonte: Autoria própria (2022).

Como na relação L/h do presente trabalho o valor da altura h da viga não muda, quanto maior esta relação, maior é o vão L da viga. Ou seja, no eixo das abcissas, o valor do vão L da viga aumenta da esquerda para a direita, assumindo valores conforme a Tabela 4.1.

Tabela 4.1 - Relação L/h e vão efetivo.

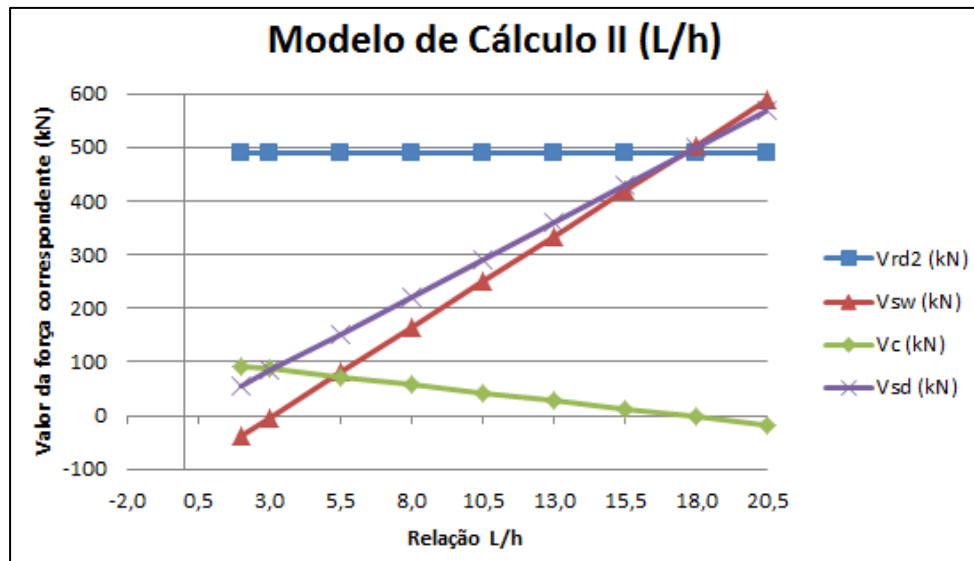
Vão efetivo (m)	Relação L/h
1,00	2,0
1,50	3,0
2,75	5,5
4,00	8,0
5,25	10,5
6,50	13,0
7,75	15,5
9,00	18,0
10,25	20,5

Fonte: Autoria própria (2022).

Nota-se que o valor de V_{sd} ultrapassou V_{rd2} para os dois maiores valores de L/h, iguais a 18,00 e 20,50, que correspondem respectivamente aos valores de vãos efetivos de 9,00 metros e 10,25 metros. Nestes dois casos, a viga não passou na verificação da biela comprimida.

A Figura 4.2 representa o gráfico para o modelo de cálculo II com as mesmas unidades da Figura 4.1.

Figura 4.2 – Gráfico modelo de cálculo II (L/h).



Fonte: Autoria própria (2022).

Neste caso, o valor de V_{rd2} também foi ultrapassado pela força cortante solicitante de cálculo V_{sd} a partir de L/h igual a 18,00 e vão efetivo de 9 metros. Nota-se ainda que a parcela V_c foi superior nos casos de vigas mais curtas, decrescendo conforme o aumento do vão efetivo e conforme o aumento da força cortante solicitante de cálculo, como prevê a norma NBR 6118 (2014) para o Modelo II, chegando a ficar negativo para os dois maiores vão efetivos de 9 metros e 10,25 metros.

O valor de V_{rd2} se mantém constante e é de igual valor nos dois modelos. Isso ocorre porque V_{rd2} depende apenas da seção, da inclinação das bielas comprimidas e do concreto, ambos iguais para os dois modelos, e não depende do valor do vão.

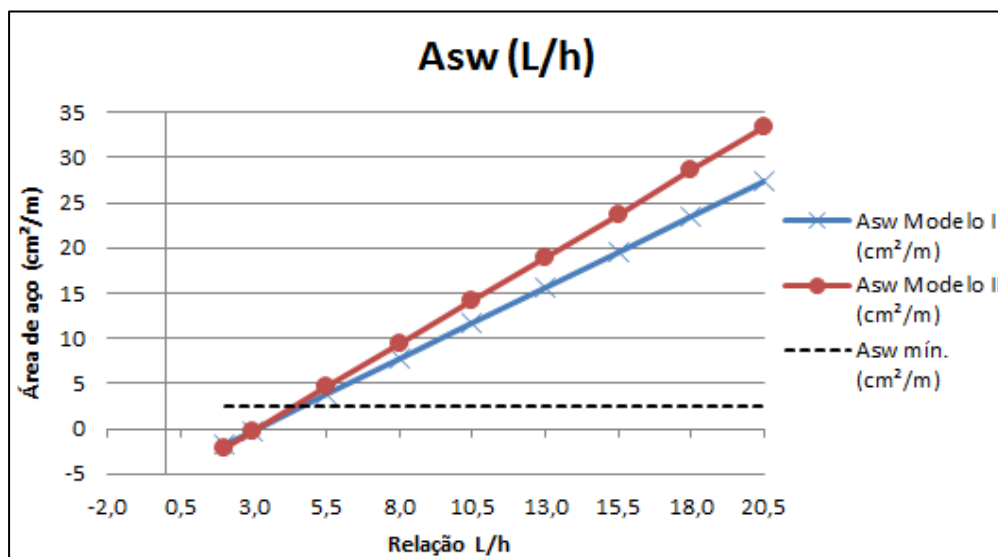
Em relação aos valores da força cortante solicitante resistida pela armadura, V_{sw} , e da força cortante solicitante de cálculo V_{sd} , no modelo I, sendo a parcela V_c referente à contribuição do concreto, conforme equação (25), o valor de V_{sw} é a diferença entre o valor de V_{sd} e V_c . Logo, graficamente, a distância entre as retas de V_{sd} e V_{sw} será sempre a mesma, como o próprio gráfico da Figura 4.1 demonstra.

Já no modelo II, como o valor da parcela da contribuição do concreto, V_c , decresce conforme o vão aumenta, o valor de V_{sw} começa menor que o de V_{sd} , igualando-o aproximadamente na relação L/h igual a 18. Ou seja, a taxa de crescimento do esforço cortante absorvido pelos estribos, V_{sw} , é maior que a taxa de crescimento da força cortante solicitante de cálculo, pois a inclinação da reta no gráfico é maior.

Outro fato que chama a atenção é o da força cortante absorvida pelos estribos V_{sw} com valores negativos nas duas menores relações de L/h igual a 2 e 3, vãos efetivos de 1 metro e 1,5 metros. Isso se dá porque, neste caso de vigas mais curtas, o valor da parcela da contribuição do concreto V_c já é maior que a força cortante solicitante de cálculo V_{sd} . Ou seja, neste caso a resistência do concreto já seria suficiente para resistir aos esforços cortantes, do ponto de vista teórico. Esta situação se inverte para as duas maiores vigas, com vãos efetivos de 9 metros e 10,25 metros, quando a parcela da força cortante absorvida pelo concreto, V_c , fica negativa porque a parcela da força cortante resistida pela armadura, V_{sw} , já é maior que a força cortante solicitante de cálculo V_{sd} .

A Figura 4.3 apresenta o gráfico comparativo do cálculo da área de aço A_{sw} necessária pelo modelo de cálculo I e II e, na linha tracejada, o valor de A_{sw} mínimo.

Figura 4.3 - Comparativo de A_{sw} pelo modelo de cálculo I e II.



Fonte: Autoria própria (2022).

Nas duas primeiras relações L/h , para vãos efetivos de 1 e 1,5 metros, a área de aço calculada foi menor que a área de aço mínima preconizada pela norma NBR 6118 (2014). Com isso, deve-se usar a área mínima. Ou seja, no trecho do gráfico onde as duas retas se encontram abaixo da linha tracejada, se usa, para projetos, o valor da área de aço mínima.

O valor do vão da viga aumenta da esquerda para a direita no eixo das abcissas. Analisando o gráfico, a área de aço, para os dois modelos, aumenta conforme aumenta o vão. E isso faz sentido, pois com o aumento do vão, aumenta-se a área da força distribuída e

aumentam-se as reações nos apoios da viga. Consequentemente se aumentam os esforços cortantes, precisando assim de mais armadura para combater tais esforços.

4.1.2. Modelo com redução da força cortante

Após a análise da viga submetida à força distribuída, suas reações e esforços cortantes, foi-se aplicada a redução destes esforços cortantes como preconiza a norma NBR 6118 (2014).

O fator de redução da força cortante de cálculo V_{sd} para carregamentos distribuídos, que foi calculado a partir da equação (36), para as diferentes medidas de comprimento da viga pode ser visto na Tabela 4.2.

Analisando esta tabela, se pode observar que conforme o vão efetivo aumenta, o fator de redução também aumenta, mas com uma taxa de variação cada vez menor. De um vão efetivo de 2,75 metros para um vão efetivo de 4 metros, a variação do fator de redução da força cortante é de 12%. Já de um vão efetivo de 7,75 metros para um vão efetivo de 9 metros, essa taxa de variação é de apenas 1,6%.

Tabela 4.2 - Variação do fator de redução.

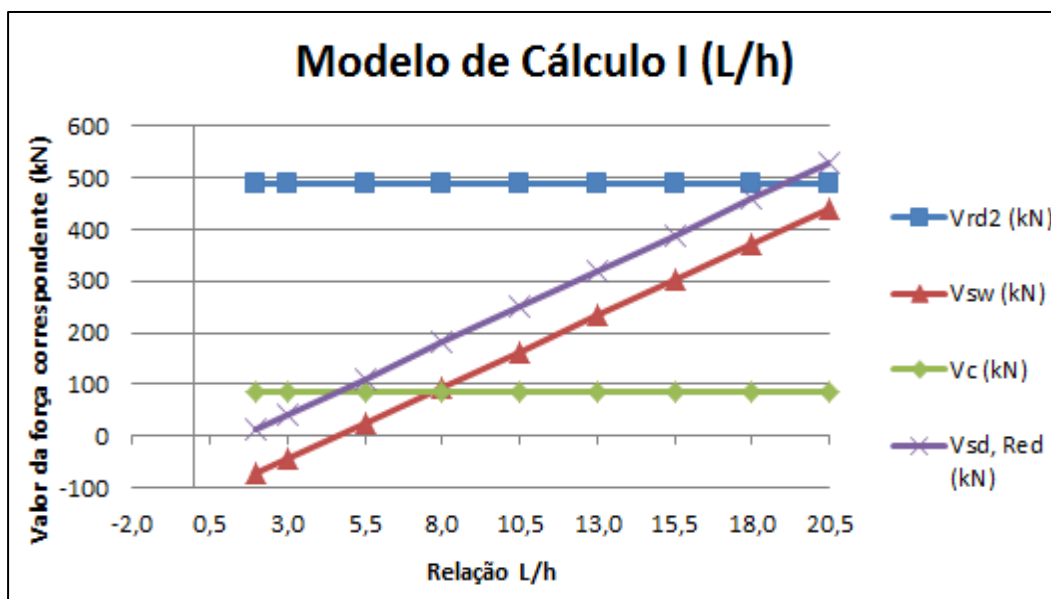
L efe.(m)	Fator de Redução	Variação (%)	Vsd (kN)	Vsd reduzido (kN)
1,00	0,250	-	55,6	13,9
1,50	0,500	100%	83,4	41,7
2,75	0,727	45%	152,9	111,2
4,00	0,813	12%	222,4	180,7
5,25	0,857	5,4%	291,9	250,2
6,50	0,885	3,3%	361,4	319,7
7,75	0,903	2,0%	430,9	389,2
9,00	0,917	1,6%	500,4	458,7
10,25	0,927	1,1%	569,9	528,2

Fonte: Autoria própria (2022).

A taxa de variação do fator de redução ser cada vez menor corrobora com o método de cálculo da norma NBR 6118 (2014). Isso porque à medida que o vão efetivo da viga aumenta, para cargas distribuídas, o gráfico da força cortante é cada vez mais horizontal em comparação com uma viga mais curta e de uma mesma altura h , fazendo assim com que a variação da força cortante do apoio da viga até a seção $d/2$, conforme Figura 2.17, seja cada vez menor, conforme o vão aumenta.

A Figura 4.4 mostra a variação da força cortante resistente de cálculo relativa à ruína da biela comprimida, V_{rd2} ; da parcela da força cortante resistida pela armadura, V_{sw} ; da parcela da força cortante absorvida por mecanismos complementares ao da treliça, V_c ; e da força cortante solicitante de cálculo V_{sd} reduzida, para o modelo de cálculo I.

Figura 4.4 - Gráfico modelo de cálculo I com redução da força cortante.



Fonte: Autoria própria (2022).

De um modo geral, o gráfico se comporta da mesma forma que o gráfico da Figura 4.1. A força cortante resistente de cálculo relativa à ruína da biela comprimida (V_{rd2}) e a parcela da contribuição do concreto (V_c) apresentam os mesmos resultados, pois estas forças não dependem da redução da força cortante solicitante de cálculo (V_{sd}), mas apenas da seção da viga e de fatores relacionados ao concreto utilizado.

Já a parcela da cortante solicitante resistida pela armadura, V_{sw} , após a redução da cortante, sofre uma diminuição em seus valores, com o valor máximo, que antes era de 483,5 kN, diminuindo para 441,8 kN, uma redução de aproximadamente 8,6 %. Isto acontece porque a parcela absorvida pelo concreto, V_c , para o Modelo I, é constante. Como a força solicitante de cálculo V_{sd} diminui, logo a parcela que deverá ser resistida pela armadura também diminui.

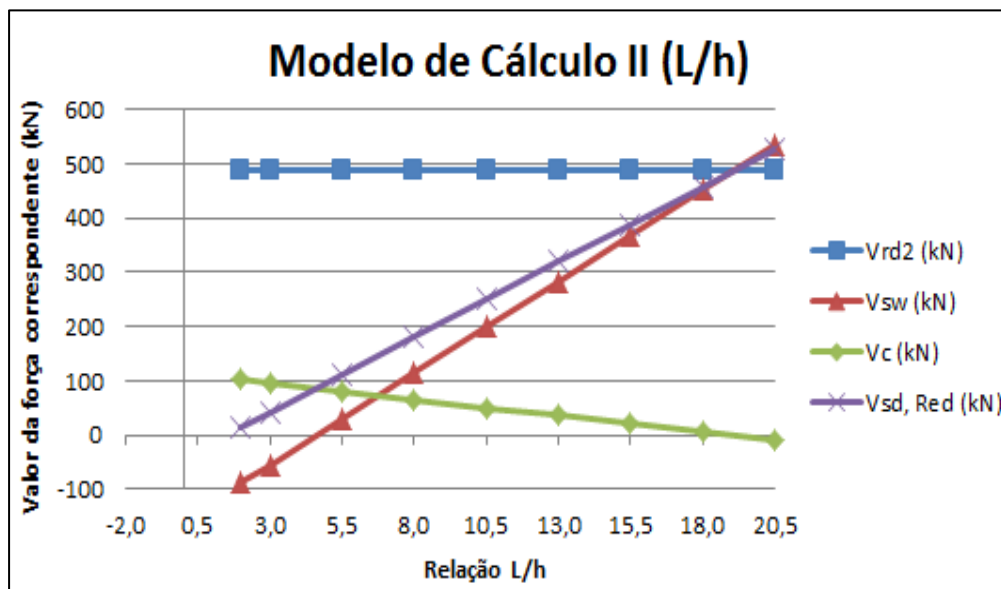
Na Figura 4.4 se pode observar ainda que para a última relação L/h igual a 20,50, para o maior vão efetivo de 10,25 metros, o valor da força cortante solicitante de cálculo (V_{sd}) é maior que o valor da força cortante resistente de cálculo relativa à ruína da biela comprimida

(V_{rd2}). Ou seja, neste caso a viga não passa pela verificação da compressão nas bielas. Mas na Figura 4.2, que representa os valores sem a redução da força cortante, além deste vão de 10,25 metros, o segundo maior vão efetivo, de 9 metros, relação L/h igual a 18, também não passa na verificação da compressão nas bielas. O que já não acontece na Figura 4.4, após a redução, onde a força cortante resistente de cálculo relativa à ruína da biela comprimida é maior que a força cortante solicitante de cálculo, justamente por esta força V_{sd} ter sido reduzida.

Ou seja, neste caso, para L/h igual a 18 e vão efetivo de 9 metros, a redução da força cortante solicitante de cálculo V_{sd} permitiu o dimensionamento desta viga.

Na Figura 4.5, é apresentado os valores para o modelo de cálculo II. De um modo geral, o comportamento do gráfico também se assemelha ao comportamento apresentado no gráfico sem redução, Figura 4.2, conforme o aumento do vão efetivo da viga. O valor da força cortante resistente de cálculo relativa à ruína da biela comprimida, V_{rd2} , continua sem mudança, porque a seção da viga e os parâmetros do concreto continuam os mesmos para toda a análise.

Figura 4.5 - Gráfico modelo de cálculo II com redução da força cortante.



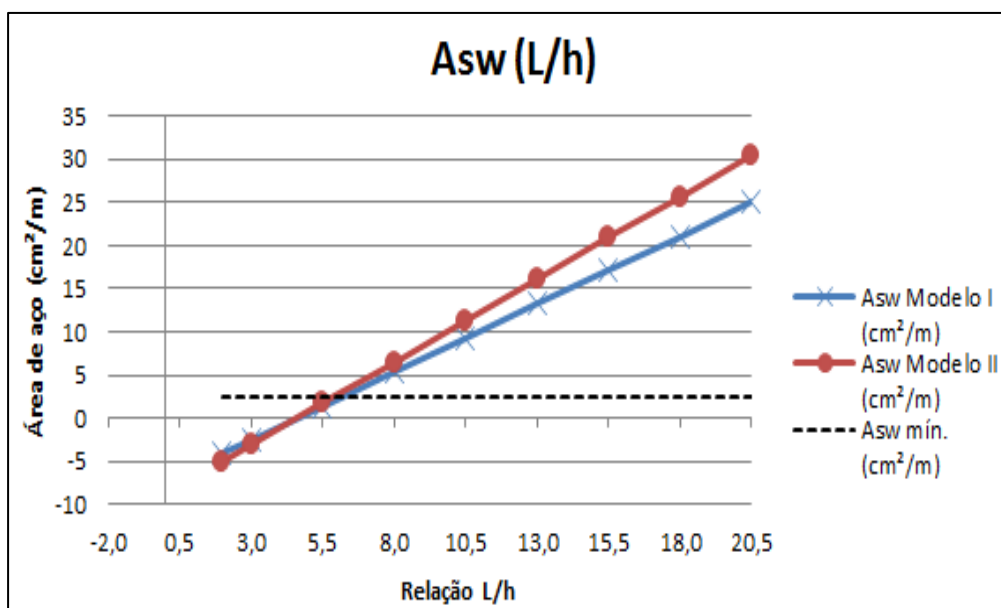
Fonte: Autoria própria (2022).

Se antes da redução os valores da parcela da contribuição do concreto V_c máximo e mínimo era de 93 kN e -17,6 kN respectivamente, depois de aplicada a redução da força cortante solicitante de cálculo, estes valores passam a ser de 102 kN e -8,6 kN. Percebe-se

que, apesar do aumento dos valores após a redução, a diferença entre os valores máximos e mínimos continuam sendo as mesmas, de 110,6 kN, e a parcela V_c de contribuição do concreto sofre redução conforme a força solicitante de cálculo aumenta, como preconiza a norma NBR 6118 (2014).

Em relação à A_{sw} após a redução, Figura 4.6, a área de aço necessária continua crescendo conforme o vão efetivo da viga aumenta.

Figura 4.6 - Comparativo de A_{sw} pelo modelo de cálculo I e II com redução da força cortante.



Fonte: Autoria própria (2022).

A área de aço necessária calculada a partir do modelo de cálculo II começa com um valor 18% menor do que a área necessária calculada a partir do modelo I, mas termina com um valor maior. Ou seja, a reta de “ A_{sw} Modelo II” apresenta uma maior inclinação em relação à “ A_{sw} Modelo I” no gráfico. Sua taxa de crescimento é maior.

Estudo conduzido por Silva Filho (2019) mostrou que o modelo de cálculo II resulta em áreas de aço necessárias maiores que o modelo de cálculo I. Como se pode observar na Figura 4.6, das 9 relações L/h analisadas, 7 apresentaram uma área de aço necessária maior no modelo de cálculo II.

O gráfico também apresenta, para os menores vãos efetivos de 1 metro, 1,5 metros e 2,75 metros, valores de área de aço necessária, tanto no modelo I quanto no II, abaixo da área de aço mínima prevista em norma, calculada a partir da equação (33) e representada no gráfico pela linha tracejada.

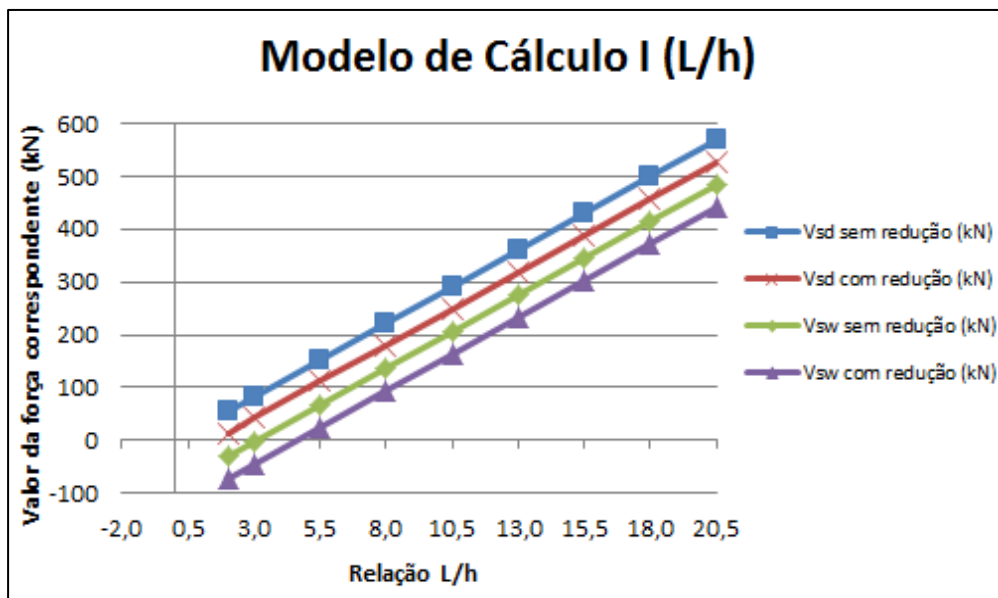
A área de aço mínima necessária permanece constante porque não depende do vão da viga, mas da resistência característica ao escoamento do aço da armadura transversal (f_{ywk}), da resistência média à tração do concreto ($f_{ct,m}$) e da largura da seção transversal, e todos permanecem iguais para todos os valores de L/h .

4.1.3. Comparativo modelo sem redução x modelo com redução

Agora serão apresentados quatro gráficos comparando os valores com e sem redução da força cortante, para ambos os modelos de cálculo.

No gráfico da Figura 4.7, a força cortante solicitante de cálculo, V_{sd} , e a parcela da força cortante resistida pela armadura, V_{sw} , foram calculados de acordo com o modelo de cálculo I e se pode observar que os dois valores aumentam conforme se aumenta a medida do vão efetivo da viga.

Figura 4.7 - Comparativo V_{sd} x V_{sw} com e sem redução pelo modelo de cálculo I.



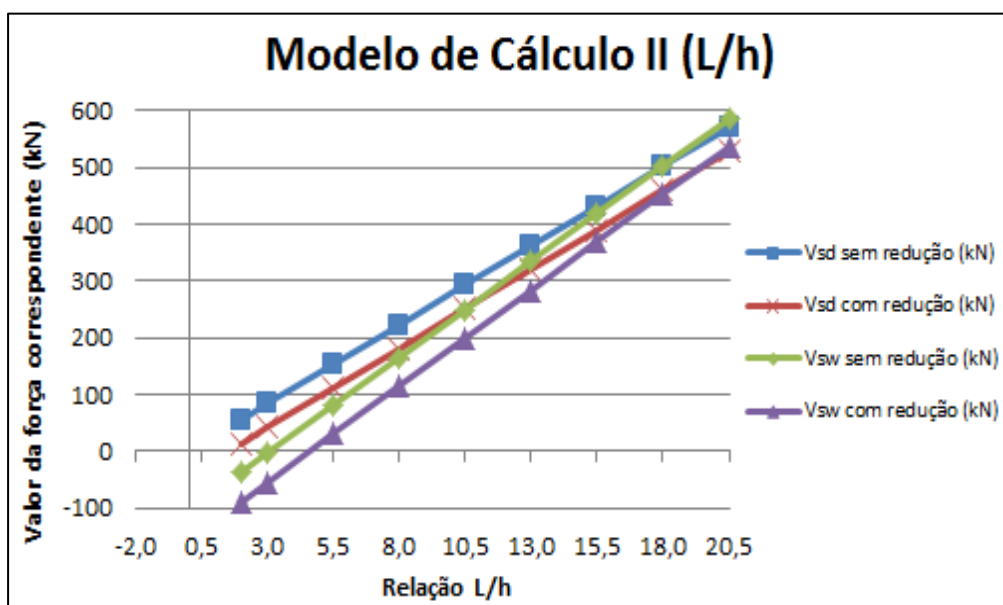
Fonte: Autoria própria (2022).

A intensidade da força cortante solicitante de cálculo, que é representada pelas duas retas superiores do gráfico, é maior que a parcela da força cortante solicitante resistida pela armadura, com ou sem redução da força cortante. As duas retas da força V_{sw} apresentam valores negativos para os dois menores vãos efetivos.

Pode-se notar também que as quatro retas são basicamente paralelas. Isso porque, para o modelo I, o valor da parcela de contribuição do concreto (V_c) é constante. Logo, de acordo com a equação (25), a força cortante solicitante de cálculo (V_{sd}) será igual à parcela de contribuição do concreto (V_c) somada à parcela da força cortante solicitante resistida pela armadura (V_{sw}).

A Figura 4.8 a seguir mostra um gráfico representando os mesmos parâmetros da Figura 4.7, mas para o modelo de cálculo II.

Figura 4.8 - Comparativo V_{sd} x V_{sw} com e sem redução pelo modelo de cálculo II.



Fonte: Autoria própria (2022).

Percebe-se que as retas de V_{sd} e V_{sw} , com e sem redução aplicada, não apresentam a mesma inclinação. Isso porque, diferentemente do modelo I, no modelo II a parcela V_c não é constante por conta da força cortante solicitante de cálculo V_{sd} .

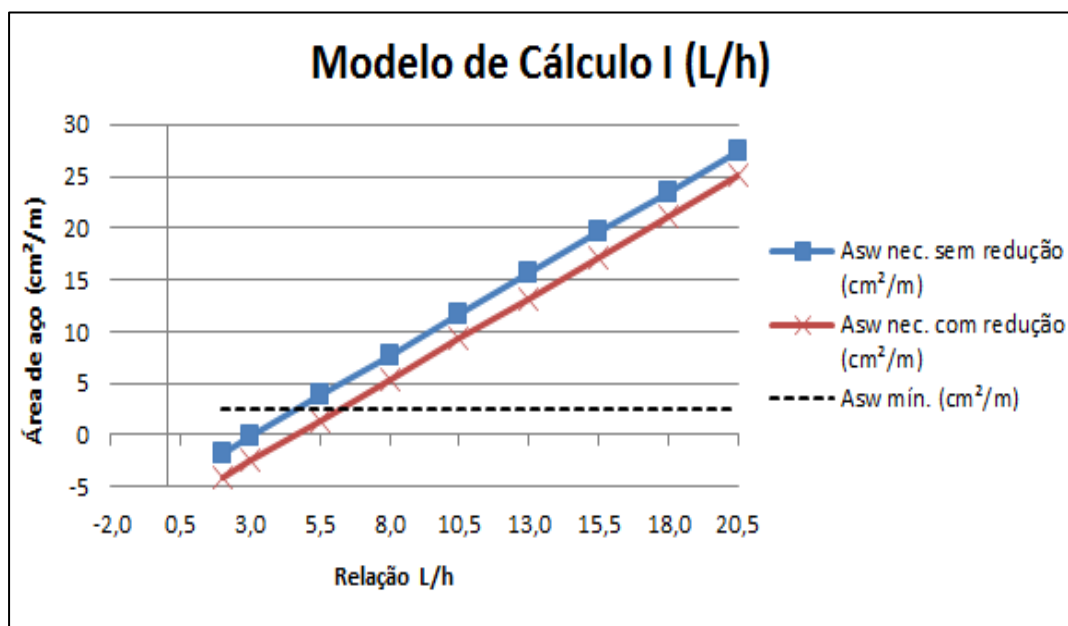
Nos dois casos, com e sem redução, para vigas mais curtas, V_{sd} é maior que V_{sw} . Mas, conforme o vão efetivo vai crescendo, esses valores se invertem e a parcela da força cortante resistida pela armadura passa a ser maior que V_{sd} .

Nas Figuras 4.9 e 4.10 a seguir, são apresentados os valores da área de aço necessária, com e sem redução da força cortante, calculadas a partir dos dois modelos de cálculo.

De um modo geral, o modelo de cálculo I resulta em valores de área de aço calculada menores que os valores do modelo II. E, como já esperado, a área de aço necessária para os dois modelos aumenta conforme o aumento do vão efetivo.

Na Figura 4.9, para valores máximos de A_{sw} sem redução da força cortante, têm-se 27,5 cm^2/m . Para A_{sw} com redução da força cortante, esta área necessária cai para 25,10 cm^2/m , uma diminuição de aproximadamente 9 %, resultando assim em um decréscimo de 2,4 cm^2/m de área de aço.

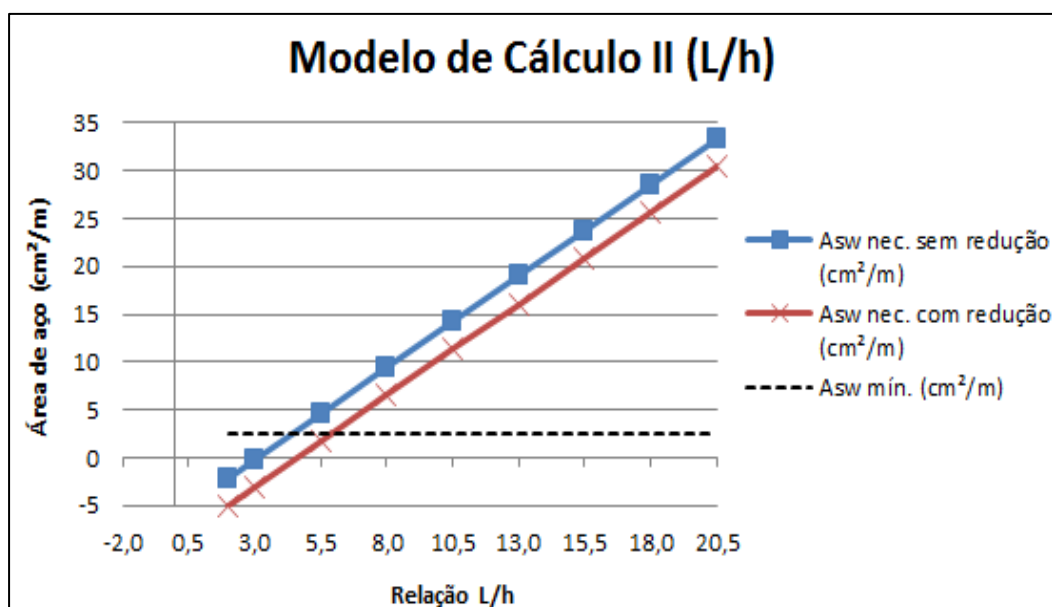
Figura 4.9 - Comparativo A_{sw} com e sem redução pelo modelo de cálculo I.



Fonte: Autoria própria (2022).

Na Figura 4.10 a seguir, para valores máximos de A_{sw} sem redução e com redução da força cortante solicitante de cálculo, têm-se respectivamente 33,36 cm^2/m e 30,48 cm^2/m , uma diminuição de aproximadamente 9 %, resultando em um decréscimo de 2,88 cm^2/m .

Figura 4.10 - Comparativo A_{sw} com e sem redução pelo modelo de cálculo II.



Fonte: Autoria própria (2022).

Á área de aço A_{sw} necessária com e sem redução aplicada à força cortante, para ambos os modelos de cálculo e para vãos pequenos e grandes, sofre um decréscimo constante em seu valor, evidenciado pelo paralelismo entre as duas retas das Figuras 4.9 e 4.10.

É importante destacar ainda que, para o modelo II, com ângulo θ das bielas comprimidas de concreto adotado de 45° , os valores calculados da área de aço necessária serão maiores.

4.2. VIGAS COM CARGAS CONCENTRADAS

As vigas com carregamento concentrado foram submetidas a duas forças concentradas de intensidade 100 kN simultaneamente, com a menor distância dos apoios igual a h , onde h é a altura da viga. Como a altura da viga não muda, a menor distância da força concentrada para os apoios da viga também não mudou.

Primeiramente aplicaram-se as forças e se analisou a viga sem a redução das forças cortantes. Em seguida, analisou-se com a redução da força cortante nos apoios, que é o local onde a norma NBR 6118 (2014) diz que se deve aplicar a redução e onde é encontrada a maior intensidade de forças cortantes em vigas bi apoiadas com este tipo de carregamento.

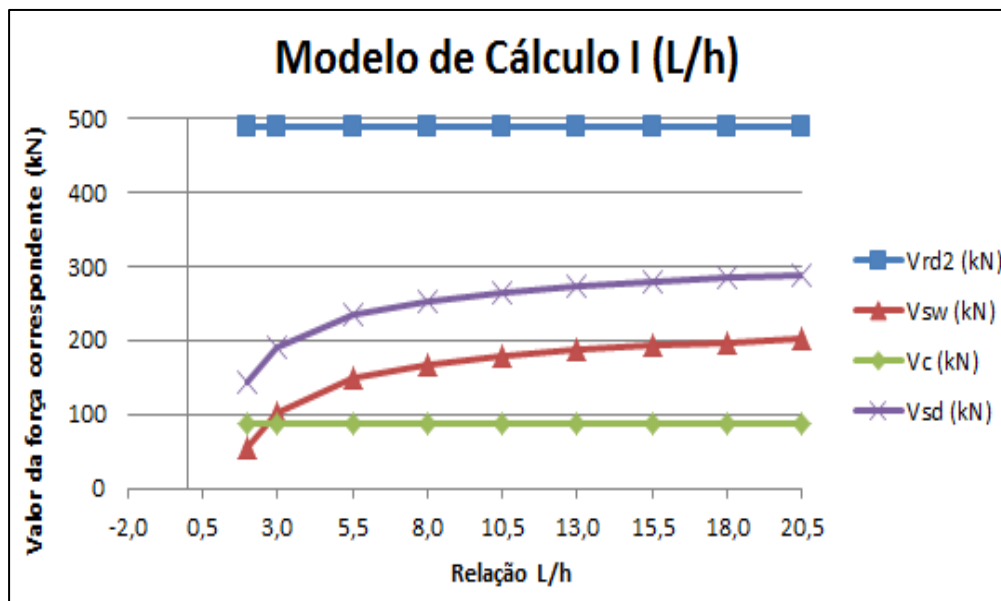
4.2.1. Modelo sem redução da força cortante

A primeira análise a ser feita é com a viga submetida simultaneamente às duas forças concentradas, sem a aplicação da redução da força cortante solicitante de cálculo V_{sd} . A Figura 4.11 apresenta o gráfico com a relação L/h no eixo das abcissas e a intensidade de quatro forças no eixo das ordenadas.

Pode-se perceber que a força cortante resistente de cálculo relativa à ruína da biela comprimida (V_{rd2}) e a parcela de contribuição do concreto (V_c), ambas em kN, permanecem constantes conforme o vão efetivo aumenta.

Já a parcela da força cortante solicitante resistida pela armadura (V_{sw}) e a força cortante solicitante de cálculo (V_{sd}) aumentam conforme aumenta o vão efetivo. Esse aumento é mais acentuado em vigas mais curtas, como se pode observar na Figura 4.11 a seguir.

Figura 4.11 - Gráfico modelo de cálculo I (L/h).

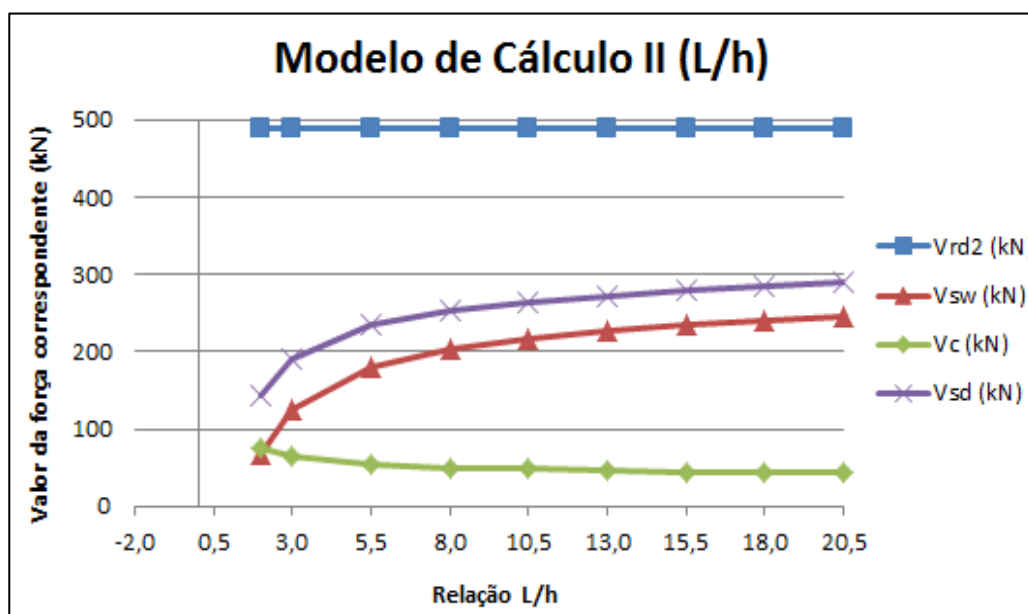


Fonte: Autoria própria (2022).

No início, as duas forças V_{sw} e V_{sd} crescem de maneira mais rápida. Para vãos maiores, percebe-se que esse crescimento tende a uma estabilidade. Obedecendo à equação (25), pode-se presumir que as duas forças crescem de maneira igual, já que a parcela de contribuição do concreto (V_c), que é a parcela da cortante absorvida por mecanismos complementares ao da treliça, é constante neste modelo de cálculo.

Já para o modelo de cálculo II, Figura 4.12, V_{rd2} permanece constante, mas V_c tende a diminuir para vigas mais longas e conforme a força cortante solicitante aumenta.

Figura 4.12 - Gráfico modelo de cálculo II (L/h).



Fonte: Autoria própria (2022).

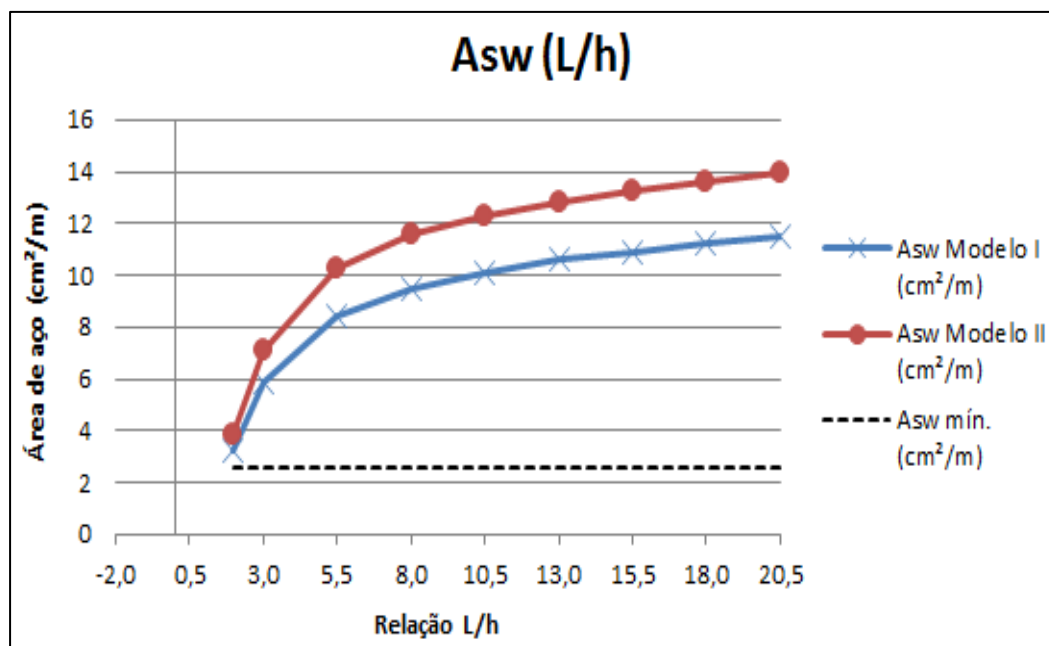
Para a viga mais curta, primeira relação L/h, igual a 2,00 e vão efetivo de 1 metro, os valores de V_c e V_{sw} são os mais próximos, sendo respectivamente de 74,4 kN e 67,8 kN. Nota-se que apenas nesta viga mais curta a parcela de contribuição do concreto é maior que a parcela resistida pela armadura.

Para a área de aço necessária calculada a partir dos modelos I e II, a Figura 4.13 a seguir apresenta um gráfico comparativo que traz os valores de A_{sw} e a área necessária mínima prevista em norma, calculada a partir da equação (33).

De um modo geral, como já visto nos gráficos para cargas distribuídas, a área de aço necessária aumenta com o aumento do comprimento da viga, sendo que o modelo de cálculo II sempre dá resultados maiores em relação ao modelo de cálculo I.

Para vãos efetivos menores, estes valores são próximos. Para um vão efetivo de 1 metro, por exemplo, relação L/h igual a 2, os valores de A_{sw} pelo modelo I e II são, respectivamente, de 3,20 cm²/m e 3,85 cm²/m, diferindo pouco mais de 16%. Conforme o aumento do comprimento da viga, os valores vão se distanciando, chegando a 11,50 cm²/m para o modelo I e 13,96 cm²/m para o modelo II, diferindo pouco mais de 17,5%, para o maior vão, relação L/h igual a 20,50 e vão efetivo igual a 10,25 metros.

Figura 4.13 - Comparativo de A_{sw} pelo modelo de cálculo I e II.



Fonte: Autoria própria (2022).

Como se pode observar no gráfico também, nenhum dos valores de A_{sw} , para os dois modelos, dá menor que o A_{sw} mínimo, linha tracejada no gráfico, diferentemente do que acontece no carregamento distribuído discutido anteriormente.

4.2.2. Modelo com redução da força cortante

Após a análise dos esforços internos da viga e do cálculo das áreas de aço necessárias para forças concentradas, sem a aplicação da redução nos esforços cortantes solicitantes de cálculo, este fator de redução, preconizado na norma NBR 6118 (2014) e exposto no item 2.2.3. (b) para forças concentradas, e cujo cálculo se encontra no item 3.6, equação (37), foi aplicado na força cortante de cálculo V_{sd} e se encontra de forma resumida na Tabela 4.3, para diferentes valores de vão efetivos.

Tabela 4.3 - Valores de V_{sd} com e sem redução.

Lefe. (m)	Fator de Redução	Vsd (kN)	Vsd reduzido (kN)
1,00	0,500	142,2	71,1
1,50	0,500	189,9	95,0
2,75	0,500	235,1	117,6
4,00	0,500	253,8	126,9
5,25	0,500	264,8	132,4
6,50	0,500	272,7	136,4
7,75	0,500	278,9	139,5
9,00	0,500	284,1	142,1
10,25	0,500	288,8	144,4

Fonte: Autoria própria (2022).

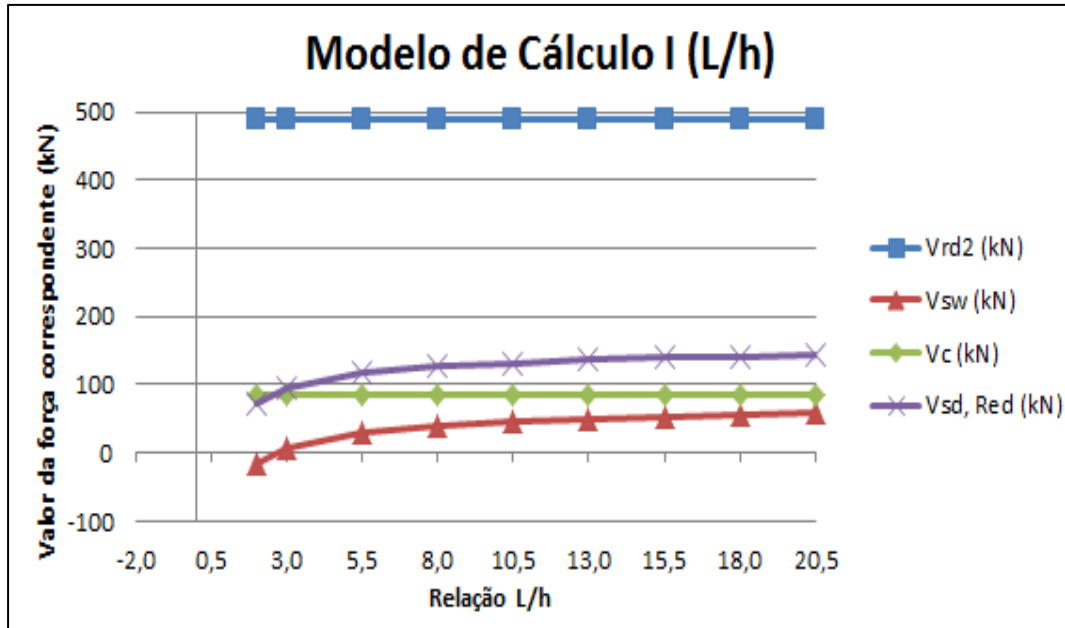
Conforme se pode ver, o fator de redução é o mesmo para todos os comprimentos efetivos. Isso acontece porque, conforme equação (37), o fator de redução é calculado com uma divisão de $a/2h$, onde “a” é a distância da força concentrada para os apoios e “h” é a altura da viga.

Foi adotada essa distância “a” como sendo sempre o valor da altura da viga. Logo, a equação (37) sempre dará $\frac{1}{2}$, ou 0,5. Por esse motivo, o fator de redução sempre será 0,5, ou seja, a força cortante solicitante de cálculo será reduzida sempre pela metade.

Dito isto, no gráfico da Figura 4.14, que apresenta os valores após a redução da força cortante ser aplicada, para o modelo de cálculo I, pode-se perceber valores pequenos para V_{sd} reduzido, V_c e V_{sw} em relação ao valor de V_{rd2} . O que é esperado, visto que a força cortante de cálculo foi reduzida em 50%.

Nota-se também que a parcela de contribuição do concreto, V_c , e a força cortante resistente de cálculo relativa à ruína da biela comprimida, V_{rd2} , permanecem constantes com o aumento do vão no modelo I e os valores da parcela resistida pela armadura, V_{sw} , e a força cortante solicitante de cálculo reduzida, $V_{sd, Red}$, crescem com o aumento do vão efetivo da viga, mas a diferença entre elas permanece igual.

Figura 4.14 - Gráfico modelo de cálculo I com redução da força cortante.



Fonte: Autoria própria (2022).

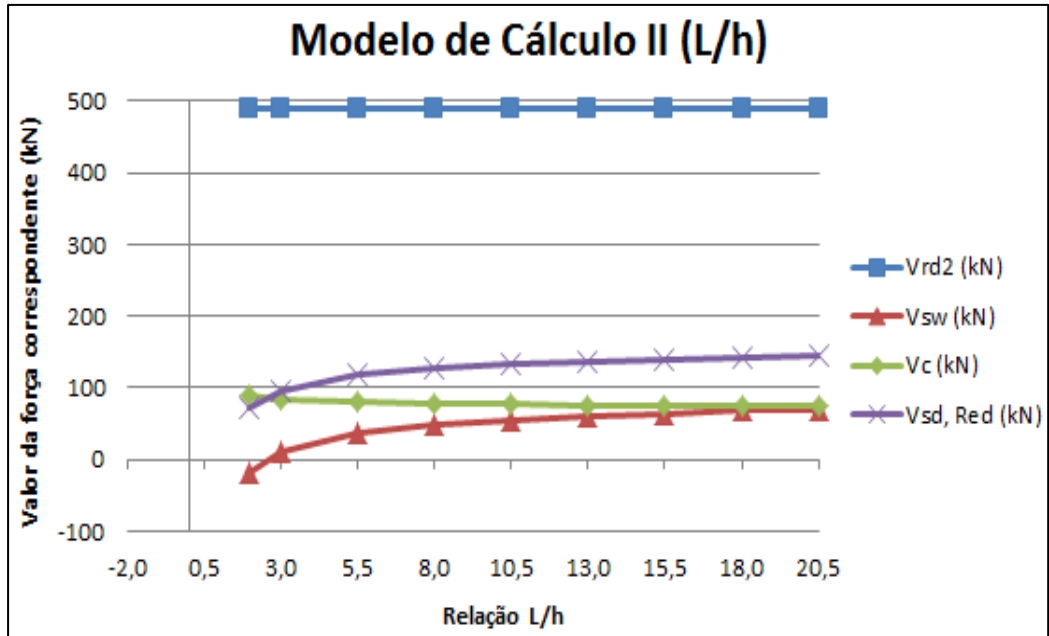
A parcela da força cortante solicitante resistida pela armadura apresenta um valor negativo para o menor vão, relação L/h igual a 2,0. Neste caso, apenas a parcela da força cortante absorvida por mecanismos complementares ao da treliça (V_c) já resiste aos esforços cortantes solicitantes de cálculo.

A Figura 4.15 a seguir apresenta o gráfico para o modelo de cálculo II das mesmas forças vistas na Figura 4.14.

O comportamento dos dois gráficos é semelhante, conforme o aumento do vão efetivo. Mas a parcela da contribuição do concreto, V_c , não é constante e diminui conforme o vão efetivo e o esforço solicitante de cálculo aumentam, chegando próximo ao valor de V_{sw} para o maior vão efetivo, relação L/h igual a 20,5, com valores de V_c e V_{sw} iguais a 73,9 kN e 70,5 kN, respectivamente.

Assim como aconteceu no modelo de cálculo II sem redução da força cortante, Figura 4.12, as curvas da parcela da força cortante solicitante resistida pela armadura (V_{sw}), a contribuição do concreto (V_c) e a força cortante solicitante de cálculo reduzida ($V_{sd, Red}$) na Figura 4.15 tendem a ficar constantes para vãos efetivos maiores.

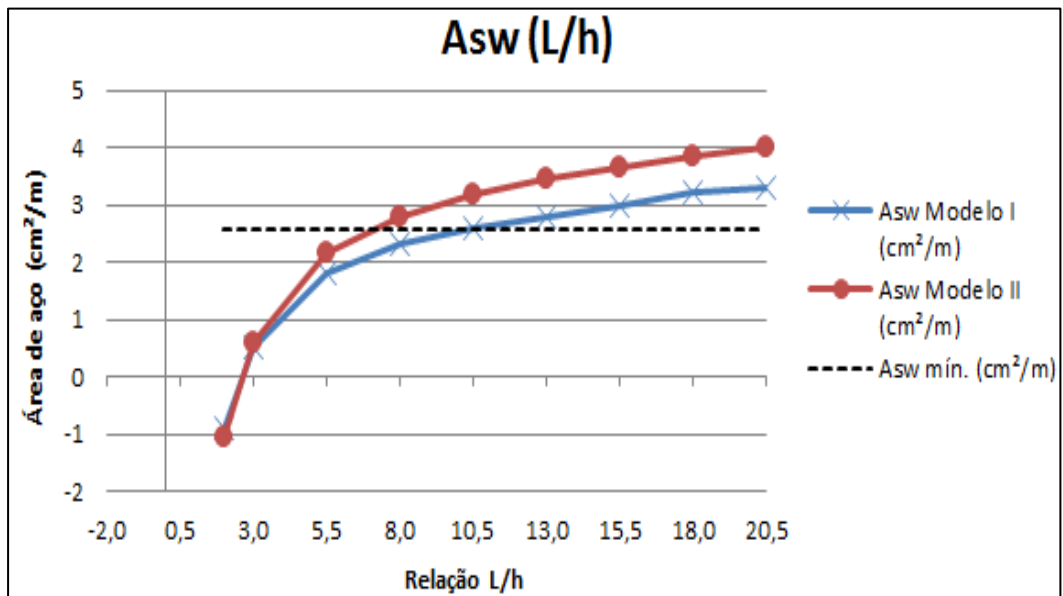
Figura 4.15 - Gráfico modelo de cálculo II com redução da força cortante.



Fonte: Autoria própria (2022).

Em relação às áreas de aço necessárias, a Figura 4.16 apresenta um gráfico comparando os dois modelos de cálculo e, na linha tracejada, se encontra o valor da área de aço mínima que corresponde a 2,56 cm²/m.

Figura 4.16 - Comparativo de A_{sw} pelo modelo de cálculo I e II com redução da força cortante.



Fonte: Autoria própria (2022).

Para vãos efetivos menores, iguais a 1 metro, 1,5 metros, 2,75 metros e 4 metros, o valor da área de aço necessária ficou abaixo da área de aço mínima no modelo I e, em relação ao modelo II, os três menores vão efetivos ficaram abaixo da área de aço mínima.

No geral, as áreas de aço necessárias aumentam com o aumento do vão da viga, como é esperado. E, em comparação com o gráfico da Figura 4.13, que apresenta os valores de A_{sw} sem a redução aplicada, os valores depois da redução são menores, visto que a força cortante solicitante de cálculo foi reduzida pela metade e menos aço será necessário para resistir a uma força menor.

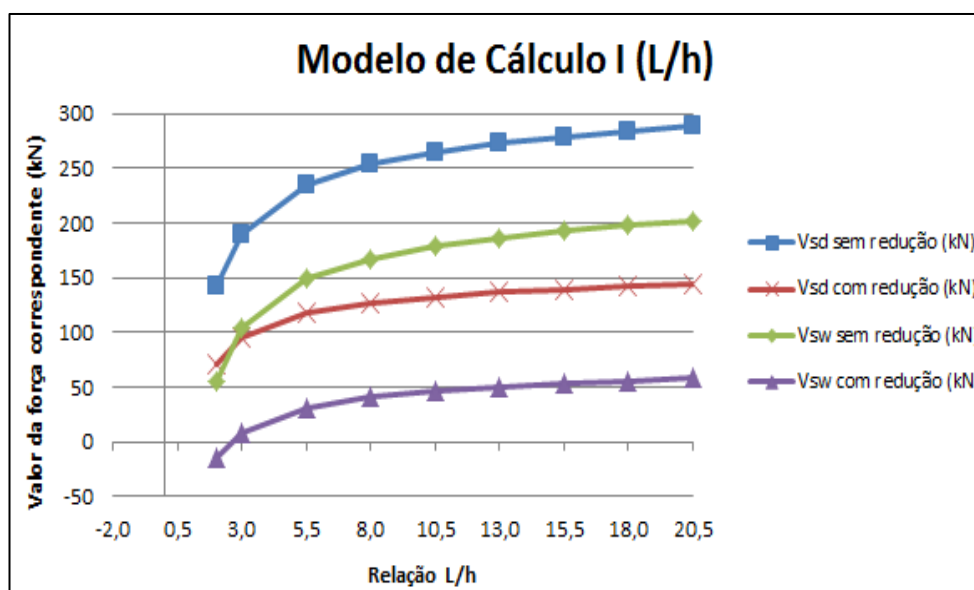
4.2.3. Comparativo modelo sem redução x modelo com redução

Agora será apresentado um comparativo entre alguns parâmetros com e sem a redução da força cortante solicitante de cálculo aplicada.

As Figuras 4.17 e 4.18 a seguir apresentam os valores da força cortante solicitante de cálculo (V_{sd}) e da parcela resistida pela armadura transversal (V_{sw}), com e sem redução da cortante, para os modelos de cálculo I e II respectivamente.

O comportamento de ambos os gráficos é semelhante. Percebe-se que, conforme o comprimento da viga aumenta, os valores de V_{sd} e V_{sw} aumentam. Para vigas mais curtas, esses valores aumentam em uma taxa maior. Mas, para vigas mais longas, apesar de ainda apresentarem aumento, os valores tendem a variar menos.

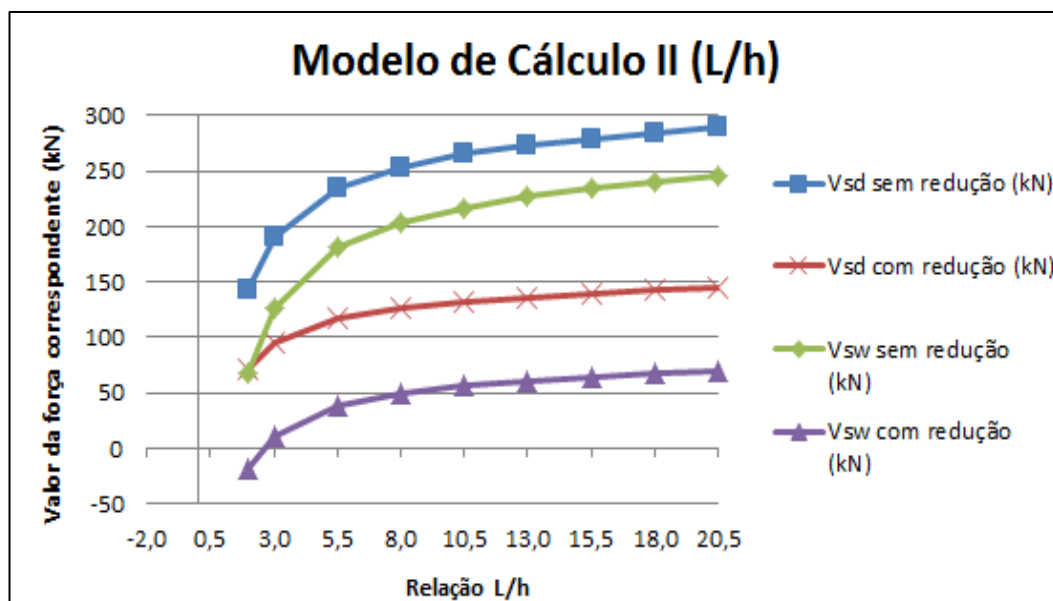
Figura 4.17 - Comparativo V_{sd} x V_{sw} com e sem redução pelo modelo de cálculo I.



Fonte: Autoria própria (2022).

Nos dois modelos de cálculo, com a redução aplicada à força cortante solicitante de cálculo, a parcela da cortante resistida pela armadura V_{sw} apresenta um valor negativo para a viga de menor comprimento efetivo igual a 1 metro. E todos os valores crescem com o aumento do comprimento da viga.

Figura 4.18 - Comparativo V_{sd} x V_{sw} com e sem redução pelo modelo de cálculo II.



Fonte: Autoria própria (2022).

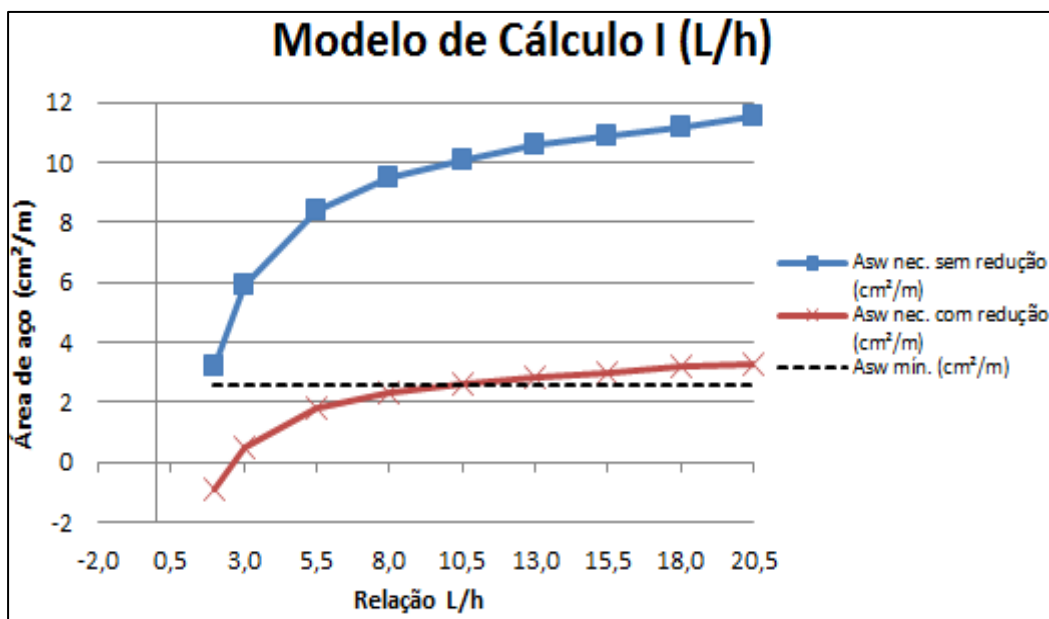
Tanto no modelo I, Figura 4.17, quanto no modelo II, Figura 4.18, pode-se observar também que os valores de V_{sw} sem redução e V_{sd} com redução são semelhantes para a viga de menor comprimento, sendo esses valores de 71,1 kN e 67,8 kN para V_{sd} com redução e V_{sw} sem redução, respectivamente, no modelo II.

Para a área de aço necessária para forças concentradas, que é o foco de análise desta seção, as Figuras 4.19 e 4.20 apresentam o cálculo de A_{sw} , com e sem a redução da cortante aplicada, para os modelos de cálculo I e II.

Os gráficos apresentam comportamentos semelhantes, sendo a área de aço necessária calculada pelo modelo II sempre maior que a calculada pelo modelo I, como também mostrou o trabalho de Silva Filho (2019).

Como a força cortante solicitante de cálculo foi reduzida pela metade, é de se esperar também que a variação de A_{sw} , antes e depois da aplicação da redução da cortante, apresente uma variação maior que a apresentada para a força distribuída, porque o fator de redução aplicado aqui é maior, por motivos já discutidos na seção 4.2.2.

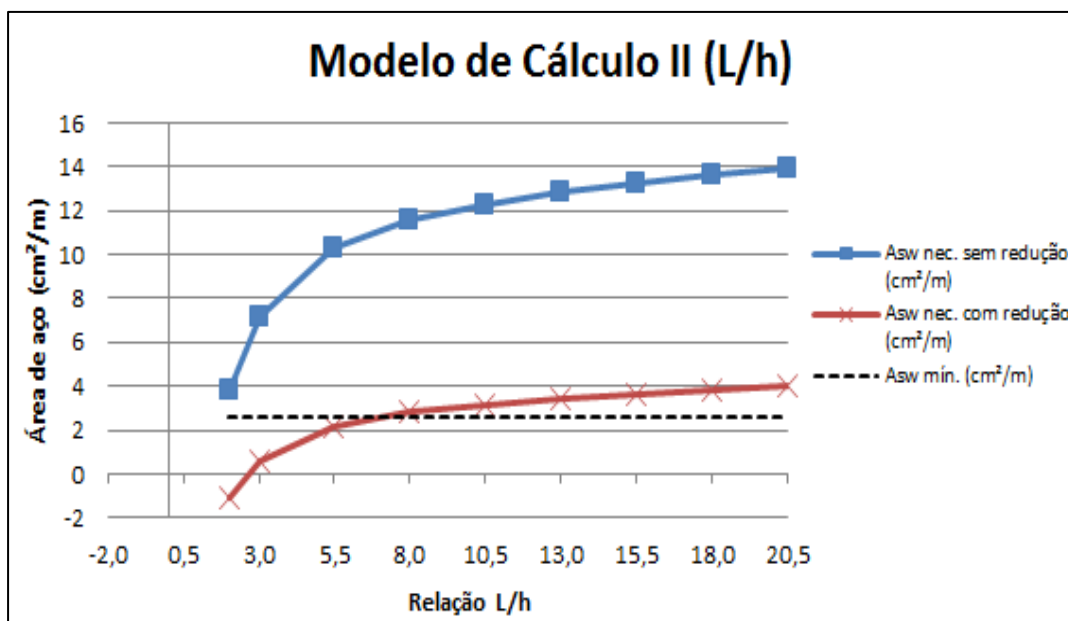
Figura 4.19 - Comparativo A_{sw} com e sem redução pelo modelo de cálculo I.



Fonte: Autoria própria (2022).

Em relação aos maiores valores de A_{sw} pelo modelo I, para o maior vão efetivo de 10,25 metros, resultou em 11,50 cm²/m sem a redução da cortante aplicada e 3,30 cm²/m com a redução da força cortante aplicada. Uma diminuição de aproximadamente 70% na área de aço necessária.

Figura 4.20 - Comparativo A_{sw} com e sem redução pelo modelo de cálculo II.



Fonte: Autoria própria (2022).

Já para o modelo II, como se pode observar na Figura 4.20 acima, para o maior vão efetivo, foi calculada uma área de aço de 13,96 cm²/m, sem a redução da força cortante solicitante de cálculo aplicada, e 4 cm²/m com a redução da força cortante. Também uma diminuição de aproximadamente 70%.

Percebe-se que, apesar do modelo II resultar em valores de área de aço necessária maiores que o modelo I, a variação da diminuição da área de aço antes e depois da redução da força cortante solicitante de cálculo é igual para os dois modelos de cálculo, de aproximadamente 70%.

Outro fato que chama atenção no gráfico é que, em ambos os modelos de cálculo, as áreas de aço necessárias da viga de menor vão efetivo de 1 metro, antes de aplicada a redução, e das duas maiores, com vãos efetivos de 9 e 10,25 metros, após a redução da força cortante, se assemelham.

Por exemplo, para o modelo I a área de aço necessária para o vão efetivo de 1 metro é 3,20cm²/m. E para o vão efetivo de 10,25 metros, após a redução de V_{sd} , a área de aço necessária é de 3,30cm²/m. As duas áreas de aço são semelhantes.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O principal objetivo desta monografia foi estudar as reduções de forças cortantes em estruturas de vigas, reduções estas que são previstas em norma brasileira, e das implicações destas reduções para projetos estruturais. A revisão bibliográfica demonstra haver diferentes maneiras de simular o comportamento mecânico das vigas em relação ao esforço cortante. Cada modelo considera hipóteses que resultam em formulações diferentes, mas que podem conduzir a resultados satisfatórios dependendo da aplicação.

Trabalhos experimentais demonstram que o Modelo da Treliça de Morsh, utilizado como base dos modelos de cálculo I e II adotados pela ABNT NBR 6118 (2014), resulta em valores experimentais diferentes em comparação aos valores calculados de tensão nas armaduras transversais. A biela comprimida inclinada, por exemplo, pode absorver uma parte da força cortante e a força cortante reduzida pode chegar à metade da força cortante total. Surgem também na viga tensões de tração próximo aos apoios, a uma distância de aproximadamente duas vezes a altura da viga, como também mostrou o estudo produzido por Fusco (2008). As diferenças entre valores experimentais e calculados pela teoria podem explicar a razão pela qual a norma permite que sejam feitas as reduções na força cortante solicitante de cálculo.

Os resultados apresentados e discutidos no capítulo 4 desta monografia permitiram algumas conclusões sobre a aplicação das reduções de força cortante no dimensionamento de estribos de vigas de concreto armado.

A norma brasileira preconiza que a redução da força cortante pode ser feita próxima aos apoios porque é justamente neste trecho que se encontram os maiores valores de esforços cortantes ao longo de uma viga bi apoiada, como o caso considerado para estudo neste trabalho. Os modelos simplificados de barras reticuladas, no entanto, consideram os apoios da viga como pontos, sendo que na estrutura real os apoios possuem dimensões e rigidezes próprias.

Neste trabalho, variou-se a relação vão-altura (L/h) da viga, alterando-se os valores do comprimento L do vão e fixando-se a altura h . Com as diferentes relações entre o vão e a altura da seção observou-se que, para vigas submetidas a forças concentradas, a redução dos esforços cortantes levou a uma maior variação no cálculo da área de aço necessária A_{sw} , em comparação com vigas submetidas a carregamentos distribuídos, mantidas as demais condições do estudo.

Em geral, quanto maior o vão da viga, maiores são os valores da área de aço necessária A_{sw} , da força cortante solicitante de cálculo V_{sd} e de V_{sw} , o que era esperado.

O modelo de cálculo II conduz a resultados superiores da área de aço A_{sw} quando comparado ao modelo de cálculo I, mesmo quando o ângulo da biela comprimida, que pode ser alterado no modelo II, é adotado igual nos dois modelos, como foi o caso do estudo em questão.

Os parâmetros estudados, como por exemplo, a área de aço necessária (A_{sw}), a parcela da força cortante absorvida por mecanismos complementares ao da treliça (V_c) e a parcela da força cortante solicitante resistida pela armadura (V_{sw}), apresentam uma variação mais linear com a mudança da relação L/h nas vigas submetidas a carregamentos distribuídos em comparação com as vigas sob carregamento concentrado. Este comportamento linear só é visto em vigas com carregamento concentrado quando o vão é grande. Para vão pequenos, isso não foi observado.

Nas condições do presente estudo, as reduções da área de aço necessária e da parcela da força cortante resistida pela armadura (V_{sw}) são maiores para o caso da força concentrada, em comparação com a força distribuída.

A seguir, são sugeridos alguns pontos que podem ser utilizados em estudos e trabalhos futuros:

- Avaliar os parâmetros do estudo em questão, sob normas de cálculo internacionais de estruturas de concreto;
- Avaliar vigas com condições de contorno diferentes, com vigas bi engastadas ou contínuas, por exemplo;
- Avaliar casos de vigas submetidas a ambos os carregamentos, distribuído e concentrado atuando simultaneamente, visto que neste trabalho foi feita a análise separadamente;
- Realizar o mesmo estudo em vigas de materiais diferentes, como vigas metálicas ou vigas de madeira.

6. REFERÊNCIAS

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE, Committee 318. **Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318-14) and Commentary (ACI 318R-14)**. Detroit, 2014.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto – Procedimento**. Rio de Janeiro, 2014.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6120: Cargas para o cálculo de estruturas de edificações - Procedimento**. Rio de Janeiro, 2019.

BASTOS, Paulo Sérgio dos Santos. **Dimensionamento de vigas de concreto armado à força cortante**. Apostila da disciplina Estruturas de Concreto II do curso de Engenharia Civil da Faculdade de Engenharia da Universidade Estadual Paulista, Campus de Bauru, 2021.

BUFFONI, Salete Souza de Oliveira. **Deflexão de vigas**. Apostila da disciplina Resistência dos Materiais da Escola de Engenharia Industrial Metalúrgica de Volta Redonda, da Universidade Federal Fluminense. Rio de Janeiro, 2022.

CAMACHO, Jefferson Sidney. **Estudo do esforço cortante**. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho - Departamento de Engenharia Civil. Ilha Solteira/SP, 2013.

CARVALHO, Roberto Chust; FILHO, Jasson Rodrigues de Figueiredo. **Cálculo e Detalhamento de Estruturas Usuais de Concreto armado**. v. 1, 4^a. Ed., São Carlos: UFSCar, 2014.

CÓRDOVA, Franciele Oliveira *et al.* **Análise dos métodos analítico e experimental de vigas em madeira laminada colada de *Schizolobium parahyba var. amazonicum* tratadas quimicamente**. XV Encontro Brasileiro em Madeiras e em Estruturas de Madeira, Curitiba/PR. Mar/2016.

COVAS, Nelson. **Redução de esforço cortante em vigas**. TQS Docs, São Paulo. Disponível em: < <https://docs.tqs.com.br/Docs/Details?id=3585&language=pt-br> >. Acesso em: Junho de 2022.

COWPER, G. R. **The shear coefficient in Timoshenko's beam theory**. Journal of applied mechanics. 1966.

CSA A23-04. **Concrete materials and methods of concrete construction/methods of test and standard practices for concrete.** CSA International. Toronto/Canadá, 2004.

FLEISCHFRESSER, Sérgio Augusto. **Uma formulação do método dos elementos de contorno para a análise de vigas de Timoshenko.** Programa de pós-graduação em métodos numéricos em engenharia. Universidade Federal do Paraná. Curitiba/PR, 2012.

FONTES, Luiz José Gonçalves. **Verificação ao cisalhamento em lajes nervuradas.** Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Engenharia Civil da Universidade Federal de Pernambuco. Recife/PE, 2017.

FUSCO, Péricles Brasiliense. **Estruturas de concreto – Solicitações tangenciais.** Editora Pini. São Paulo/SP, 2008.

GIFFHORN, Júlia Fontana. **Análise comparativa do modelo de viga de Euler-Bernoulli e de Timoshenko através do método das diferenças finitas.** Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Departamento de Engenharia Civil do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Santa Catarina. Florianópolis/SC, 2019.

GUIA DA ENGENHARIA. **Dimensionamento de estribos pelo modelo I da NBR 6118 [exercício].** Youtube, 27 de Fevereiro de 2019. Disponível em: < <https://www.youtube.com/watch?v=UyeGJppWbC4> >. Acesso em: Maio de 2022.

GUIA DA ENGENHARIA. **Dimensionamento de estribos pelo modelo II da NBR 6118 [exercício].** Youtube, 27 de Março de 2019. Disponível em: < <https://www.youtube.com/watch?v=wI-8GiK0yLQ> >. Acesso em: Maio de 2022.

HIBBELER, Russell Charles. **Resistência dos materiais.** 7ª edição. Editora Pearson. São Paulo/SP, 2009.

LEONHARDT, Fritz. ; MÖNNIG, Eduard. **Construções de concreto – Princípios básicos do dimensionamento de estruturas de concreto armado.** v. 1, 1ª ed. Rio de Janeiro: Interciência, 1977.

MARTHA, Luiz Fernando. **Análise de estruturas: Conceitos e métodos básicos.** 3ª Edição. Editora: Gen Ltc. Rio de Janeiro/RJ, 2022. Pág. 20-26.

MELLER, Bruna Just; VARGAS, Alexandre. **Análise dos modelos de cálculo propostos pela NBR 6118:2014 para o dimensionamento de estribos em vigas de concreto armado.** Artigo submetido ao curso de Engenharia Civil da Universidade do Extremo Sul Catarinense – UNESC. Criciúma/SC, 2016.

MORILLA, José Carlos. **A estática nas estruturas**. Apostila para o curso de Engenharia Civil da Universidade Santa Cecília. Santos/SP, 2010. 49 p.

MURTA, Yvan. **Aula Online: Teoria de vigas de Timoshenko**. Youtube, 28 de Outubro de 2020. Disponível em: < <https://www.youtube.com/watch?v=uBxGgs-G1M8> >. Acesso em: Maio de 2022.

NETTO, Paulo dos Santos. **Resistência do concreto armado à força cortante em peças fletidas**. Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos. Universidade de São Paulo - USP. São Carlos/SP, 2021.

PINHEIRO, Libânio Miranda; MUZARDO, Cassiane Daniele; SANTOS, Sandro Pereira. **Bases de cálculo – Capítulo 6**. Apostila de cálculo de vigas. Disponível em: < http://www.fec.unicamp.br/~almeida/cv714/Bases_Calculo.pdf >. São Paulo/SP, Maio/2003.

SILVA FILHO, José Neres da. **Análise comparativa entre normas do cálculo da área da armadura transversal em vigas de concreto armado de resistência elevada submetidas à ação de força cortante**. Revista IBRACON de estruturas e materiais. v 12, Nº 1, pág. 139 – 178. São Paulo/SP, 2019.

SILVA, Andressa Costa da; ROSA, Jéssica Sayonara da. **Modelagem de vigas em concreto armado avaliando a presença de furos e aberturas através do método dos elementos finitos**. Universidade Federal Tecnológica do Paraná, Pato Branco/PR, 2015.

SILVA, Thiago Cunha da. **Estudo analítico das teorias de viga de Bernoulli e Timoshenko para condições de contorno variadas**. Universidade Federal Fluminense. Disponível em: < <https://seer.imed.edu.br/index.php/revistaec/article/view/2997/2255> >. Rio de Janeiro/RJ, 2019.

SOUSA FILHO, Edmilson José de; SOUZA, Gabriel Sérgio Napoli de; CHAER, Alberto Vilela. **Armadura de cisalhamento devido ao esforço cortante em seções retangulares**. Pontifícia Universidade Católica de Goiás. Goiânia/GO, 2021.

SOUZA, Amadeo Krummenauer Pahim de. **Análise de vigas de Timoshenko pelo Método dos Elementos Finitos**. Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Natal/RN, 2019.

TIMOSHENKO, Stephen Prokofievich; GERE, James E.. **Mecânica dos sólidos**. Rio de Janeiro: LTC – Livros Técnicos e Científicos, 1983.

VUNESP: Fundação para o Vestibular da Universidade Estadual Paulista. **Canal Estude Grátis**. Disponível em: < <https://www.estudegratis.com.br/questao-de-concurso/385420> >. Acesso em: Maio de 2022.

ZHOU, T.; CHAZOT, J.D.; PERREY-DEBAIN, E.; CHENG, L. **Performance of the Partition of Unity Finite Element Method for the modeling of Timoshenko beams**. Computers and Structures. Vol. 222. Outubro, 2019. Disponível em: < <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0045794919303098?via%3Dihub> >. Acesso em: Maio de 2022.