

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

JOHN WENDELL LABIS MELO

**O PROBLEMA CHINÊS DO CARTEIRO: Um convite à
Teoria dos Grafos**

MANAUS

2022

JOHN WENDELL LABIS MELO

**O PROBLEMA CHINÊS DO CARTEIRO: Um convite à
Teoria dos Grafos**

O trabalho apresentado a disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso II no Instituto de Ciências Exatas – ICE da Universidade Federal do Amazonas como requisito básico para a conclusão do curso de bacharelado em Matemática Aplicada.

Orientador(a): Prof. Dr Sandro Dimy Barbosa Bitar.

MANAUS

2022

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

M528p Melo, John Wendell Labis
 O Problema Chinês do Carteiro : Um convite à Teoria dos Grafos
 / John Wendell Labis Melo . 2022
 35 f.: il.; 31 cm.

 Orientador: Sandro Dimy Barbosa Bitar
 TCC de Graduação (Matemática Aplicada) - Universidade Federal
 do Amazonas.

 1. Grafo de Euler (Euleriano). 2. Circuito de Euler. 3. Problema
 Chinês do Carteiro (PCC). 4. Grau do vértice. I. Bitar, Sandro Dimy
 Barbosa. II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

O PROBLEMA CHINÊS DO CARTEIRO: Um convite à Teoria dos Grafos

por

JOHN WENDELL LABIS MELO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Curso de Graduação em Matemática Aplicada - ICE - Departamento de Matemática - UFAM, como requisito básico para a conclusão do curso.

Área de concentração: Grafos

Orientador: Prof. Dr Sandro Dimy Barbosa Bitar

Aprovada pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr Sandro Dimy Barbosa Bitar - UFAM

Presidente da Banca

Prof. Dr Mário Salvatierra Júnior - UFAM

Profa. Dr Karla Christina Tribuzy Bandeira - UFAM

Manaus - AM

16 de Setembro de 2022

Agradecimentos

Agradeço a Deus em primeiro lugar, pois é o Deus soberano em que acredito e confio, o Deus que me sustentou e me deu graça para que hoje eu tenha esta conquista.

Agradeço aos meus pais pois sem o apoio, o amor, o carinho e o cuidado deles não seria possível a conclusão deste curso.

Agradeço aos meus irmãos, que também me apoiaram, em especial meu irmão Max Willian que sempre tinha uma palavra de conforto quando eu precisava.

Agradeço meus amigos, principalmente os bons amigos que tive o privilégio de conhecer no decorrer da graduação. Os amigos e colegas fundadores da Ej Soma, ao meu amigo Diego Torres, que mostrou-se ser um grande amigo e companheiro. Um agradecimento especial para meu amigo Felipe Almeida, que esteve comigo em todo percurso dessa jornada, foi o amigo de estudo, o amigo ouvinte e amigo conselheiro.

Agradeço aos professores que contribuíram para minha formação, um agradecimento especial para a Prof.a Themis Abensur e para o Prof. Dr Sandro Bitar que esteve disposto a me aconselhar, ensinar, ajudar e orientar. Sempre serei grato.

Resumo

O presente trabalho aborda o Problema Chinês do Carteiro (PCC), que é utilizado para resolver problemas de percursos fornecendo o passeio (caminho) de custo mínimo em um grafo. Este tem como objetivo convidar o leitor conhecer a Teoria dos Grafos através de um estudo do PCC. No início do trabalho, é abordado os fundamentos da teoria, tais como: conceitos; definições; noções entre outros, que é fundamental para qualquer estudo envolvendo a teoria. No PCC existe alguns casos de Grafos, sendo os mais comuns os casos: Grafo não Orientado; Grafo Orientado e Grafo Misto. Em cada um dos casos, o problema basicamente se resume em transformar o grafo em Euleriano e encontrar um passeio de custo mínimo percorrendo pelo menos uma vez cada aresta deste grafo através de algoritmos. Será abordado também uma formulação de Programação Linear para o PCC, com o intuito de mostrar uma outra maneira de obter a resolução de problemas desta natureza.

Palavras-chaves: Grafo de Euler (Euleriano), Circuito de Euler, Problema Chinês do Carteiro (PCC), Grau do vértice.

Abstract

The present work addresses the Chinese Postman Problem (CCP), which is used to solve path problems by providing the least cost walk (path) in a graph. This aims to invite the reader to know the Theory of Graphs through a study of the PCC. At the beginning of the work, the fundamentals of the theory are approached, such as: concepts; Definitions; notions among others, which is fundamental for any study involving the theory. In the PCC there are some cases of Graphs, the most common cases being: Non-Oriented Graph; Oriented Graph and Mixed Graph. In each case, the problem basically boils down to transforming the graph into Eulerian and finding a minimum-cost walk through each edge of this graph at least once through algorithms. A formulation of Linear Programming for the PCC will also be discussed, in order to show another way to obtain the resolution of problems of this nature.

Keywords: Euler Graph (Eulerian), Euler Circuit, Postman's Chinese Problem (CCP), Vertex degree.

Sumário

Introdução	9
1 Alguns Fundamentos da Teoria dos Grafos	11
1.1 Notação, definição e noções fundamentais	11
1.2 Circuito e Grafo de Euler	14
1.3 Representação matricial de grafos	17
1.4 Dígrafos e Redes	18
1.5 Problema de caminho mais curto	19
1.5.1 Algoritmo de Dijkstra	20
2 Problema Chinês do Carteiro - PCC	21
2.1 PCC não Orientado - PCCS	22
2.2 PCC Orientado - PCCD	24
2.3 PCC Misto - PCCM	25
3 Modelos de Programação Linear para o PCC	28
3.1 Modelo de Programação Linear para Caminho Mínimo	28
3.2 Modelo de Programação Linear do PCCS	29
3.3 Modelo de Programação Linear do PCCD	32
Conclusão	33
Referências	35

Lista de Figuras

Figura 1 – Representação Pictórica das 7 Pontes de Königsberg.	12
Figura 2 – Grafo Euleriano (a) e Grafo Semieuleriano(b).	17
Figura 3 – Grafo não Euleriano e não Semieuleriano	17
Figura 4 – Representação Pictórica do grafo do Problema.	23
Figura 5 – Representação Pictórica do grafo auxiliar do Problema.	23
Figura 6 – Representação Pictórica do grafo misto do Problema.	26
Figura 7 – Representação Pictórica do grafo misto auxiliar do Problema. . .	26
Figura 8 – Representação Pictórica do grafo H	27
Figura 9 – Representação Pictórica do grafo do Exemplo 2.1.1.	30
Figura 10 – Representação Pictórica do grafo auxiliar do Problema.	31

Introdução

A Teoria dos Grafos foi desenvolvida no século XX baseando-se no trabalho do Matemático Leonhard Euler a respeito das setes pontes de Königsberg. A importância da teoria surge de conexões e aplicações para outras ciências e outras áreas da matemática. Há um grande aumento das cidades desde a origem da teoria, tendo um crescimento significativo no número de ruas afetando os problemas de roteirização de arco, como por exemplo a roteirização: da distribuição de jornais; das entregas de pedidos; de serviços de transporte escolar; da coleta de lixo; da rota de carteiros, entre outros. Embora o problema de roteamento de arco seja muito importante e tenha muitos tipos de aplicações, resolver esses problemas do cotidiano é bastante complexo e muito desafiador. O Problema Chinês do Carteiro (PCC) otimiza rotas a partir da cobertura de todas as arestas (arcos). O principal objetivo dos problemas de cobertura de arestas (arcos) é determinar o caminho de menor custo, de modo que todas as arestas do grafo sejam percorridos pelo menos uma vez, visto que a região pode ou não ter restrições.

O Capítulo 1 trata-se da introdução à Teoria dos Grafos, abordando alguns dos fundamentos da teoria, tais como: as notações; definições; noções fundamentais; Grafo de Euler; Dígrafos; Redes e determinação do caminho mais curto. É o capítulo base para compreensão da Teoria e do PCC.

No Capítulo 2 aborda o Problema Chinês do Carteiro (PCC). Este trata-se de problemas para determinar percursos. O PCC no geral é tratado de acordo com a orientação do grafo em análise. Existem alguns casos de grafos no PCC, dentre eles os mais comuns são: Grafos Orientados; Grafos não Orientados e Grafos Mistos. Em cada um destes casos deseja-se gerar um percurso de custo mínimo sobre um grafo

respeitando as condições necessárias e/ou suficiente. No geral, basicamente, o problema é resumido em converter o grafo inicial em um grafo Euleriano para cada um dos casos mencionados, porém, para garantir que isso é possível, o grafo final deve satisfazer algumas propriedades. Será apresentado uns algoritmos clássicos para solucionar problemas desta natureza.

O Capítulo 3, trata-se de uma formulação para o PCC via Programação Linear. Dando uma outra forma para solucionar cada um dos casos do PCC. O intuito deste capítulo é fornecer uma outra abordagem para o PCC e fazer uma comparação entre os métodos de resolução.

Capítulo 1

Alguns Fundamentos da Teoria dos Grafos

A teoria dos grafos é um ramo ativo da matemática. Sua origem baseia-se no trabalho do matemático suíço Leonhard Euler sobre o problema das sete pontes de Königsberg em 1766. Esse trata de um problema de percurso. Euler tinha como objetivo respostas sobre se era possível caminhar de forma contínua sobre as sete pontes de modo que atravessasse exatamente uma vez cada uma delas. De acordo com Gomes et al. (2009), Euler solucionou o problema, em que encontrou as condições para a existência de um percurso fechado e mostrou que não havia solução para o problema das sete pontes de Königsberg. Assim, segundo Gomes et al. (2009) nasce então a Teoria dos Grafos.

Neste capítulo será destinado à introdução à teoria dos grafos, destacando as definições e conceitos.

1.1 Notação, definição e noções fundamentais

Definição 1.1.1 *Um grafo G é um par ordenado $(V(G), A(G))$ onde $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $A(G) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ são conjuntos distintos por natureza, chamados vértices e arestas de G , respectivamente, juntamente com uma função de incidência f que associa um par não ordenado de vértices (não necessariamente distintos) (u, v) a uma aresta do conjunto $A(G)$. Quando $f(u, v) = \alpha$, onde $\alpha \in A(G)$ tem-se que:*

- i. α é incidente com u e v ,*

- ii. u e v são os vértices finais de α , e
- iii. u e v são adjacentes.

De agora em diante, será usada as três informações acima em vez de referenciar explicitamente a função de incidência.

Um grafo é geralmente representado por figuras planas consistinda de linhas e pontos, as linhas representando arestas e os pontos representando vértices. Essa representação chama-se *Representação Pictórica de um Grafo*.

A Figura 1, ilustra de forma pictórica um grafo das setes pontes de Königsberg.

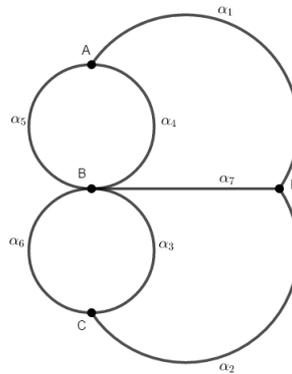


Figura 1: Representação Pictórica das 7 Pontes de Königsberg.

Aos termos número de vértices e arestas de um grafo usa-se a denominação de ordem e dimensão do grafo, respectivamente.

Denota-se por $|V(G)|$ e $|A(G)|$ o número de vértices e o número de arestas do grafo G , respectivamente. O número de vezes que as arestas incidem sobre o vértice v é chamado grau do vértice v , denotado por $d_G(v)$. Segundo Cardoso (2011), o máximo grau dos vértices de G denota-se por $\Delta(G)$ e o mínimo grau por $\delta(G)$.

Em um grafo arbitrário G , quando adicionado os graus de todos vértices de G cada aresta é contada duas vezes, podendo então concluir-se que

$$\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2|A(G)| \quad (1.1)$$

No problema das setes pontes, tem-se que $|V(G)| = 4$ e $|A(G)| = 7$, com $d_G(A) = d_G(C) = d_G(D) = \delta(G) = 3$ e $d_G(B) = \Delta(G) = 5$.

Em um grafo G , um *laço* é uma aresta com ambos os seus vértices finais iguais; *arestas múltiplas* é um conjunto de duas ou mais arestas com os mesmos vértices finais.

Um grafo G é dito *simples* se não existe em G arestas múltiplas e laços. Caso contrário, G é dito *multigrafo*.

Para uma melhor compreensão da teoria dos grafos, é preciso definir alguns conceitos.

- **Passeio:** Um passeio em um grafo é uma sequência alternada de vértices e arestas, de modo que cada aresta é precedida por um de seus vértices finais e seguida por seu outro vértice final.
- **Trilha:** Uma trilha em um grafo é um passeio que não repete arestas. Ou seja, as arestas são distintas.
- **Caminho:** Um caminho em um grafo é um passeio que não repete vértices e arestas.
- **Passeio Fechado:** Um passeio em um grafo é fechado se começa e termina no mesmo vértice.
- **Circuitos:** Os circuitos são trilhas onde o vértice final coincide com o inicial, ou seja, circuito são trilhas fechadas.
- **Ciclo:** Os ciclos são trilhas fechadas em que o vértice inicial e vértice final são os únicos vértices coincidentes nesta trilha.

Segundo Cardoso (2011), dado um caminho P (ciclo C) de um grafo G designa-se por comprimento de $P(C)$ e denota-se por $comp(P)$ ($comp(C)$) o número de arestas que o constitui.

Na teoria dos grafos, um vértice adjacente de um vértice v em um Grafo é um vértice que está ligado a v por uma aresta. O conjunto de vértices adjacentes a um vértice v é denotado por *vizinhança de aberta* de v e denota-se por $N_G(v)$. Quando incluído o vértice v a sua vizinhança tem-se uma *vizinhança fechada* de v denotada por $N_G[v]$. Como consequência, tem-se que $d_G(v) = |N_G(v)|$.

De acordo com Cardoso (2011), dados dois grafos G_1 e G_2 , a *união* de G_1 com G_2 denota-se por $G_1 \cup G_2$ e corresponde ao grafo $G_1 \cup G_2 = (V(G_1) \cup V(G_2), A(G_1) \cup A(G_2))$ e a *intersecção* de G_1 com G_2 denota-se por $G_1 \cap G_2$ e corresponde ao grafo $G_1 \cap G_2 = (V(G_1) \cap V(G_2), A(G_1) \cap A(G_2))$.

Um grafo G é conexo se todos os pares de vértices de G são unidos por um passeio. Segundo Cardoso (2011), G diz-se conexo se não admite qualquer partição para além da trivial (i.e, $G = G \cup \emptyset$), pois, baseando-se nas definições de união e intersecção, pode-se afirmar que um grafo G se particiona “[...] nos grafos $G_1 = (V_1, A_1), \dots, G_k = (V_k, A_k)$ se $G = \cup_{1 \leq j \leq k} G_j$ e $G_p \cap G_q = \emptyset \ \forall p \neq q$, onde \emptyset denota o grafo definido pelo par (\emptyset, \emptyset) .” (CARDOSO, 2011).

Um grafo H é um subgrafo de um grafo G se $V(H) \subseteq V(G)$, $A(H) \subseteq A(G)$. Se H é um subgrafo de G então diz-se que H é um subgrafo próprio de G se $H \neq G$, H é um subgrafo abrangente de G se $V(H) = V(G)$.

De acordo com Mary (2007), cada parte conexa do grafo é chamada de *componente conexa* do grafo. Diz-se que um grafo é conexo se qualquer par de vértices é ligado por ao menos uma aresta.

Lema 1.1.2 *Sejam G_1, G_2 subgrafos conexos de um grafo G tal que $V(G_1) \cap V(G_2) \neq \emptyset$. Então $G_1 \cup G_2$ é conexo.*

Demonstração. Suponha que $x \in V(G_1) \cap V(G_2)$. Sejam u e v vértices de $G_1 \cup G_2$. Se $u, v \in G_1$, então, pode-se achar um passeio de u a v em G_1 pois, por hipótese, G_1 é conexo. O mesmo ocorre se $u, v \in G_2$. Por outro lado, se $u \in V(G_1)$ e $v \in V(G_2)$, então, é possível encontrar um passeio $W_1 \in G_1$ em que W_1 é um passeio de u até x e um passeio $W_2 \in G_2$ em que W_2 é um passeio de v até x . Então, W_1W_2 é um passeio de $G_1 \cup G_2$ unindo u e v . Em todos os casos, $G_1 \cup G_2$ contém um passeio de u até v . Como u e v são vértices arbitrários de $G_1 \cup G_2$, segue que $G_1 \cup G_2$ é conexo. \square

1.2 Circuito e Grafo de Euler

Segundo Cardoso (2011), uma trilha é dita trilha de Euler se contém todas as arestas (logo também todos os vértices) do grafo ou multigrafo a que se refere. Por sua vez, denomina-se por circuito de Euler, todo o circuito que contenha todas as arestas do grafo.

A condição necessária e suficiente para a existência de um circuito de Euler é dada pelo teorema a seguir.

Teorema 1.2.1 *Um grafo (ou multigrafo) conexo G admite um circuito de Euler se e somente se todos os seus vértices têm grau par.*

Demonstração. Para provar a necessidade, suponha um passeio de Euler R em um grafo (ou multigrafo) G . Como todos os vértices de G pertencem a R , pode-se percorrer de um vértice qualquer x para qualquer outro vértice y ao longo de R e, portanto, G é conexo.

A suficiência será provada utilizando indução sobre o número de arestas do grafo (ou multigrafo) G , suponha que G é um grafo (ou multigrafo) conexo e $d_G(v)$ é par $\forall v \in V(G)$. Para um grafo (ou multigrafo) com uma única aresta o resultado é trivial. Assumindo que todos os vértices de G têm grau par e assumindo também que todos os grafos (ou multigrafos) conexos de grau par com menos arestas do que as de G admitem circuitos de Euler. Escolhendo $v \in V(G)$ e iniciando um passeio sobre as arestas de G , sem que se passe pela mesma aresta duas vezes, até se encontrar v novamente. Note que esse passeio é uma trilha fechada e devido os graus de cada vértice ser par, essa trilha fechada é possível. Em seguida, retirando as arestas relativas a trilha percorrida, uma certa quantidade de subgrafos (ou submultigrafos) conexos é obtido em que os vértices continuam ter grau par. Por hipótese de indução, esses subgrafos (ou submultigrafos) obtidos admitem circuitos de Euler. Assim, é possível criar um circuito de Euler para G acrescentando ao circuito inicial os circuitos de Euler de cada um dos subgrafos (ou submultigrafos) obtidos. \square

De acordo com Cardoso (2011), os únicos grafos não conexos, cujos vértices têm grau par, que admitem circuitos de Euler são os que têm uma única componente com um número de arestas superior a zero (isto é, as demais componentes são constituídas por vértices isolados).

O grafo G é dito de Euler ou Euleriano se tem um circuito de Euler. Ou seja, o grafo G tem m arestas e existe uma trilha fechada em G de comprimento m .

A prova do Teorema 1.2.1 sugere os passos de um algoritmo recursivo para a determinação de circuitos de Euler em grafos ou multigrafos conexos, em que todos os vértices tem grau par. O algoritmo determina o circuito de Euler a partir de $v_1 \in V(G)$, denotado por $Euler(G, v_1)$ e segue a formulação.

- **Algoritmo** $Euler(G, v_1)$

Se $d_G(v_1) = 0$

então $Euler(G, v_1) = v_1$

Senão faça

1. construir um circuito, $C = (v_1, v_2, \dots, v_k, v_1)$ em G ;
2. fazer $G = (V(G), A(G) \setminus A(C))$;
3. devolver $(Euler(G, v_1), Euler(G, v_2), \dots, Euler(G, v_k))$

fim faça

Fim do Algoritmo.

Corolário 1.2.2 *Um grafo (ou multigrafo) conexo G admite uma trilha de Euler, mas não um circuito de Euler, se e somente se tem exatamente dois vértices de grau ímpar.*

Demonstração. Se G admite uma trilha de Euler que não seja um circuito de Euler, ou seja, o vértice de inicial e o vértice final são distintos, apenas estes tem grau ímpar. Aos demais vértices em cada visita, foi utilizado apenas uma aresta na chegada ao vértice e outra aresta ao abandonar o vértice, sendo assim, cada um destes tem grau par. Suponha que todos os vértices de G tem grau par, exceto dois. Pelo Teorema 1.2.1, não existe um circuito de Euler. Para provar a existência dessa trilha, suponha que $d_G(u)$ e $d_G(v)$ seja ímpar e considere que o grafo G' , em que $A(G') = A(G) \cup \{uv\}$. Note que se aresta uv já existir em $A(G)$, G seria um multigrafo e G' seria um multiconjunto com arestas repetidas. G' satisfaz as hipóteses do Teorema 1.2.1, então, G' admite um circuito de Euler. Se for redirado do circuito a aresta uv obtém-se um trilha de Euler em G .

□

Os grafos que atedem as condições do Corolário 1.2.2 é conhecido como *Semieuleriano*. Se o grafo for semieuleriano, é possível torná-lo euleriano.

A Figura 2 ilustra grafos que atendem as condições do Teorema 1.2.1 e do Corolário 1.2.2. Na Figura 2 (a) note que o grau em cada vértice é par, sendo assim, o grafo satisfaz as condições do Teorema 1.2.1 e é dito Euleriano pois admite um Circuito de Euler; na Figura 2 (b), apenas os vértices D e E tem grau ímpar, os demais tem grau

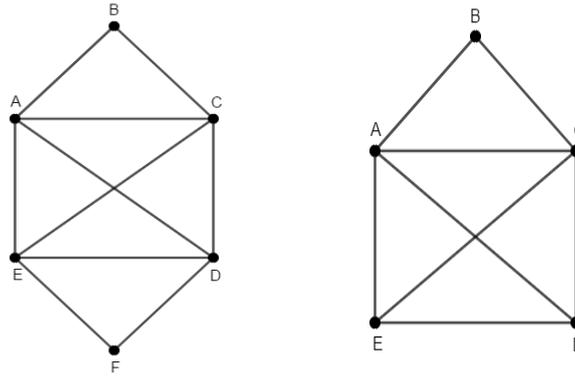


Figura 2: Grafo Euleriano (a) e Grafo Semieuleriano(b).

par, então, o Grafo atende as condições do Corolário 1.2.2 e é dito Semieuleriano pois admite uma Trilha de Euler.

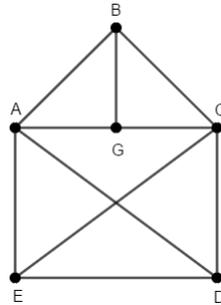


Figura 3: Grafo não Euleriano e não Semieuleriano

A Figura 3 ilustra o Grafo que não atende as condições do Teorema 1.2.1 e do Corolário 1.2.2. No que os vértices B, D, E e G tem grau ímpar e os vértices A e C tem grau par. Alguns tipos especiais de grafos da Teoria do Grafos também são nem Euleriano e nem Semieuleriano, por exemplo: Grafo nulo; Árvores e Grafos bipartidos. Mais informações a respeito dos tipos especiais de grafos pode se obtido em (JURKIEWICZ, 2009).

1.3 Representação matricial de grafos

De acordo com Cardoso (2008), dado um grafo G , tal que $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$, denota-se por *matriz de adjacência* de G e denota-se por M_G , a matrix quadrada $n \times n$, tal que

$$(M_G)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } v_i v_j \in A(G), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A seguir é ilustrado a matriz de adjacência do grafo semieuleriano ilustrado pela Figura 2 (b) em que cada linha e cada coluna representa um vértice.

$$M_G = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

A matriz de incidência aresta vértice de um grafo de ordem n e dimensão m é uma matriz $n \times m$, T_G , tal que

$$(T_G)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha_j = v_i v_k \text{ para algum } v_k \in V(G), \\ & \text{onde } \alpha_j \text{ refere-se à } j\text{-ésima aresta posicionada como coluna.} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A seguir é ilustrado a matriz de incidência do grafo semieuleriano ilustrado pela Figura 2 (b) em que cada linha representa um vértice e cada coluna uma aresta.

$$T_G = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

1.4 Dígrafos e Redes

Definição 1.4.1 (Grafo direcionado) De acordo com Mary (2007), um grafo direcionado ou dígrafo D é um grafo no qual cada aresta α recebeu uma direção fixa de um vértice final u até seu outro vértice final v . Chama-se arcos de arestas direcionadas e usa-se $A'(D)$ para denotar o conjunto de arcos de D . Diz que:

- i. α é um arco de u a v , e
- ii. u é a cauda de α e v é a cabeça de α .

Um **passeio direcionado** em um dígrafo D é um passeio em que cada arco é precedido por sua cauda e seguido por sua cabeça.

Segundo Cardoso (2008), um dígrafo diz-se simples se não tem nem arcos múltiplos nem arcos com ambos os extremos no mesmo vértice. Ou seja, assim como ocorre nos grafos, os dígrafos simples são denominados apenas dígrafos e dígrafos com laços orientados e/ou arcos múltiplos são denominados por multidígrafos.

Definição 1.4.2 (Rede) *De acordo com Mary (2007), uma rede é um grafo ou dígrafo no qual a cada aresta α associa-se um número real $w(\alpha)$ chamado peso de α .*

O comprimento de um passeio em uma rede é a soma dos pesos de suas arestas, contando arestas repetidas o número apropriado de vezes.

Seja N uma rede conexa em que cada aresta tem um peso inteiro positivo. Se W é um passeio fechado que contém todas as arestas de N então tem-se que $\text{comp}(W) \geq w(N)$. Além disso, se a igualdade for válida, então W contém cada aresta de N exatamente uma vez e, portanto, W é um passeio de Euler de N .

1.5 Problema de caminho mais curto

Nesta Seção, será abordado um problema relativamente simples que está presente no cotidiano. Suponha que alguém precisa se deslocar de sua casa para o aeroporto e para isso dispõe de várias avenidas que passam por diversos bairros de sua cidade. Qual caminho oferece um trajeto de menor comprimento, ou melhor, com a menor distância da casa até o aeroporto?

Considerando que vários locais ou simplesmente cada esquina sejam vértices e as rotas entre estes locais ou as ruas entre cada esquina sejam arestas, pode-se criar um grafo valorado que representa a situação. Entre o ponto de partida (casa) até o destino (aeroporto) existe mais de um trajeto, possível. Determinar o mais favorável nem sempre é simples de ser resolvido, em muitos casos, com grafos robustos, precisa-se de algoritmos.

Um dos algoritmos que soluciona este problema foi criado por Edsger Wybe Dijkstra, em 1952, será apresentado a seguir.

1.5.1 Algoritmo de Dijkstra

O algoritmo de Dijkstra é utilizado para resolver o problemas em que deseja-se determinar a distância mais curta (menor distância) entre dois vértices de um grafo. As distâncias em grafo, dependendo do que o grafo representa, pode-se encontrar a rota mais curta, o menor custo, entre outros, tudo usando esse algoritmo.

O algoritmo funciona partindo do vértice final v e visitando sua vizinhança, encontrando a menor distância de $N_G(v)$ até o vértice final v . Quando encontrado o vértice inicial, pode-se determinar o caminho mais curto e seu comprimento.

- **Algoritmo *Dijkstra***

1. Comece no vértice final marcando-o com uma distância 0. Chame este vértice de seu vértice atual.
2. Identifique todos os vértices da vizinhança do vértice atual como vértice aberto.
3. Calcule a distância de cada vértice desta vizinhança até o vértice atual. Marque cada um dos vértices com sua distância correspondente, mas apenas altere fechado se a distância de um vértice for menor que a distância do vértice verificado anterior.
4. Rotule o vértice atual como visitado. Depois que um vértice é visitado, não é verificado novamente.
5. Dos vértices verificados, encontre aquele com a menor distância e torne-o seu vértice atual. Retorne e comece a partir de 2.
6. Quando rotular o vértice inicial como visitado - pare. A distância do caminho mais curto é a distância até o vértice inicial.

Fim do Algoritmo.

Capítulo 2

Problema Chinês do Carteiro - PCC

Em 1962, de acordo com Gomes et al. (2009), um matemático da Universidade Normal de Shangtun, Kwan Mei-Ko, quando trabalhou como funcionário dos correios durante a revolução cultural chinesa, preocupou-se com uma situação semelhante à de Euler e Heierholzer a respeito do problema das pontes de Königsberg, porém adequada ao percurso dos carteiros que atendiam ruas de sua cidade. Neste caso, Kwan mostrou-se interessado em definir além da travessia, a forma mais econômica de fazê-la, realizando com a menor distância possível o percurso. Kwan definiu assim o problema: *Um carteiro tem que cobrir seu local de trabalho, antes de retornar ao posto. O problema é encontrar a menor distância de percurso para o carteiro.*

Para obter uma solução do problema pode-se ser usado a *solução por força bruta*, que verifica cada possibilidade de sequências (passeios) até encontrar a solução. Porém, se por exemplo o grafo que representa o trajeto percorrido pelo carteiro tenha 20 ruas, então, tem-se $20! = 2432902008176640000$ sequências, considerando que não há repetição de ruas. De acordo com Jurkiewicz (2009), para um computador verificar um milhão de sequências por segundo demoraria cerca de 77 milênios para obter uma solução. O que torna o método de solução por força bruta não é viável para este problema por questões óbvias.

Se o grafo em questão é euleriano, então, não há problema, pois é possível encontrar um circuito de Euler no trajeto do carteiro, que pode se obtido por algoritmos. Entretanto, se não for o caso, para resolver o problema, precisa-se *eulerizar* o grafo. A

ideia de eulerizar o grafo é fazer com que, neste caso, o carteiro percorra ruas repetidas de forma econômica. Quando o grafo tem dois vértices de grau ímpar, pelo Corolário 1.2.2 é possível eulerizar o grafo.

De acordo com Gomes et al. (2009), no PCC considera-se um grafo $G = (V, L)$ como um conjunto formado por vértices e ligações. O autor destaca,

o conjunto das ligações pode ser ampliado para uma dupla de conjuntos, $L = (A, A')$, onde A são denominadas as ligações *não orientadas* (*arestas*) entre vértices de G , e A' é o conjunto das ligações *orientadas* (*arcos*) entre vértices de G . (GOMES et al., 2009).

Neste Capítulo será apresentado o caso não orientados e o caso orientado com suas classificações variadas.

2.1 PCC não Orientado - PCCS

De acordo com Gomes et al. (2009), neste caso, deseja-se gerar um percurso de custo mínimo sobre um grafo $G = (V, A)$, valorado e conexo, a partir de um vértice de origem v_0 em que $v_0 \in V(G)$.

No PCC não orientado também conhecido como caso simétrico do PCC, cada aresta α possui um peso associado de modo que o percurso entre quaisquer pares de vértices de um grafo conexo é o mesmo de v_i para v_j e de v_j para v_i .

Exemplo 2.1.1 *Um condutor de transporte escolar tem que cobrir uma área buscando os alunos em suas residências e levando-os para a escola. A direção da escola questionou-se se o trajeto feito pelo condutor é o mais econômico saindo da garagem (origem), percorrendo em todas as ruas e voltando para o ponto de partida (garagem).*

A Figura 4, ilustra o grafo G em que corresponde a área em que o condutor tem que cobrir, onde o vértice A representa a origem.

Se o grafo G é euleriano, é possível obter um circuito de Euler e este é o trajeto mais econômico para o condutor. Verificando os graus dos vértices de G , tem-se que $d_G(B) = d_G(A) = 3$, $d_G(C) = d_G(D) = \Delta(G) = 4$ e $d_G(E) = \delta(G) = 2$. Note que os vértices B e A tem grau ímpar e os demais vértices tem grau par. Pelo Teorema 1.2.1 sabe-se que G não é euleriano. Então, não existe em G um passeio que inicie em A percorra todas as arestas e termine em A sem repetir nenhuma das arestas. Pelo

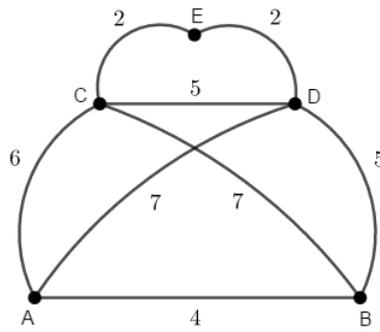


Figura 4: Representação Pictórica do grafo do Problema.

Corolário 1.2.2 G admite uma trilha de Euler de A à B . A trilha obtida cumpre as hipóteses do Corolário 1.2.2 e resolve parcialmente o problema, pois, cada aresta está presente uma única vez, porém os vértices finais são distintos. Considere G' como grafo auxiliar de grafo G , tal que $A(G') = A(G) \cup \{\alpha\}$, onde α é a combinação de arestas de menor distância entre os vértices B e A . Para obter α , basta usar o Algoritmo de Dijkstra, visto na Subseção 1.5.1 a partir do vértice final B . Verificando a distância entre as possíveis ligações entre estes vértices, tem-se que a menor é a ligação BA .

A Figura 5 ilustra graficamente o grafo G' .

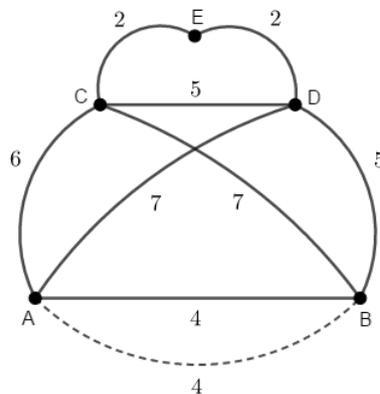


Figura 5: Representação Pictórica do grafo auxiliar do Problema.

Cada aresta representa uma rua e como não é possível criar uma nova rua, trata-se de uma aresta artificial que conecta os vértices B e A . De fato, pois a ideia, como já mencionado, é fazer com que no percurso do condutor seja percorrido ruas repetidas de forma econômica. Note que de todas as combinações possíveis de arestas que conecta os vértices B e A a mais favorável, isto é, a aresta ou combinação de arestas de menor peso é BA pois seu peso é $w(BA) = 4$.

Note que o grau de cada vértice do grafo G' é par. Pelo Teorema 1.2.1, existe um circuito de Euler em G' e portanto, G' é euleriano. Para responder o questionamento da direção da escola, basta que seja aplicado o *Algoritmo Euler* (G, v_1) a partir do vértice A . Seja $T = \{AC, CE, ED, DB, (BA)_1, AD, DC, CB, (BA)_2\}$, onde $(BA)_1$ e $(BA)_2$ representam as arestas incidentes os vértices A e B do grafo G' ilustrado na Figura 5. Observe que T é um passeio que inicia em A e termina em A sem repetir nenhuma aresta com $comp(T) = 42$. Portanto, T é um circuito de Euler e uma solução para o problema.

Para determinar um passeio que seja um circuito de Euler, basta utilizar o Algoritmo *Euler*(G, v_1) visto na Seção 1.2 ou outros algoritmos clássicos como por exemplo, o Algoritmo de Fleury.

2.2 PCC Orientado - PCCD

De acordo com Gomes et al. (2009), neste caso, deseja gerar um percurso de custo mínimo sobre um grafo $G = (V, A')$, valorado e fortemente conexo (f-conexo), a partir de um vértice v_0 , origem. Segundo Silva, Lins e Xavier (2020), uma condição necessária e suficiente para a existência de um circuito de Euler para o PCCD é que o grafo deve ser simétrico, ou seja, o número de arcos que entram em um determinado vértice deve ser igual ao número de arcos saindo desse vértice.

Satisfeita estas condições em um grafo, para encontrar o circuito de Euler basta utilizar algoritmos apropriados. No geral, assim como no PCCS é interessante tornar grafos não euleriano em euleriano. De acordo com Filho e Junqueira (2006), adaptação do algoritmo de Fleury para grafos direcionados dentre outros. Segundo Silva, Lins e Xavier (2020), o algoritmo de Fleury é um algoritmo de construção de rotas para traçar o circuito Euleriano, considerado um dos mais fáceis de serem implementados, aplicado apenas em grafos Eulerianos ou semieulerianos.

O algoritmo segue o seguinte procedimento:

- **Algoritmo de Fleury**

1. Construir uma lista vazia T que será armazenada o circuito de Euler.
2. Escolher um vértice arbitrário e adicioná-lo na lista T .

3. Escolher e marcar um aresta incidente ao vértice escolhido, desde que o grafo que resulte da escolha permaneça conexo.
4. Rotular a aresta marcada no grafo e adicionar o vértice a aresta no final da lista T .
5. Se todas as arestas do grafo original tiverem sido rotuladas, então retorne a lista T que conterá o circuito de Euler. Se não, tome um vértice adjacente ao vértice escolhido anteriormente e volte ao **passo 3**.

Fim algoritmo

2.3 PCC Misto - PCCM

De acordo com (GOMES et al., 2009), neste caso deseja-se gerar um percurso de custo mínimo sobre um grafo $G = (V, A, A')$, valorado e fortemente conexo (f-conexo), a partir de um vértice v_0 . Segundo Filho e Junqueira (2006), a condição para que um grafo misto fortemente conexo tenha um circuito Euleriano é que todos os vértices deste grafo tenham grau par e sejam balanceados. G é balanceado se $d_G^-(v_i) = d_G^+(v_i)$, $\forall v_i \in V$. Ou seja, o grau de entrada é igual ao grau de saída para todos vértices do grafo.

Se o grafo misto for Euleriano, o problema passa a ser determinar o circuito Euleriano neste grafo. Pra isso, Filho e Junqueira (2006) sugere um método em três etapas para se encontrar o circuito de Euler.

- **Método para determinar um circuito Euleriano em um grafo misto**
 - *PASSO 1*: Atribuir direção aos arcos não direcionados de tal forma que o grafo se torne simétrico;
 - *PASSO 2*: Atribuir direção aos arcos restantes;
 - *PASSO 3*: Uma vez que o grafo esteja completamente direcionado, encontrar o circuito Euleriano utilizando um algoritmo para grafos direcionados

Assim como nos casos anteriores, se o grafo no PCCM não seja Euleriano, para torná-lo Euleriano, deve-se proceder de maneira semelhante os casos PCCS e PCCD.

Ou seja, duplicar um número suficiente de arcos de tal forma que o grafo se torne Euleriano.

Suponha que no Exemplo 2.1.1, as ruas da área percorrida pelo condutor de transporte escolar teve modificações no sentido. A aresta DB ou BD passou ser um arco com sentido de B para D e as demais continuaram da mesma forma. Neste caso, note que a solução T apresentada no Exemplo 2.1.1 não é mais solução para este grafo. Pois, no passeio, T passa por esta aresta saindo de D e chegando em B .

A Figura 6 ilustra a modificação feita na região em que o condutor cobre.

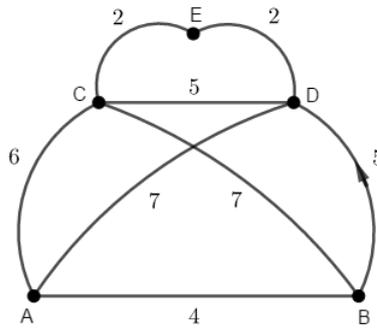


Figura 6: Representação Pictórica do grafo misto do Problema.

A Figura 7 ilustra o grafo auxiliar do grafo ilustrado na Figura 6. Como visto anteriormente, dentre todas as combinações possíveis de arestas que conecta os vértices B e A a mais favorável é BA pois seu peso é $w(BA) = 4$.

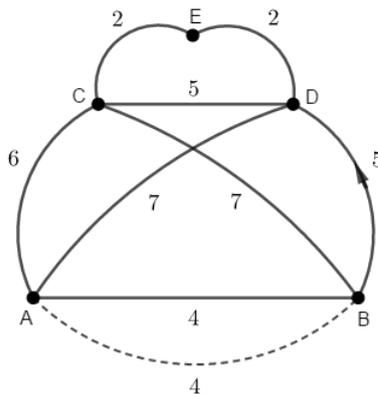


Figura 7: Representação Pictórica do grafo misto auxiliar do Problema.

A Figura 8 ilustra o grafo H na qual foi atribuído direções para as arestas que inicialmente não direcionadas. Pode-se notar que o grafo é simétrico, pois o número de arcos chegando em um determinado vértice é igual ao número de arcos saindo

desse mesmo vértice. Verificando dos graus dos vértices do grafo H , tem-se. $d_H^-(A) = d_H^+(A) = d_H^-(B) = d_H^+(B) = d_H^-(C) = d_H^+(C) = d_H^-(D) = d_H^+(D) = 2$, $d_H^-(E) = d_H^+(E) = 1$ então H é balanceado. Note que H é orientado e euleriano. Neste caso, basta determinar o circuito de Euler em H . Para isso, basta utilizar o Algoritmo de Fleury, visto na Seção 2.2.

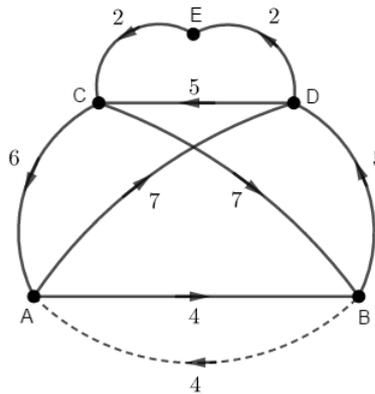


Figura 8: Representação Pictórica do grafo H .

Seja $W = \{AB, BD, DE, EC, CA, AD, DC, CB, BA\}$, observe que W é um passeio que inicia em A e termina em A sem repetir nenhum arco com $comp(W) = 42$. Portanto, W é um circuito de Euler e uma solução para o problema.

Capítulo 3

Modelos de Programação Linear para o PCC

Neste Capítulo será abordado formulações de Modelos de Programação Linear para o PCC.

3.1 Modelo de Programação Linear para Caminho Mínimo

Uma versão para determinar o menor caminho entre dois vértices é dado pelo seguinte modelo de programação linear.

$$\begin{aligned} & \text{mim} \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} \\ \text{s.a. : } & \sum_j x_{ji} - \sum_j x_{ij} = b_i, \quad i \in V \\ & x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad (i, j) \in A \end{aligned} \tag{3.1}$$

em que i e j são os índices de origem e destino respectivamente. Os parâmetros são representados: pelo Grafo $G = (A, V)$; Conjunto de arestas A ; Conjunto de Vértices V ; c_{ij} é custo de de cada aresta $(i, j) \in A$ e b_i é fluxo desejado em cada vértice.

Para o fluxo b_i , tem-se.

$$b_i = \begin{cases} -1, & \text{se é a origem;} \\ 1, & \text{se é o destino;} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

3.2 Modelo de Programação Linear do PCCS

De acordo com Gomes et al. (2009), no caso do PCC simétrico, as arestas são valoradas de modo que o percurso entre quaisquer pares de vértices de um grafo conexo é o mesmo de v_i para v_j , e de v_j para v_i . Neste caso, um percurso euleriano somente poderá ser realizado, quando um dado grafo G for transformado em um multigrafo G' de tal modo que os vértices de grau ímpar de G , possuam grau par em G' . Ou melhor, todo vértice de G , tem um número par de arestas ligados a eles em G' .

Segundo González (2018), $S \subset V$ é ímpar se for um conjunto formado por um número ímpar de vértices de grau também ímpar. Seja $A(S) = \{(i, j) | v_i \in S, v_j \in V \setminus S \text{ ou } v_i \in V \setminus S, v_j \in S\}$.

Considere a variável x_{ij} tal que:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se e somente se a aresta } (i, j) \text{ aparecer na ampliação;} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

González (2018) sugere a formulação de Programação Linear do PCCS:

$$\begin{aligned} (\text{PCC} - \text{Simétrico}) \quad & \min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} \\ \text{s.a :} \quad & \sum_{(i,j) \in A} x_{ij} \geq 1, \quad S \subset V \quad \forall S \text{ ímpar} \\ & x_{ij} \geq 0 \quad (i, j) \in A \\ & x_{ij} \in Z_+, \quad \forall (i, j) \in A \end{aligned} \tag{3.2}$$

- **Algoritmo genérico para o PCC-Simétrico**

Entrada: $G - \text{Grafo } (V, A)$ valorado nas arestas e simétrico;

– *Passo 01:* Definir $S \subset V$, conjunto dos vértices de grau ímpar;

- *Passo 02*: Encontrar o grafo completo $(K_{|S|})$ valorado com os percursos mínimos entre dois quaisquer vértices de S ;
- *Passo 03*: Aplicar $1 - MatchingValorado(S, A(S), G')$ – retorna G' ;
- *Passo 04*: $p(G') = \sum_{ij \in E'} C_{ij} x_{ij}$ {perímetro do multigrafo aumentado, onde \bar{A} é o conjunto das arestas de G' }.

• **Fim do Algoritmo**

Resolvendo o Exemplo 2.1.1 pela formulação de Programação Linear seguindo os passos do algoritmo genérico para o PCC-Simétrico, tem-se:

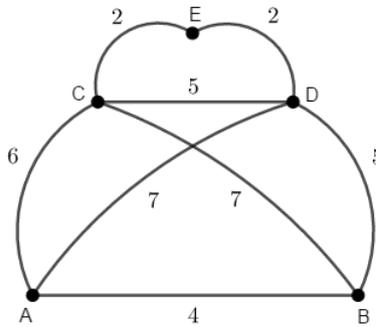


Figura 9: Representação Pictórica do grafo do Exemplo 2.1.1.

T_G é matriz de incidência do grafo G ilustrado na Figura 9.

$$T_G = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Como já mencionado, $d_G(B) = d_G(A) = 3$. Isso pode ser facilmente verificado na Matriz T_G , onde pode-se notar que para os vértices A e B representados pela primeira e segunda linha tem três arestas incidentes a eles. Para os demais vértices, todos tem uma quantidade par de arestas incidentes a eles. Portanto, A e B são os vértices de grau ímpar, $S = \{A, B\}$ e $A(S) = \{CA, CB, DA, DB\}$. Para determinar o menor caminho entre esses vértices, basta utilizar a versão do modelo de programação linear

para caminho mínimo visto na Seção 1.5 no que retorna o caminho $Z = \{BA\}$ com $w(Z) = 4$, este caminho servirá para determinar a aresta artificial e seu peso associado.

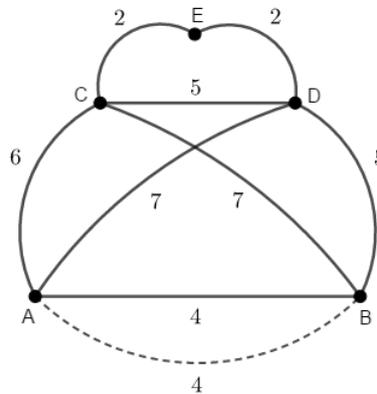


Figura 10: Representação Pictórica do grafo auxiliar do Problema.

A seguir, a matriz $T_{G'}$ ilustra matriz de incidência do grafo G' , em que considera-se uma aresta artificial que liga os vértices B e A . A segunda coluna em destaque da matriz $T_{G'}$ representa aresta artificial. Note que nesta coluna somente nas linhas que representam os vértices A e B os elementos tem valor 1 pois é a aresta que aparece ampliação do grafo G e nas demais tem valor 0. Note também que todos dos os vértices do grafo possuem grau par.

$$T_{G'} = \begin{vmatrix} 1 & \mathbf{1} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{0} & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{0} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Obtidas essa informações, basta aplicar no (*PCC – Simétrico*).

3.3 Modelo de Programação Linear do PCCD

Silva, Lins e Xavier (2020) utilizaram o modelo matemático abordado para resolução exata do PCCD por meio de programação linear

$$\begin{aligned}
 (PPC - Direcionado) \quad & \min \sum_{(i,j) \in A'} c_{ij} x_{ij} \\
 s.a : \quad & \sum_{(i,j) \in A'} x_{ij} - \sum_{(j,i) \in A'} x_{ji} = 0, \quad \forall i \in N \\
 & x_{ij} \geq 1, \forall (i, j) \in A'
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Em que a função objetivo minimiza o custo total do circuito de Euler, c_{ij} é a capacidade da aresta (i, j) e no geral, pode representar o custo, distância, etc. A restrição $\sum_{(i,j) \in A'} x_{ij} - \sum_{(j,i) \in A'} x_{ji} = 0$ garantem a conservação de fluxo, isto é, o número de arcos incidentes a um vértice deve ser igual ao número de arcos saindo do mesmo vértice. A restrição $x_{ij} \geq 1$ permitem que cada arco (i, j) seja percorrido pelo menos uma vez em G e que a variável pertence ao conjunto de números inteiros.

Conclusão

Este trabalho de modo geral, conclui que problemas ou situações que envolve roteamento de arco são de extrema importância no cotidiano. Estudos para otimizar serviços e atividades no setor de transporte e logística cresceu significativamente nos últimos anos. Serviços como: entregas; serviços de transporte escolar; coleta de lixo; rotas dos funcionários de empresas, dentre outros estão cada vez mais desenvolvidos para atender uma grande quantidade de demanda em curtos períodos de tempo de maneira mais econômica e eficiente. O intuito desses estudos é obter uma diminuição de gastos (custo) e/ou obter um aumento no lucro usando técnicas da Pesquisa Operacional. Uma dessas técnicas é utilizada neste trabalho em que foi utilizado ferramentas da Teoria dos Grafos e modelos de programação.

A teoria dos Grafos é bastante rica com diversas aplicações. No entanto, para o contexto mencionado, o Problema Chinês do Carteiro (PCC) é a ferramenta mais apropriada. O PCC é um problema que busca encontrar o menor custo de gastos com referente a transporte, em que os valores atribuídos aos arcos estão relacionados com o custo de cada viagem. Para isso, no PCC deve sair de um determinado ponto (origem) passar por todos os caminhos (arestas/ arcos) pelo menos uma vez e retornar a origem. Embora o PCC tenha sua origem no método de distribuição de cartas em determinadas ruas, sua aplicação vai além. A metodologia do PCC é constantemente usada em serviços de transporte e logística.

Na literatura sobre o PCC, geralmente são identificados alguns casos de Grafos para o PCC. Neste trabalho, é apresentado os três casos mais comuns: Grafos não Orientados, Grafos Orientados e Grafos Mistos. A aplicação do PCC foi mostrada em um exemplo simples com a resolução obtida com auxílio de algoritmos mostrando o

uso da ferramenta. Os algoritmos propostos foram capazes de identificar se o grafo é Euleriano, semieuleriano ou nem Euleriano nem semieuleriano. Nos exemplos os grafos eram semieuleriano seguindo os passos do algoritmo, foi possível transformar o grafo em Euleriano e obter o circuito de Euler.

O intuito deste trabalho é despertar o interesse na ferramenta e um convite para conhecer a Teoria dos Grafos. Para isso, acredita-se que foi suficiente explorar o caso do PCC em grafos não orientados, em que foi mostrado rota econômica como solução. Devido o grafo do problema proposto no exemplo ser semieuleriano, considerou-se uma aresta artificial que no contexto representa rua a ser percorrida. Essa aresta foi escolhida de tal forma que quando retornaasse à solução, o condutor teria que repetir ruas de forma econômica. Foi considerado uma situação no mesmo problema do exemplo, fazendo com que o grafo se tornasse misto pois, na resolução deste novo problema, pode-se estudar também o caso em que o grafo é orientado. O interessante neste exemplo, embora após a modificação, a diferença nos grafos era apenas a direção em algumas arestas. Foi visto que a solução do caso não orientado não era solução para o caso misto, na qual foi necessário a busca de uma nova solução. No fim, em ambas soluções, o comprimento do passeio era o mesmo, e de fato, pois os pesos de cada aresta não foram modificados, apenas direções em algumas. A solução do grafo misto, também era solução para o caso do grafo não orientado.

No trabalho, também foi mostrado formulações de modelos de Programação Linear adaptado para busca do caminho mais curto e para os casos do PCC, com o intuito de mostrar uma outra abordagem e outra metodologia. Foi utilizado o mesmo exemplo na formulação do Modelo de Programação Linear no caso de grafos não orientados, com objetivo de mostrar o uso da ferramenta. Baseado em pesquisas, o uso dos modelos tende a ter um custo maior no termo da computação principalmente com grafos com grandes quantidades de vértices e interações entres eles (arestas). No entanto, existem algoritmos específicos para resolver problema nesses modelos.

O CPP pode ainda ser explorado usando outros métodos. É um problema dinâmico e muitos outros tipos de problemas podem ser estendidos a partir deste trabalho. Os problemas abordados neste trabalho, embora simples, não são apenas interessantes, mas também inegavelmente importantes tanto nos negócios empresariais e nas indústrias quanto no cotidiano.

Referências

CARDOSO, D. M. Tópicos de teoria algébrica dos grafos. 2008.

_____. Teoria dos grafos e aplicações. 2011.

FILHO, M. G.; JUNQUEIRA, R. d. Á. R. Problema do carteiro chinês: escolha de métodos de solução e análise de tempos computacionais. **Production**, SciELO Brasil, v. 16, p. 538–551, 2006.

GOMES, M. J. N.; JÚNIOR, W. R. C.; PALHANO, A. W. d. C.; COUTINHO, E. F.; CASTRO, G. A. d.; GOMES, F. J. N.; BARCELLOS, G. C.; REZENDE, B. F.; PEREIRA, L. W. L. O problema do carteiro chinês, algoritmos exatos e um ambiente mvi para análise de suas instâncias: sistema xnês. **Pesquisa Operacional**, SciELO Brasil, v. 29, p. 323–363, 2009.

GONZÁLEZ, M. C. Problemas de rutas de vehículos por arcos. 2018.

JURKIEWICZ, S. Grafos—uma introdução. **São Paulo: OBMEP**, 2009.

MARY, U. d. L. Q. **Teoria de Grafos e Aplicações**. 2007. Disponível em: <<https://webpace.maths.qmul.ac.uk/b.jackson/MAS210/>>. Acesso em: 30 de janeiro de 2022.

SILVA, A. A. da; LINS, S. L. S.; XAVIER, A. da S. Uma aplicação do problema do carteiro chinês direcionado na coleta de lixo urbano. **Brazilian Journal of Development**, v. 6, n. 5, p. 24640–24659, 2020.