

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL**

**FERNANDO SANTOS DE ARAÚJO**

**ANÁLISE E DETERMINAÇÃO DO MOMENTO DE INÉRCIA À TORÇÃO DE  
SEÇÕES NÃO-CIRCULARES**

**MANAUS**

**2023**

**FERNANDO SANTOS DE ARAÚJO**

**ANÁLISE E DETERMINAÇÃO DO MOMENTO DE INÉRCIA À TORÇÃO DE  
SEÇÕES NÃO-CIRCULARES**

**Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de  
Engenharia Civil, da Universidade Federal do Amazonas,  
como requisito parcial para obtenção de grau de Bacharel  
em Engenharia Civil.**

**Orientador: Prof. Dr. Henrique Barbosa Soares**

**MANAUS**

**2023**

## Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

A663a Araújo, Fernando Santos de  
Análise e determinação do momento de inércia à torção de  
seções não-circulares / Fernando Santos de Araújo . 2023  
60 f.: il. color; 31 cm.

Orientador: Henrique Barbosa Soares  
TCC de Graduação (Engenharia Civil) - Universidade Federal do  
Amazonas.

1. torção. 2. momento de inércia. 3. teoria da elasticidade. 4.  
equações diferenciais. I. Soares, Henrique Barbosa. II.  
Universidade Federal do Amazonas III. Título



Ministério da Educação  
Universidade Federal do Amazonas  
Departamento de Engenharia Civil

## FOLHA DE APROVAÇÃO

FERNANDO SANTOS DE ARAÚJO

### ANÁLISE E DETERMINAÇÃO DO MOMENTO DE INÉRCIA À TORÇÃO DE SEÇÕES NÃO-CIRCULARES

Trabalho de Conclusão de Curso de graduação em Eng. Civil defendido e aprovado em 22 de junho de 2023.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Henrique Barbosa Soares - UFAM (Orientador)

Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Ellen Kellen Bellucio - UFAM (membro)

Prof. Dr. Gustavo Cunha da Silva Neto - UFAM (membro)



Documento assinado eletronicamente por **Henrique Barbosa Soares, Professor do Magistério Superior**, em 23/06/2023, às 08:43, conforme horário oficial de Manaus, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Ellen Kellen Bellucio, Professor do Magistério Superior**, em 23/06/2023, às 09:04, conforme horário oficial de Manaus, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Gustavo Cunha da Silva Neto, Professor do Magistério Superior**, em 23/06/2023, às 19:12, conforme horário oficial de Manaus, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://sei.ufam.edu.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://sei.ufam.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **1560092** e o código CRC **844B6374**.

Av. Octávio Hamilton Botelho Mourão - Bairro Coroado 1 Campus Universitário Senador Arthur Virgílio Filho, Setor Norte - Telefone: (92) 3305-1181  
CEP 69080-900, Manaus/AM, [decft@ufam.edu.br](mailto:decft@ufam.edu.br)

## **AGRADECIMENTOS**

À minha mãe, Luciana, que cuidou, criou e educou a mim praticamente sozinha, que sempre me incentivou aos estudos e por ser o meu porto seguro até o presente momento. À minha vó Lucimar e ao meu falecido avô Raimundo, por todo amor, carinho e apoio incondicional. A minha madrastra Aglair, por todo o suporte e carinho prestado a mim desde o falecimento do meu pai. Ao meu pai Derson (in memoriam) com quem eu sonhava em compartilhar as minhas experiências na faculdade e que foi a minha maior motivação aos estudos. Imagino que em algum lugar ele deve estar feliz por mim.

Aos amigos Ursula, Narliane, Lohant e Enzo, pelo carinho, tempo, atenciosidade e por terem me permitido compartilhar com vocês desde os meus risos e alegrias até as minhas lágrimas e frustrações nesses últimos anos de Universidade.

À professora Dra. Ellen Kellen, pela didática que promoveu todo o conhecimento básico que possuo a respeito de Resistência dos Materiais, ciência na qual se baseia esse trabalho.

Por fim, ao meu professor orientador, Dr. Henrique Soares, pelo apoio contínuo ao meu estudo, por sua paciência, motivação e imenso conhecimento que me permitiu desenvolver esse trabalho.

## RESUMO

O trabalho tem como objeto de estudo a formulação do Momento de Inércia à Torção de barras cuja seções transversais apresentam forma não-circular, visto que a seção circular é a seção estudada mais usualmente nos cursos de graduação de Engenharia Civil. O Momento de Inércia à Torção é a principal propriedade geométrica de estruturas submetidas a momento torsor e é um dos principais fatores que contribuem para resistência de um eixo, em função da sua forma, ao ser deformado pela ação de um torque. O trabalho foi desenvolvido no contexto da Teoria da Elasticidade buscando explicitar a construção e, quando possível, a solução das equações diferenciais que regem os problemas de torção uniforme. O Momento de Inércia à Torção de seções de paredes finas abertas e celulares foi determinado a partir da utilização da analogia de membrana. As expressões desenvolvidas foram aplicadas em alguns exemplos de seções delgadas. Foi realizada uma comparação entre alguns dos resultados obtidos pelas expressões analíticas e outros obtidos via a utilização dos *softwares* Flexo II® e SAP2000®. Os resultados obtidos analiticamente se mostraram satisfatórios.

Palavras-chave: torção; momento de inércia; teoria da elasticidade; equações diferenciais;

## **ABSTRACT**

The object of study is the formulation of the Torsional Moment of Inertia of non-circular cross sections bars, since the circular section is the most commonly studied section in Civil Engineering undergraduate courses. The Torsional Moment of Inertia is the main geometric property of structures subjected to torsional moment and is one of the main factors that contribute to the resistance of an axis, depending on its shape, when it is deformed by the action of a torque. The work was developed in the context of the Theory of Elasticity seeking to explain the construction and, when possible, the solution of the differential equations that govern the problems of uniform torsion. The Torsional Moment of Inertia of open thin walled and cellular sections was determined using the membrane analogy. The developed expressions were applied in some examples of thin walled sections. A comparison was made between some of the results obtained by the analytical expressions and others obtained through the use of Flexo II® and SAP2000® software. The results obtained analytically were satisfactory.

**Keywords:** uniform torsion; moment of inertia; elasticity theory; differentials equations;

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Corpo submetido a um conjunto de forças exteriores.....	15
Figura 2: Paralelepípedo infinitesimal submetido a múltiplas tensões .....	17
Figura 3: Deslocamentos infinitesimais do corpo.....	19
Figura 4: Cubo sujeito a tensões $\tau_{yx}$ e $\tau_{xy}$ , antes de deformar.....	20
Figura 5: Cubo, sujeito às tensões $\tau_{yx}$ e $\tau_{xy}$ , após a deformação.....	21
Figura 6: Sólido infinitesimal com deformações na face contida no plano $xz$ .....	21
Figura 7: Deformações na face de um sólido infinitesimal em relação ao plano $xy$ .....	22
Figura 8: Deformações na face de um sólido infinitesimal em relação ao plano $yz$ .....	23
Figura 9: Deslocamentos Transversais .....	24
Figura 10: Tensões Cisalhantes .....	28
Figura 11: Membrana sob pressão.....	29
Figura 12: Vistas laterais da membrana .....	29
Figura 13: Contorno de uma seção transversal.....	33
Figura 14: Deformação de membrana com seções usuais.....	35
Figura 15: Deslocamento de membrana de uma seção delgada aberta .....	36
Figura 16: Membrana de seção delgada aberta em forma de parábola .....	36
Figura 17: Deslocamento de membrana de seção delgada fechada.....	38
Figura 18: Seção delgada de forma arbitrária.....	38
Figura 19: Volume infinitesimal de membrana de seção delgada fechada .....	39
Figura 20: Seção delgada com a linha de esqueleto .....	39
Figura 21: Seção Elíptica.....	40
Figura 22: Triângulo equilátero.....	42
Figura 23: Perfil C .....	44
Figura 24: Resultado do Flexo II para perfil C.....	45
Figura 25: Perfil Laminado W200x35,9.....	45
Figura 26: Resultado do Flexo II para perfil W.....	46
Figura 27: Seção delgada com duas células .....	46
Figura 28: Membrana deslocada de seção delgada com duas células .....	47
Figura 29: Membrana de seção delgada de duas células submetida à pressão $p$ e tração $k$ .....	47
Figura 30: Resultado do SAP2000 para seção de duas células .....	49
Figura 31: Seção delgada com três células.....	50



Figura 32: Membrana deslocada de seção delgada com três células.....	50
Figura 33: Membrana de seção delgada de três células submetida à pressão $p$ e tração $k$ .....	51
Figura 34: Resultado do SAP2000 para seção de três células.....	53
Figura 35: Seção Mista.....	53
Figura 36: Separação entre as partes abertas e fechadas da seção mista.....	54
Figura 37: Parte fechada da membrana de seção mista quando deslocada.....	54
Figura 38: Parte fechada da membrana de seção mista sob a ação de pressão.....	55
Figura 39: Resultado do SAP2000 para seção mista.....	56

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	11
1.1	Considerações Gerais	11
1.2	Objetivos	11
1.2.1	Gerais	11
1.2.2	Específicos	12
1.3	Metodologia	12
<b>2</b>	<b>REFERENCIAL TEÓRICO</b>	14
<b>3</b>	<b>TEORIA DA ELASTICIDADE</b>	15
3.1	Conceito de tensão	15
3.2	Equações diferenciais de equilíbrio	16
3.3	Deformações no sólido e Lei de Hooke	19
<b>4</b>	<b>TORÇÃO DE SAINT-VENANT</b>	24
4.1	Momento de Inércia à Torção	27
4.2	Analogia de Membrana	29
4.3	Momento de inércia à torção de seções não-circulares de paredes finas	34
4.3.1	Seção de paredes finas abertas	35
4.3.2	Seção de paredes finas fechadas	38
4.4	Momento de inércia à torção de seções não-circulares maciças	40
4.4.1	Seção Eliptíca	40
4.4.2	Triângulo equilátero	42
<b>5</b>	<b>EXEMPLOS NUMÉRICOS DE APLICAÇÃO</b>	44
5.1	Inércia à torção de seção delgada aberta	44
5.1.1	Exemplo em Perfil C	44
5.1.2	Exemplo em Perfil I	45
5.2	Inércia à torção de seção delgada celular	46
5.2.1	Seção delgada de duas células	46
5.2.2	Seção delgada de três células	49
5.3	Inércia à torção de seção mista	53
<b>6</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES</b>	57
<b>7</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	58
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	59

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Considerações Gerais

O estudo de elementos estruturais submetidos à torção é imprescindível para que a segurança de tais componentes de engenharia possa ser avaliada. Isso deriva da magnitude das tensões e deformações associadas a esforços de torção. Como exemplos, destacam-se a necessidade de armadura adicional para combater os efeitos de torção em vigas de concreto armado e também a grande influência de tal esforço nos deslocamentos de perfis metálicos abertos de parede fina.

Nesse contexto, é de grande interesse para a engenharia a compreensão do comportamento mecânico de estruturas submetidas à ação de um torque, o que inclui o entendimento da construção e resolução das equações matemáticas que regem esse tipo de problema. Em específico, o presente trabalho abordou o problema da torção de Saint-Venant, o qual é regido por uma série de equações diferenciais parciais. Por conseguinte, a resolução destas permite a obtenção de grandezas de interesse, como tensões e deformações.

A resolução das equações diferenciais possibilita a obtenção de uma propriedade geométrica denominada momento de inércia à torção, a qual é fundamental para o cálculo de tensões, deformações e deslocamentos de elementos estruturais submetidos à ação de um torque. Sendo assim, o foco deste trabalho foi o desenvolvimento de expressões analíticas para o cálculo do momento de inércia à torção, em particular, para seções de geometria não-circular.

Vale destacar que nas disciplinas de Resistência dos Materiais, é mais usual o estudo da torção em seções circulares (maciças e vazadas) e em seções de paredes finas fechadas com uma célula. De acordo com Pimenta (2006), quando a seção transversal é circular, as seções permanecem planas após a deformação. Isso facilita o desenvolvimento das expressões de momento de inércia à torção de geometria circular.

Nesse contexto, o presente trabalho contribui com um conhecimento mais profundo e detalhado das formulações referentes à torção estrutural.

## 1.2 Objetivos

### 1.2.1 Gerais

Determinar o momento de inércia à torção de seções não-circulares a partir da resolução da equação do problema de torção de Saint-Venant.

### 1.2.2 Específicos

- Estudar a formulação referente à cinemática da torção de Saint-Venant;
- Estudar e aplicar técnicas para resolução da equação diferencial aplicada a seções maciças e de paredes finas;
- Estudar e aplicar técnicas para determinação do momento de inércia à torção nas seções maciças de geometria triangular e elíptica.
- Estudar e aplicar o método da Analogia de Membrana para solução analítica de momento de inércia à em seções de paredes finas abertas, fechadas e celulares;
- Comparar resultados obtidos com *software* de análise estrutural que permite análise de torção (Flexo II e SAP2000).

### 1.3 Metodologia

Inicialmente, realizou-se uma pesquisa bibliográfica sobre os temas: teoria da elasticidade, torção uniforme e cálculo diferencial. Foram consultados diversos materiais, incluindo livros, artigos, dissertações e teses, formando a base conceitual necessária para o desenvolvimento deste trabalho.

A partir do levantamento bibliográfico, foram formalizadas as equações matemáticas que regem os problemas de torção uniforme para barras de seção transversal qualquer. Com base nessas equações, determinou-se uma expressão geral para o momento de inércia à torção para uma seção transversal de geometria qualquer.

A expressão geral do momento de inércia à torção é escrita em função do momento torsor atuante na seção, que por sua vez é escrito em termos de uma função de tensão, denotada por  $\phi$ . Essa função de tensão foi definida para duas geometrias de seções maciças, elipse e triângulo isósceles, a partir das equações que definem o contorno destas seções. Para seções transversais de paredes delgadas abertas e fechadas, a função de tensão foi desenvolvida utilizando a analogia de membrana.

Dos procedimentos deduzidos para determinação analítica do momento de inércia à torção em seções compostas por paredes finas, foram apresentados cinco exemplos para seções com este tipo de característica.

Após a resolução desses exemplos, foram realizados testes para a validação dos resultados com o auxílio dos *softwares* Flexo II® e SAP 2000®.

Segundo o Departamento de Estruturas da Universidade de São Paulo (USP), Flexo II é um programa para o cálculo das propriedades geométricas da seção transversal de barras

com seção aberta e paredes delgadas, segundo a Teoria de Vlaslov. De acordo Fruchtengarten (s.d), na Teoria de Vlaslov, o momento de inércia à torção de seção delgadas abertas é dada por  $\sum \frac{b_i t^3}{3}$ . O *software* Flexo II® está disponível gratuitamente pela URL [https://set.eesc.usp.br/?page\\_id=237](https://set.eesc.usp.br/?page_id=237). Nesse trabalho, foi utilizado para a comparação de resultados analíticos do momento de inércia à torção de perfis de paredes finas abertas, visto que o software se limita a resolver esse tipo de seção.

De acordo com *Computers & Structures, Inc*, o SAP2000® é um software para Análise Estrutural e Dinâmica, Linear e Não-Linear por Elementos Finitos com interface gráfica 3D orientado a objetos, preparado para realizar, de forma totalmente integrada, a modelagem, análise e dimensionamento do mais vasto conjunto de situações de engenharia de estruturas. O SAP2000® é um *software* comercial que oferece, através do link <https://www.csiportugal.com/software/2/sap2000>, uma versão gratuita para teste por trinta dias.

## 2 REFERENCIAL TEÓRICO

A teoria da elasticidade é um ramo da física que estuda o comportamento de corpos sólidos quando submetidos a deformações externas. Sokolnikoff (1956) comenta que essa teoria permite analisar como os materiais respondem a forças aplicadas e como se comportam ao serem esticados, comprimidos ou torcidos.

A teoria da elasticidade é amplamente utilizada em diversas áreas, como engenharia estrutural, geotecnia, ciência dos materiais e física (TIMOSHENKO; GOODIER, 1987).

Desde os primórdios, a teoria da elasticidade tem sido objeto de pesquisa e desenvolvimento. Sokolnikoff (1956) comenta que Robert Hooke foi um dos pioneiros nesse campo, tendo enunciado a conhecida Lei de Hooke no século XVII. Segundo Hooke (1678), a deformação de um corpo é diretamente proporcional à força aplicada, desde que essa deformação esteja dentro do regime elástico do material. Essa lei é expressa matematicamente como "a tensão é igual ao produto do módulo de elasticidade pelo alongamento" (HOOKE, 1678).

Ao longo dos anos, a teoria da elasticidade evoluiu com contribuições de outros cientistas, como Leonhard Euler e Augustin-Louis Cauchy. Euler desenvolveu uma forma geral das equações de elasticidade, enquanto Cauchy estabeleceu os princípios fundamentais da mecânica dos sólidos deformáveis, incluindo a relação entre tensão e deformação (SOKOLNIKOFF, 1956).

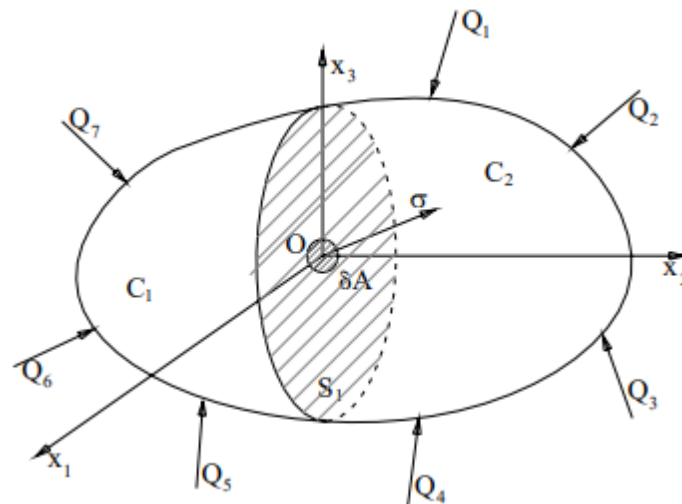
Posteriormente, a teoria da elasticidade foi enriquecida com os trabalhos de outros importantes pesquisadores, como Lord Kelvin, que introduziu a noção de tensões residuais, e William Thomson, que estudou a distribuição de tensões em estruturas. Essas contribuições foram fundamentais para o desenvolvimento e a aplicação prática da teoria da elasticidade em diversos campos da engenharia. (TIMOSHENKO, 1983)

Timoshenko e Gere (1991) afirmam que a torção de Saint-Venant é um caso particular da torção de vigas em geral. Embora a hipótese de Saint-Venant simplifique a análise, é importante ressaltar que existem situações em que a aproximação não é válida, especialmente em elementos com geometrias complexas. Nessas situações, a teoria da elasticidade oferece ferramentas mais avançadas para a análise, como a teoria da elasticidade tridimensional. (BARBER, 2010)

### 3 TEORIA DA ELASTICIDADE

Segundo Barros (2004), se ao corpo em equilíbrio estático representado na Figura 1 for aplicado um sistema de forças exteriores  $Q_i$  com  $i=1,\dots,7$  desenvolvem-se forças internas entre as possíveis partes em que o corpo se pode dividir.

Figura 1: Corpo submetido a um conjunto de forças exteriores



Fonte: Barros (2004)

A partir da intensidade dessas forças, das propriedades mecânicas do material e da geometria do corpo pode-se determinar como ocorre a deformação desse corpo.

Diz-se que um material tem comportamento elástico quando as deformações causadas por um certo carregamento desaparecem com a retirada desse carregamento (BEER; JOHNSTON, 2008).

Como descrito em Timoshenko e Goodier (1951), a Teoria da Elasticidade tem como hipóteses a elasticidade linear, homogeneidade, isotropia e continuidade da matéria.

#### 3.1 Conceito de tensão

A Figura 1, considera o corpo dividido em duas partes,  $C_1$  e  $C_2$ , por intermédio da seção  $S_1$  que contém o ponto  $O$ . Tomando-se, por exemplo, a parte  $C_1$  do corpo, pode-se afirmar que ela está em equilíbrio sob a ação das forças externas  $Q_5, Q_6, Q_7$  e das forças internas distribuídas na seção transversal  $S_1$ , que representam as ações que o material da parte  $C_2$  do corpo exerce sobre o material da parte  $C_1$  (BARROS, 2004).

A princípio, admite-se que as forças internas se distribuem uniformemente sobre a área da seção analisada, de maneira a definir o conceito fundamental de tensão, que

representam as ações que o material  $C_2$  do corpo exercia sobre o material  $C_1$  (BARROS 2004).

Assim, pode-se expressar o conceito fundamental de tensão como:

$$\tau = \frac{F}{A} \quad (1)$$

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad (2)$$

onde  $F$  e  $N$  são as forças resultantes nas direções tangencial e normal, respectivamente, ao plano de área  $A$ ,  $\tau$  é a tensão tangencial ou cisalhante e  $\sigma$  é a tensão normal.

As relações apresentadas nas equações (1) e (2) podem ser interpretadas como o valor médio das tensões na seção transversal e não o valor específico da tensão em um determinado ponto da seção transversal.

Para definir a tensão tangencial em um ponto  $P$  da seção transversal, deve-se considerar uma pequena área  $\Delta A$ , onde atua uma parcela de força  $\Delta F$ . Ao dividir a força pela área  $\Delta A$ , obtém-se o valor médio da tensão em  $\Delta A$ . Quando  $\Delta A$  tende a zero, obtém-se a tensão no ponto  $P$ :

$$\tau = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} \quad (3)$$

De maneira análoga, define-se a tensão normal em um ponto  $P$  como:

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta A} \quad (4)$$

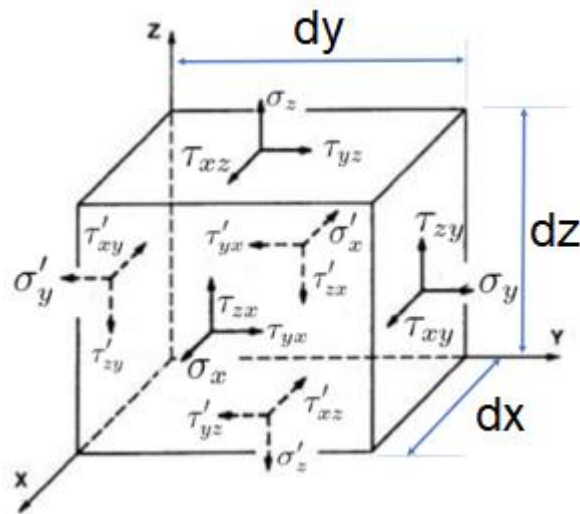
### 3.2 Equações diferenciais de equilíbrio

Para um corpo rígido permanecer em equilíbrio estático, é necessário que a soma das forças externas atuantes no corpo seja igual a zero e a soma dos momentos as forças externas em relação a um ponto também seja igual a zero.

Na Figura 2, é apresentada uma parte infinitesimal de um corpo sólido, como o mostrado na Figura 1, no qual atua tensões normais e tangenciais sobre sua superfície. Essa parte infinitesimal é representada na forma de um paralelepípedo de volume  $dV = dx \cdot dy \cdot dz$



Figura 2: Paralelepípedo infinitesimal submetido a múltiplas tensões



Fonte: Adaptado de Moraes (2014)

De acordo com Silva (2005), para que o sólido se mantenha em equilíbrio estático, ocorrem acréscimos de tensões nas faces do paralelepípedo. Os acréscimos de tensões representam a variação da tensão de uma face em relação a face oposta, conforme o conjunto de equações a seguir:

$$\begin{aligned}
 \partial\sigma_x &= \sigma_x - \sigma'_x \\
 \partial\sigma_y &= \sigma_y - \sigma'_y \\
 \partial\sigma_z &= \sigma_z - \sigma'_z \\
 \partial\tau_{xy} &= \tau_{xy} - \tau'_{xy} \\
 \partial\tau_{yx} &= \tau_{yx} - \tau'_{yx} \\
 \partial\tau_{xz} &= \tau_{xz} - \tau'_{xz} \\
 \partial\tau_{zx} &= \tau_{zx} - \tau'_{zx} \\
 \partial\tau_{zy} &= \tau_{zy} - \tau'_{zy} \\
 \partial\tau_{yz} &= \tau_{yz} - \tau'_{yz}
 \end{aligned} \tag{5}$$

Timoshenko e Goodier (1951) consideram a atuação de forças por unidade de volume do corpo (forças de volume) denotadas por  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ . Estas últimas atuam nos sentidos positivos aos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente. Pelo equilíbrio das forças na direção  $z$ , é obtida a seguinte equação:

$$[\sigma_z - \sigma'_z]dxdy + [\tau_{zy} - \tau'_{zy}]dxdz + [\tau_{zx} - \tau'_{zx}]dydz + Z \cdot dx \cdot dy \cdot dz = 0 \quad (6)$$

Os resultados das equações (5) aplicadas na equação (6), fornecem:

$$[\partial\sigma_z] \cdot dxdy + [\partial\tau_{zy}] \cdot dxdz + [\partial\tau_{zx}] \cdot dydz + Z \cdot dx \cdot dy \cdot dz = 0 \quad (7)$$

Dividindo-se (7) pelo volume do corpo  $dx \cdot dy \cdot dz$ , tem-se:

$$\frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x} + Z = 0 \quad (8)$$

Utilizando o mesmo procedimento das equações (6), (7) e (8), obtém-se as equações (9) e (10) realizando-se o equilíbrio de forças nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente:

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z} + X = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0 \quad (10)$$

Para os desenvolvimentos que seguem, será admitido, por hipótese, que não existem forças de volume no sólido. O equilíbrio dos momentos na direção  $z$  das forças externas atuantes no paralelepípedo, da Figura 2, em relação a origem dos eixos fornece:

$$\begin{aligned} \sigma_y dzdx \cdot \frac{dx}{2} - \sigma'_y dzdx \cdot \frac{dx}{2} - \sigma_x dzdy \cdot \frac{dy}{2} + \sigma'_x dzdy \cdot \frac{dy}{2} \\ - \tau_{xy} dxdzdy + \tau_{yx} dydzdx + \tau_{yz} dydx \frac{dx}{2} - \tau'_{yz} dydx \frac{dx}{2} = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Simplificando a equação (11), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[\sigma_y - \sigma'_y]dz(dx)^2 - \frac{1}{2}[\sigma_x - \sigma'_x]dz(dy)^2 + [\tau_{yx} - \tau_{xy}]dxdydz \\ + \frac{1}{2}[\tau_{yz} - \tau'_{yz}]dy(dx)^2 = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

Dividindo (12) por  $dV = dxdydz$ , consegue-se:

$$\frac{1}{2}[\sigma_y - \sigma'_y]\frac{\partial x}{\partial y} - \frac{1}{2}[\sigma_x - \sigma'_x]\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{1}{2}[\tau_{yz} - \tau'_{yz}]\frac{\partial x}{\partial z} + [\tau_{yx} - \tau_{xy}] = 0 \quad (13)$$

Sendo  $x$ ,  $y$  e  $z$  variáveis independentes entre si, conclui-se que  $\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial z} = 0$ , então a equação (13) demonstra que:

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} \quad (14)$$

De maneira análoga, ao calcular-se o equilíbrio de momentos nas direções  $x$  e  $y$  em relação a algum ponto do corpo infinitesimal da Figura 2, são obtidos os resultados das equações (15) e (16).

$$\tau_{zy} = \tau_{yz} \quad (15)$$

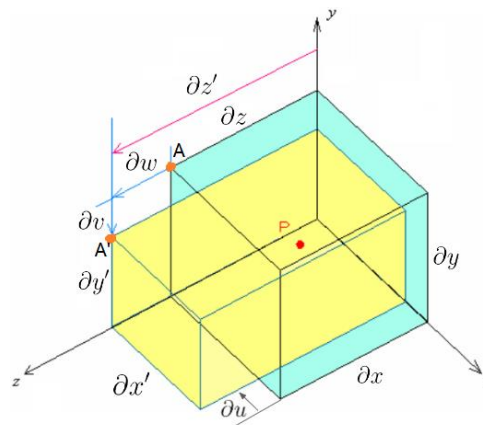
$$\tau_{zx} = \tau_{xz} \quad (16)$$

Das equações (14), (15) e (16) pode-se concluir que as tensões de cisalhamento atuantes em faces ortogonais são iguais (SILVA, 2005).

### 3.3 Deformações no sólido e Lei de Hooke

A Figura 3 apresenta um paralelepípedo de volume inicial  $dV = dx \cdot dy \cdot dz$ , centrado em  $P$ , que se alonga na direção  $z$  e se encurta nas demais direções. O paralelepípedo possui comprimento longitudinal inicial  $\partial z$  que sofre uma variação de comprimento  $\partial w$  e passa a medir  $\partial z'$ . O alongamento ou contração de um segmento de reta por unidade de comprimento é denominado deformação normal. (HIBBELER, 2005).

Figura 3: Deslocamento infinitesimais do corpo



Fonte: Adaptado de Silva (2005)

Com base na Figura 3, os deslocamentos infinitesimais de  $P$  podem ser equacionados da seguinte maneira:

$$\partial w = \partial z' - \partial z \quad (17.a)$$

$$\partial v = \partial y' - \partial y \quad (17.b)$$

$$\partial u = \partial x' - \partial x \quad (17.c)$$

O deslocamento é positivo quando ocorre alongamento, e negativo quando ocorre encurtamento (SILVA, 2005).

Timoshenko e Goodier (1951) equacionam as deformações normais como:

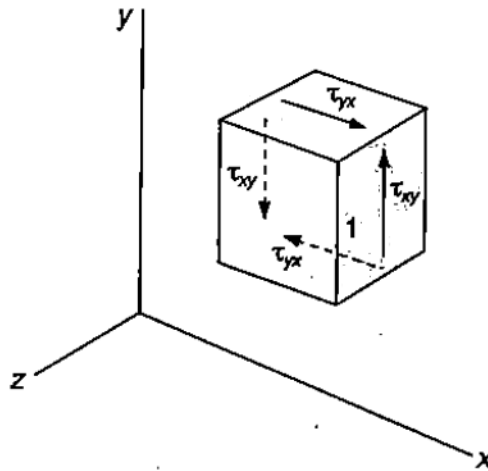
$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (18.a)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (18.b)$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (18.c)$$

Como descrito em Hibbeler (2005), a mudança de ângulo ocorrida entre dois segmentos de reta originalmente perpendiculares entre si como deformação por cisalhamento. Um cubo elementar de lado unitário sujeito apenas a  $\tau_{xy}$  e  $\tau_{yx}$ , aplicadas as faces do cubo, perpendiculares, respectivamente, aos eixos  $x$  e  $y$  se deforma assumindo a forma de um paralelepípedo oblíquo. A Figura 4 mostra um cubo elementar de sujeita as tensões  $\tau_{xy}$  e  $\tau_{yx}$ .

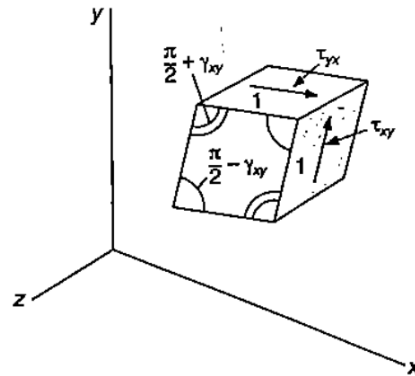
Figura 4: Cubo sujeito a tensões  $\tau_{yx}$  e  $\tau_{xy}$ , antes de deformar



Fonte: Beer e Johnston (2008)

A figura 5 mostra que dois dos ângulos formados pelas 4 faces do cubo que estão sob tensão se reduzem para  $\frac{\pi}{2} - \gamma_{xy}$ , enquanto os outros dois aumentam para  $\frac{\pi}{2} + \gamma_{xy}$ .

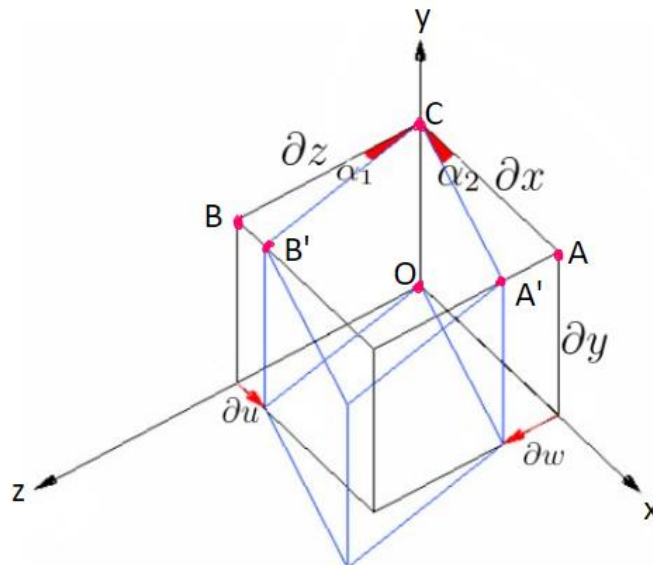
Figura 5: Cubo, sujeito às tensões  $\tau_{yx}$  e  $\tau_{xy}$ , após a deformação



Fonte: Beer e Johnston (2008)

A Figura 6 considera o paralelepípedo infinitesimal de volume  $dx \cdot dy \cdot dz$  da Figura 2 quando sujeita somente às tensões  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{zx}$ , que provocam deformações nas faces contidas no plano  $xz$ .

Figura 6: Sólido infinitesimal com deformações na face contida no plano  $xz$



Fonte: Adaptado de Silva (2005)

A Figura 6 demonstra que a deformação para o cisalhamento  $\gamma_{xz}$  é dada soma dos ângulos  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ . A figura 6 mostra que após a aplicação das tensões o ponto A se desloca para A', enquanto B se desloca para B'. O segmento de reta AA' evidencia um deslocamento  $\partial w$  na direção do eixo  $z$ , enquanto o segmento BB' evidencia um deslocamento  $\partial u$  na direção do eixo  $x$ . Ao observar os triângulos CAA' e CBB', nota-se, respectivamente:

$$\tan(\alpha_2) = \frac{\partial w}{\partial x} \quad (19)$$

$$\tan(\alpha_1) = \frac{\partial u}{\partial z} \quad (20)$$

Segundo Hibbeler (2005, p. 54) “A maioria dos problemas de engenharia envolve aplicações para as quais são permitidas apenas pequenas deformações”. A análise de pequenas deformações permite aproximações como  $\tan(\kappa) \approx \sin(\kappa) \approx \kappa$  e  $\cos(\kappa) \approx 1$ , desde que  $\kappa$  seja muito pequeno. Das equações (19) e (20), tem-se:

$$\alpha_2 \approx \frac{\partial w}{\partial x} \quad (21)$$

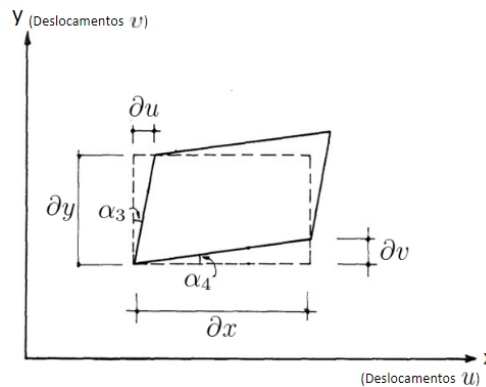
$$\alpha_1 \approx \frac{\partial u}{\partial z} \quad (22)$$

A partir disso, é possível afirmar que:

$$\gamma_{xz} \approx \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad (23)$$

Na Figura 7 é mostrado a face de um paralelepípedo infinitesimal sobre o plano  $xy$ , quando este é deformado devido as tensões  $\tau_{xy}$  e  $\tau_{yx}$ .

Figura 7: Deformações na face de um sólido infinitesimal em relação ao plano  $xy$



Fonte: Adaptado de Mori (2003)

Utilizando a hipótese das pequenas deformações, a Figura 7 indica que:

$$\alpha_3 \approx \frac{\partial u}{\partial y} \quad (24)$$

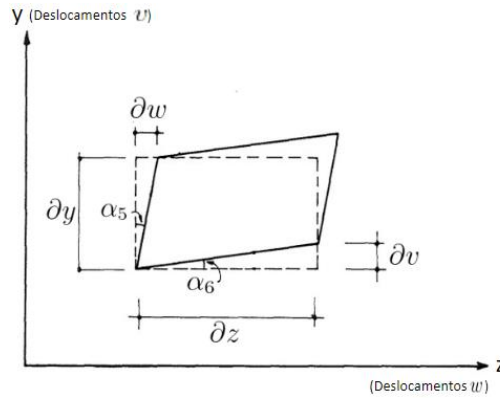
$$\alpha_4 \approx \frac{\partial v}{\partial x} \quad (25)$$

Ao somar os ângulos  $\alpha_3$  e  $\alpha_4$ , obtém-se a deformação angular  $\gamma_{xy}$  como:

$$\gamma_{xy} \approx \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (26)$$

A face de um paralelepípedo infinitesimal sobre o plano  $yz$  deforma conforme a figura 8 quando o submetem a tensões  $\tau_{yz}$  e  $\tau_{zy}$ .

Figura 8: Deformações na face de um sólido infinitesimal em relação ao plano  $yz$



Fonte: Adaptado de Mori (2003)

De maneira análoga a Equação (26), se equaciona  $\gamma_{zy}$ :

$$\gamma_{zy} \approx \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \quad (27)$$

A relação entre os componentes de tensão e os componentes de deformação foi estabelecida experimentalmente e denominada Lei de Hooke (TIMOSHENKO; GOODIER, 1951). Os experimentos demonstraram que no caso de um material isotrópico:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad (28.a)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \quad (28.b)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad (28.c)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (28.d)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \quad (28.e)$$

$$\gamma_{zy} = \frac{\tau_{zy}}{G} \quad (28.f)$$

Onde:  $E$  é o Módulo de Elasticidade Longitudinal do material

$G$  é o Módulo de Elasticidade Transversal do material

$\nu$  é o coeficiente de Poisson do material

#### 4 TORÇÃO DE SAINT-VENANT

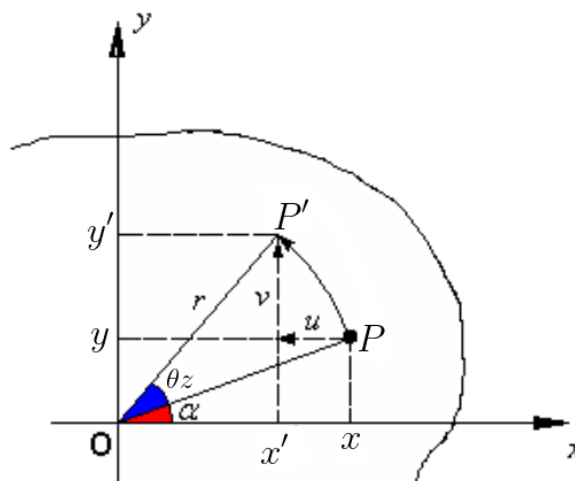
De acordo com Hillesheim (2013), o problema de torção em eixos circulares é simples, uma vez que todas as suas seções transversais permanecem planas e sem empenamento ao se deformar, e que a distribuição de tensão varia linearmente conforme a distância radial, em relação ao eixo longitudinal da barra, aumenta. Essa propriedade dos eixos circulares, não se apresenta em peças de seção transversal não circular (BEER; JOHNSTON, 2008).

Segundo Timoshenko e Goodier (1951), a solução do problema de torção em barras prismáticas foi desenvolvido por Saint-Venant através do Método Semi-Inverso, onde ele assume que a seção transversal da barra rotaciona igual a um eixo circular e que essas empenam na direção do eixo.

Mori (2003) explica que as condições para uso da solução do problema de torção estabelecido por Saint-Venant são:

- 1) A seção transversal da barra deve ser constante ao longo eixo longitudinal.
- 2) O torque solicitante deve ser constante (uniforme) ao longo do eixo longitudinal.
- 3) A barra não deve possuir vínculos que impeçam deslocamentos longitudinais.
- 4) O giro de uma seção qualquer, a uma distância  $z$  em relação a uma seção de referência é  $\theta z$ .

Figura 9: Deslocamentos Transversais



Fonte: Adaptado de Silva (2005)

Da Figura 9, nota-se que após o giro da seção, o ponto  $P$  se desloca para o ponto  $P'$ . Silva (2005) observa que as coordenadas dos pontos  $P$  e  $P'$  valem:

$$x = r \cdot \cos \alpha \quad (29.a)$$



$$y = r \cdot \sin \alpha \quad (29.b)$$

$$x' = r \cdot \cos(\alpha + \theta z) \quad (29.c)$$

$$y' = r \cdot \sin(\alpha + \theta z) \quad (29.d)$$

Onde:

$\theta$  é a rotação específica constante (PIMENTA, 2006)

$z$  é a distância longitudinal a partir de um ponto de origem

De maneira análoga a equação (17), os deslocamentos  $u$  e  $v$ , da Figura 9, podem ser expressos da seguinte forma:

$$u = x' - x = r \cdot \cos(\alpha + \theta z) - r \cdot \cos \alpha \quad (30.a)$$

$$= r \cdot [\cos \alpha \cdot \cos \theta z - \sin \alpha \cdot \sin \theta z] - r \cdot \cos \alpha$$

$$v = y' - y = r \cdot \sin(\alpha + \theta z) - r \cdot \sin \alpha \quad (30.b)$$

$$= r \cdot [\cos \alpha \cdot \sin \theta z + \sin \alpha \cdot \cos \theta z] - r \cdot \sin \alpha$$

Considerando as relações (29.a) e (29.b), e a hipótese das pequenas deformações em que  $\sin \theta z \approx \theta z$  e  $\cos \theta z \approx 1$ , as equações 30.a e 30.b se simplificam em:

$$u \approx -(r \cdot \sin \alpha) \cdot \theta z = -\theta z y \quad (31.a)$$

$$v \approx (r \cdot \cos \alpha) \cdot \theta z = \theta z x \quad (31.b)$$

Além disso, “Saint-Venant observou também que o empenamento era semelhante em todas as seções e que sua intensidade era proporcional à rotação específica” (PIMENTA, 2006, p. 234).

Pimenta (2006) apresenta  $\psi(x, y)$  como a função de empenamento de Saint-Venant, de maneira a descrever o deslocamento longitudinal da seção por:

$$w = \theta \psi(x, y) \quad (32)$$

Substituindo as expressões (31) e (32) nas equações (18), tem-se:

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} [\theta \cdot \psi(x, y)] = 0 \quad (33.a)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} [\theta \cdot z x] = 0 \quad (33.b)$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [-\theta z y] = 0 \quad (33.c)$$

Aplicando as expressões (31) e (32) nas equações (23), (26) e (27), desenvolve-se:

$$\gamma_{xz} \approx \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} [\theta\psi(x, y)] + \frac{\partial}{\partial z} [-\theta zy] = \theta \frac{\partial \psi}{\partial x} - \theta y \quad (34.a)$$

$$\gamma_{zy} \approx \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} [\theta\psi(x, y)] + \frac{\partial}{\partial z} [\theta zx] = \theta \frac{\partial \psi}{\partial y} + \theta x \quad (34.b)$$

$$\gamma_{xy} \approx \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} [-\theta zy] + \frac{\partial}{\partial x} [\theta zx] = -\theta z + \theta z = 0 \quad (34.c)$$

As equações (33) e (34.c) mostram que em um problema de torção de Saint-Venant,  $\varepsilon_z = \varepsilon_y = \varepsilon_x = \gamma_{xy} = 0$  e consequentemente, pelas equações (28), obtêm-se o seguinte sistema de equações:

$$\frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] = 0 \quad (35.a)$$

$$\frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] = 0 \quad (35.b)$$

$$\frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = 0 \quad (35.c)$$

$$\frac{\tau_{xy}}{G} = 0 \quad (35.d)$$

O sistema de equações (35) tem como solução:  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$ .

As equações (34.a) e (34.b) podem ser simplificadas em:

$$\gamma_{xz} = \theta \left[ \frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right] \quad (36.a)$$

$$\gamma_{zy} = \theta \left[ \frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right] \quad (36.b)$$

A expressão (29) quando aplicadas as equações (36), resulta em:

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz} = G\theta \left[ \frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right] \quad (37.a)$$

$$\tau_{zy} = G\gamma_{zy} = G\theta \left[ \frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right] \quad (37.b)$$

Deriva-se parcialmente as equações (37) com respeito as variáveis  $x$ ,  $y$  e  $z$  para se obter as expressões (38)

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (38.a)$$

$$\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0 \quad (38.b)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = G\theta \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - 1 \right) \quad (38.c)$$

$$\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial x} = G\theta \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} + 1 \right) \quad (38.d)$$

$$\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = G\theta \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \quad (38.e)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = G\theta \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (38.f)$$

Os resultados das equações (35), (38.a) e (38.b), somado a hipótese de que não há forças de volume no sólido, satisfazem as equações (9) e (10) de equilíbrio de forças nas direções  $x$  e  $y$ , enquanto a equação (8) é reduzida para:

$$\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} = 0 \quad (39)$$

Somando as equações (38.e) e (38.f), obtém-se

$$\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} = G\theta \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + G\theta \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (40)$$

O termo a esquerda da equação (40) é nulo devido a equação (39) e, portanto, vale:

$$G\theta \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right] = 0 \quad (41)$$

Sendo  $G$  e  $\theta$ , constantes diferentes de zero, resulta da equação (41) a seguinte relação:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0 \quad (42)$$

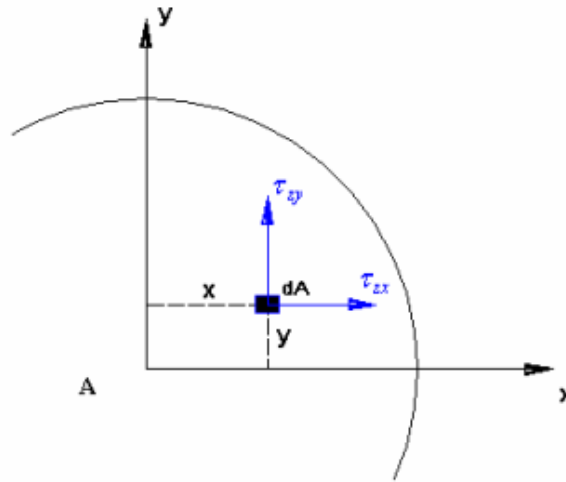
Do Carmo (2010), destaca que o Laplaciano  $\Delta f$  de uma função diferenciável  $f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  se define por  $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ ,  $(x, y) \in U$  e diz-se que  $f$  é harmônica em  $U$  se  $\Delta f = 0$ . Dessa forma, vê-se através de (42) que a função de empenamento é uma função harmônica e deve satisfazer tal condição.

#### 4.1 Momento de Inércia à Torção

As formulações anteriores mostram que sobre uma barra prismática sujeita a torção de Saint-Venant agem tensões  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$ , enquanto as demais tensões são nulas. Seja a figura 9, a representação de uma seção transversal de formato qualquer onde as tensões tangenciais  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$  sobre um elemento infinitesimal de área  $dA$ .

Com base na equação (3) e na Figura 10, é possível definir duas forças infinitesimais,  $\tau_{zy}dA$  e  $\tau_{zx}dA$ , nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente.

Figura 10: Tensões Cisalhantes



Fonte: Silva (2005)

Sadd (2014) aponta que as condições de equilíbrio se satisfazem, quando as forças resultantes da distribuição de tensões se anulam e a resultante de momento destas se iguala ao momento torsor  $M_z$ . Desta maneira:

$$M_z = \int_A (x\tau_{yz} - y\tau_{xz})dA \quad (43)$$

Ao se aplicar (37.a) e (37.b) em (43), tem-se:

$$M_z = \int_A \left[ x \cdot G\theta \left( \frac{\partial\psi}{\partial y} + x \right) - y \cdot G\theta \left( \frac{\partial\psi}{\partial x} - y \right) \right] dA \quad (44)$$

A equação (44) pode ser reescrita como:

$$M_z = G\theta \int_A \left[ x \frac{\partial\psi}{\partial y} - y \frac{\partial\psi}{\partial x} \right] dA + G\theta \int_A [x^2 + y^2] dA \quad (45)$$

Dividindo os dois lados da equação (45) por  $G\theta$ :

$$\frac{M_z}{G\theta} = \int_A \left[ x \frac{\partial\psi}{\partial y} - y \frac{\partial\psi}{\partial x} \right] dA + \int_A [x^2 + y^2] dA \quad (46)$$

Segundo Silva (2005), a primeira integral em (46) é denotada  $I_\psi$ . A Segunda integral da expressão (46) é o momento polar de inércia  $J$  (HIBBELER, 2005). A soma dessas integrais define o momento de Inércia à Torção da seção  $I_T$  (SILVA, 2005). Logo:

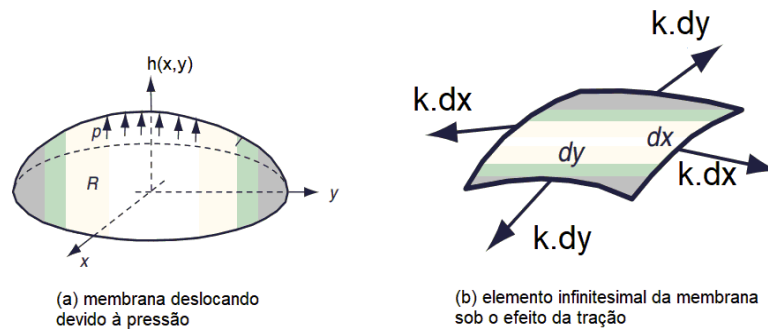
$$\frac{M_z}{G\theta} = I_T = I_\psi + J \quad (47)$$

## 4.2 Analogia de Membrana

Beer e Johnston (2008) descrevem que uma membrana elástica e homogênea, quando submetida a uma pressão uniforme  $p$  em uma de suas faces sofre deformações que podem ser determinadas pela solução de equações diferenciais parciais. Um esforço de tração  $k$  aparece ao longo do comprimento do contorno da membrana quando essa é submetida à pressão  $p$  (PROENÇA, 2018).

De acordo com Proença (2018), na analogia de membrana, a membrana deve ser uma lâmina fina de contorno fixo, rigidez nula na direção transversal e deve resistir somente a esforços de tração. Considerando isso, a Figura 11 mostra uma membrana disposta sobre o plano  $xy$ , onde se nota o esforço de tração  $k$  nos contornos de uma região infinitesimal  $dxdy$  da membrana quando sobre esta é aplicado uma pressão  $p$ .

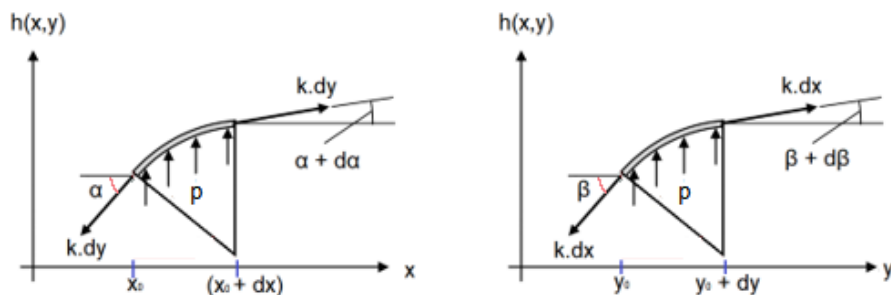
Figura 11: Membrana sob pressão



Fonte: Adaptado de Sadd (2014)

A Figura 12 mostra uma região  $dxdy$  da membrana, vista sobre os planos laterais,  $xh$  e  $yh$ , localizado em um ponto  $(x_0, y_0)$  qualquer.

Figura 12: Vistas laterais da membrana



Fonte: Adaptado de Sadd, 2014

Pela, figura 12, ao realizar-se o somatório das forças verticais, tem-se:

$$p\partial x\partial y - k \cdot \partial y \cdot \sin(\alpha) + k \cdot \partial y \cdot \sin(\alpha + \partial\alpha) - k \cdot \partial x \cdot \sin\beta + k \cdot \partial x \cdot \sin(\beta + \partial\beta) = 0 \quad (48)$$

Considerando pequenas deformações, seno dos ângulos tem valor próximo aos próprios ângulos, logo (48) pode ser reescrita como:

$$p\partial x\partial y - k \cdot \partial y \cdot \alpha + k \cdot \partial y \cdot (\alpha + \partial\alpha) - k \cdot \partial x \cdot \beta + k \cdot \partial x \cdot (\beta + \partial\beta) = 0 \quad (49)$$

Simplificando (49) e isolando  $p$ , tem-se

$$p = -k \frac{\partial\alpha}{\partial x} - k \frac{\partial\beta}{\partial y} \quad (50)$$

Sadd (2014) mostra  $\alpha$  e  $\beta$  como as inclinações das retas tangentes à membrana e portanto:

$$\alpha \approx \tan(\alpha) = \frac{\partial h}{\partial x} \quad (51.a)$$

$$\beta \approx \tan\beta = \frac{\partial h}{\partial y} \quad (51.b)$$

Dividindo os dois lados de (50) por  $-k$  e aplicando os resultados (51), tem-se:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = -\frac{p}{k} \quad (52)$$

Ao determinar a diferença entre (38.c) e (38.d), obtém-se:

$$\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial x} - \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial y} = G\theta \left[ \frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial x} + 1 \right] - G\theta \left[ \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} - 1 \right] \quad (53)$$

De acordo como o teorema de Schwarz, seja  $f: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  aberto e  $f$  de classe  $C^2$  em  $A$ , então  $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$  para todo  $(x, y) \in A$  (GUIDORIZZI, 2008). Por hipótese, assume-se que  $\psi$  é de classe  $C^2$  e, portanto, vale  $\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial x}$ . Logo a equação (53) se simplifica em:

$$\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial x} - \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial y} = 2G\theta \quad (54)$$

Pela equação (54), vê-se o desaparecimento da função  $\psi$ , o que simplifica o problema, porém, por outro lado, a equação (54) se torna uma equação diferencial de duas funções

incógnitas,  $\tau_{zy}$  e  $\tau_{xz}$ . Timoshenko e Goodier (1951) definem  $\phi$  como função de tensão, tal que:

$$\tau_{zy} = -\frac{\partial\phi}{\partial x} \quad (55.a)$$

$$\tau_{xy} = \frac{\partial\phi}{\partial y} \quad (55.b)$$

Aplicando (55.a) e (55.b) em (54), vê-se que a equação diferencial parcial (54) se tornar uma equação de uma única função incógnita.

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = -2G\theta \quad (56)$$

Multiplicando os dois lados de (56) por  $\frac{p}{2G\theta k}$ , é obtido (57).

$$\frac{p}{2G\theta k} \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{p}{2G\theta k} \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = -\frac{p}{k} \quad (57)$$

Utilizando as propriedades de derivadas de funções, tem-se:

$$\frac{p}{2G\theta k} \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{p\phi}{2G\theta k} \right) \quad (58.a)$$

$$\frac{p}{2G\theta k} \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{p\phi}{2G\theta k} \right) \quad (58.b)$$

Pelos resultados de (58), (57) reescreve-se como:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{p\phi}{2G\theta k} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{p\phi}{2G\theta k} \right) = -\frac{p}{k} \quad (59)$$

Comparando as equações (52) e (59), conclui-se que  $h = \frac{p\phi}{2G\theta k}$  e, portanto:

$$\phi(x, y) = \frac{2G\theta k}{p} h(x, y) \quad (60)$$

Aplicando as definições (55) em (43), obtém-se:

$$M_z = \int_A \left[ x \left( -\frac{\partial\phi}{\partial x} \right) - y \left( \frac{\partial\phi}{\partial y} \right) \right] dA \quad (61)$$

Utilizando as propriedades da derivada para produtos de funções, obtêm-se a derivada parcial de  $x\phi$  com respeito a variável  $x$  e a derivada parcial de  $y\phi$  com respeito a  $y$  nas expressões (62.a) e (62.b).

$$\frac{\partial(-x\phi)}{\partial x} = -x \frac{\partial\phi}{\partial x} - \phi \quad (62.a)$$

$$\frac{\partial(y\phi)}{\partial y} = y \frac{\partial\phi}{\partial y} + \phi \quad (62.b)$$

Ao se isolar os termos  $x \frac{\partial\phi}{\partial x}$  e  $-y \frac{\partial\phi}{\partial y}$  das equações (62), garante-se:

$$x \frac{\partial\phi}{\partial x} = -\frac{\partial(-x\phi)}{\partial x} - \phi \quad (63.a)$$

$$y \frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial(y\phi)}{\partial y} - \phi \quad (63.b)$$

Aplica-se à (61) os resultados de (63), e usando propriedades de soma de integrais, reescreve-se  $M_z$  como:

$$M_z = \int_A \left[ \frac{\partial(-x\phi)}{\partial x} - \frac{\partial(y\phi)}{\partial y} \right] dA + \int_A 2\phi dA \quad (64)$$

O teorema de Green estabelece uma relação entre uma integral de linha sobre uma curva fechada simples  $C$  e uma integral dupla na região  $D$  delimitada por  $C$ . (VALLE, s.d.). Além disso:

Seja  $C$  uma curva plana simples, fechada, contínua por partes, orientada positivamente e seja  $D$  a região delimitada por  $C$ . Se  $P$  e  $Q$  tem derivadas parciais de primeira ordem contínuas sobre uma região aberta que contém  $D$ , então  $\int_C Pdx + Qdy = \int_A \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$ . (VALLE, s.d.)

A curva plana, denotada  $\partial A$ , que delimita a região da Figura 9 é o bordo da área  $A$ . Pelo teorema de Green:

$$\int_{\partial A} Pdx + Qdy = \int_A \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \quad (65)$$

Ao se comparar a primeira integral de (64) com a integral de área do teorema de Green em (65), pode-se tomar:

$$Q = -x\phi \quad (66.a)$$

$$P = y\phi \quad (66.b)$$

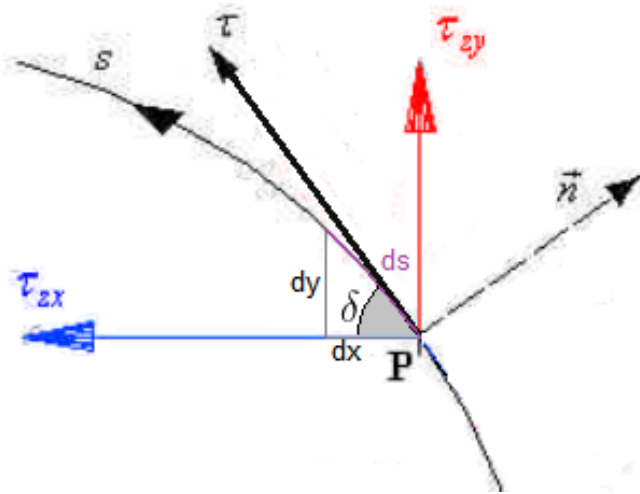
Utilizando o teorema de Green, a primeira integral de (64) reescreve-se como uma integral de linha que atua sobre o bordo  $\partial A$ :



$$\int_A \left[ \frac{\partial(-x\phi)}{\partial x} - \frac{\partial(y\phi)}{\partial y} \right] dA = \int_{\partial A} y\phi dx - x\phi dy \quad (67)$$

Para solucionar a integral à direita da igualdade em (67), é sabido que devido a existência de duas componentes de tensão ( $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$ ) pode-se associar um vetor tensão de cisalhamento resultante  $\vec{\tau}$  que, no bordo, é tangente ao contorno da seção (PROENÇA, 2018). A Figura 13 representa o contorno de uma seção transversal arbitrária. Considera-se um versor  $\vec{n}$ , normal ao contorno, e sendo o vetor resultante  $\vec{\tau}$  tangente a esse contorno, então  $\vec{\tau}$  é ortogonal à  $\vec{n}$ .

Figura 13: Contorno de uma seção transversal



Fonte: Adaptado de Silva (2005)

Da Figura 13, tem-se:

$$\cos \delta = \frac{dy}{ds} \quad (68.a)$$

$$\sin \delta = \frac{dx}{ds} \quad (68.b)$$

Dois vetores são ortogonais se o produto escalar entre eles é igual zero (SPEROTTO; DE FREITAS, 2017). A partir disso, tem-se:

$$\vec{\tau} \cdot \vec{n} = 0 \quad (69.a)$$

$$(-\tau_{xz}, \tau_{yz}) \cdot (\cos \delta, \sin \delta) = 0 \quad (69.b)$$

$$-\tau_{xz} \cdot \cos \delta + \tau_{yz} \cdot \sin \delta = 0 \quad (69.c)$$

Substituindo as expressões (55) e (68) em (69.c):

$$-\frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{ds} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} = 0 \quad (70)$$

Sejam  $f: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  aberto, e  $(x(s), y(s)): I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , tais que  $(x, y) \in A$  para todo  $s$  no intervalo  $I$ , sendo  $(x, y)$  diferenciável em  $s$  e  $f$  em  $(x, y)$ , então a função composta  $F(s) = f(x, y)$  será diferenciável em  $s$  e vale  $\frac{dF}{ds} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{ds}$  (GUIDORIZZI, 2008).

De (70), tem-se  $\frac{d\phi}{ds} = 0$ , que significa dizer que a função de tensão é invariante no bordo e, portanto,  $\phi$  é constante nesse contorno. Essa constante pode ser escolhida de maneira arbitrária (TIMOSHENKO; GOODIER, 1951). Ao se escolher  $\phi = 0$ , a integral (61) resulta em valor nulo e, por isso, a equação (64) se resume a:

$$M_z = 2 \int_A \phi dA \quad (71)$$

Ao substituir (60) em (71), tem-se

$$M_z = \frac{4G\theta k}{p} \int_A h dA \quad (72)$$

Na equação (72), Proença (2018) afirma que o termo  $h dA$  é o elemento de volume da membrana quando deslocada, ao dividir os dois lados de (72) por  $G\theta$ , obtêm-se:

$$\frac{M_z}{G\theta} = \frac{4k}{p} \int_A dV_0 \quad (73)$$

Em (73), o termo a esquerda da igualdade é o Momento de Inércia à Torção, conforme mostrado em (47). Pela analogia de membrana, o momento de inércia à torção de uma seção pode ser determinado a partir do volume assumido por uma membrana, de mesma seção, quando esta é deslocada devido a uma pressão. O momento de inércia a torção pode ser definido por:

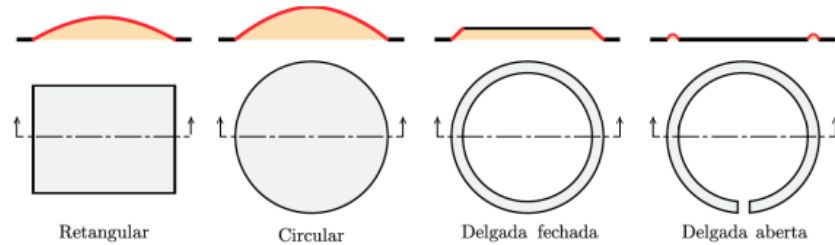
$$I_T = \frac{4k}{p} V_0 \quad (74)$$

### 4.3 Momento de inércia à torção de seções não-circulares de paredes finas

Neto e Costa (2016) afirmam que, pela analogia da membrana, quando fixada a pressão, seções com maiores volumes sob a membrana são mais resistentes à torção. Isso pode ser constatado pela expressão (74).

A Figura 14 mostra como ocorre a deformação de membranas de seções usuais quando submetida a uma pressão uniforme.

Figura 14: Deformação de membrana com seções usuais



Fonte: Neto e Costa (2016)

Mori (2003) define uma seção de paredes finas ou delgadas, quando as dimensões de uma barra atendem, de maneira geral as relações a seguir:

$$\frac{t}{d} \leq 0,1 \quad (75.a)$$

$$\frac{t}{L} \leq 0,1 \quad (75.b)$$

Das expressões (75),  $t$  é comprimento da espessura da seção,  $d$  é a dimensão característica da seção transversal e  $L$  é o comprimento longitudinal da barra. Além disso:

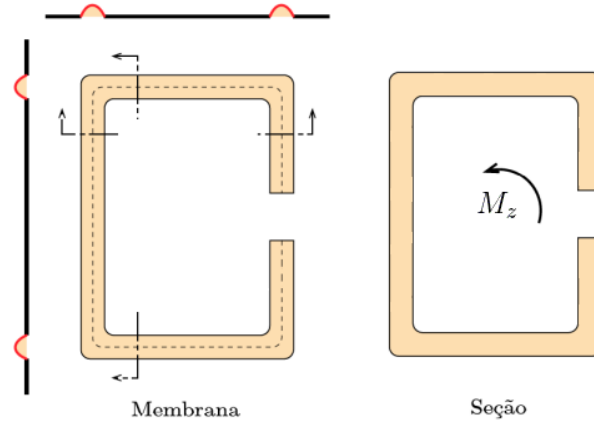
As seções delgadas são classificadas em abertas ou fechadas. As seções fechadas podem apresentar ou não ramificações. Os perfis correspondentes são geralmente metálicos e podem ser laminados, dobrados a frio (chapa dobrada), soldadas (chapas soldadas) ou obtidos por extrusão. (NETO; COSTA, 2016).

#### 4.3.1 Seção de paredes finas abertas

Neto e Costa (2016) afirmam que as paredes de uma seção delgada aberta podem ser retificadas sem que isso altere o comportamento à torção devido as inclinações e volumes praticamente se manterem.

Uma membrana com seção delgada, quando submetida a uma pressão, desloca na forma de uma parábola (PROENÇA, 2018). A Figura 15 mostra a forma parabólica da membrana.

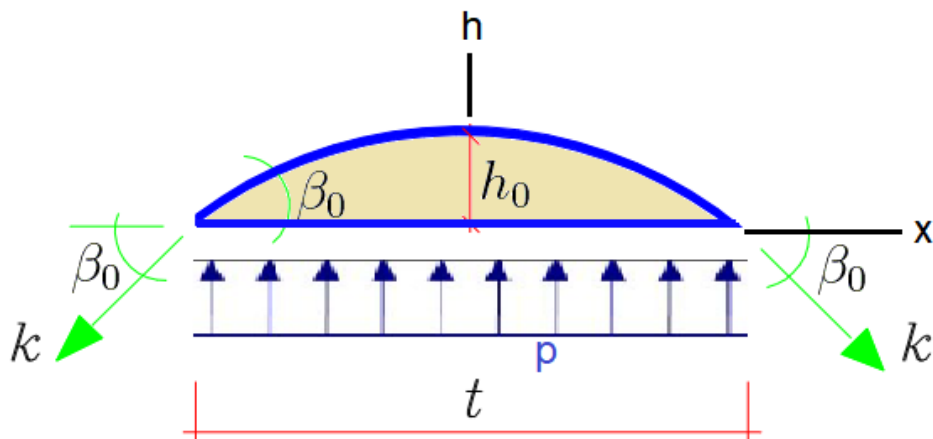
Figura 15: Deslocamento de membrana de uma seção delgada aberta



Fonte: Adaptada de Neto e Costa (2016)

A Figura 16, mostra a membrana submetida a uma pressão uniforme  $p$  e a tração  $k$  que surge nas bordas da membrana, que assume a forma de uma parábola de altura  $h_0$  e base  $t$ , sendo o comprimento da espessura da seção.

Figura 16: Membrana de seção delgada aberta em forma de parábola



Fonte: Adaptado de Proença (2018)

Se a altura  $h$  descreve uma parábola, ao se fixar um referencial no meio da parábola, tem-se:

$$h(x) = ax^2 + bx + c \quad (76)$$

Aplicando as condições  $h\left(-\frac{t}{2}\right) = 0$ ,  $h(0) = h_0$  e  $h\left(\frac{t}{2}\right) = 0$ , determina-se os coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$ . A equação (76) se reescreve em (77).

$$h(x) = \frac{-4h_0}{t^2}x^2 + h_0 \quad (77)$$

Derivando  $h(x)$  com respeito a  $x$ , tem-se:

$$h'(x) = \frac{-8h_0}{t^2} x \quad (78)$$

O ângulo  $\beta_0$ , devido a consideração de pequenas deformações, é aproximadamente  $h'(x)$  aplicada em  $x = -\frac{t}{2}$ . A partir disso, obtém-se:

$$\beta_0 \approx h' \left( -\frac{t}{2} \right) = \frac{4h_0}{t} \quad (79)$$

Realizando-se o equilíbrio das forças verticais, tem-se:

$$p \cdot t - 2 \cdot k \cdot \text{sen}\beta_0 = 0 \quad (80)$$

Ao se considerar pequenas deformações, faz-se  $\text{sen}\beta_0 \approx \beta_0$  e, portanto:

$$p \cdot t - 2 \cdot k \cdot \beta_0 = 0 \quad (81)$$

Substituindo o resultado de (79) em (81), consegue-se:

$$p \cdot t - 2 \cdot k \cdot \frac{4h_0}{t} = 0 \quad (82)$$

Isolando  $h_0$  em (82), obtém-se:

$$h_0 = \frac{pt^2}{8k} \quad (83)$$

O volume da membrana considerando um comprimento  $ds$  da membrana é:

$$V_0 = \int_s \left( \frac{2}{3} \cdot h_0 \cdot t \right) ds \quad (84)$$

Em (84), o termo  $\left( \frac{2}{3} \cdot h_0 \cdot t \right)$  corresponde à área da parábola da Figura 16. Substituindo o (83) em (84):

$$V_0 = \int_s \frac{pt^3}{12k} ds \quad (85)$$

Aplicando o resultado de (85) em (75), tem-se:

$$I_T = \frac{4k}{p} \int_s \frac{pt^3}{12k} ds \quad (86)$$

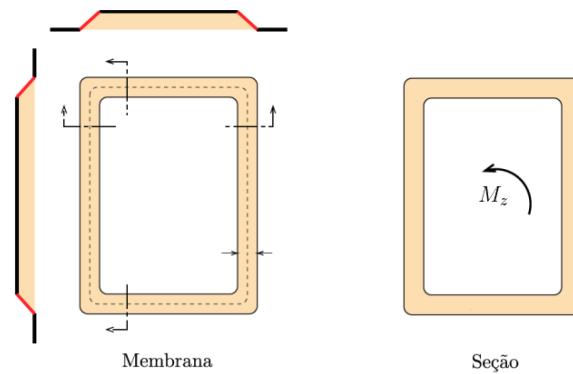
De (86), sendo  $p$  e  $k$  constantes ao longo de  $s$ , a expressão (86) pode ser simplificada e determina-se Inércia a Torção de uma seção de parede fina aberta como:

$$I_T = \frac{1}{3} \int_s t^3 ds \quad (87)$$

### 4.3.2 Seção de paredes finas fechadas

Para seções fechadas, a membrana adquire uma forma aproximadamente linear na espessura (NETO; COSTA, 2016). A região delimitada pela membrana se desloca paralelamente à face, permanecendo em uma altura constante (PROENÇA, 2018). A Figura 17 apresenta como se dá o deslocamento da membrana de uma seção delgada fechada.

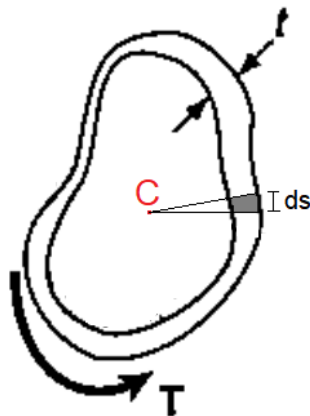
Figura 17: Deslocamento de membrana de seção delgada fechada



Fonte: Adaptado de Neto e Costa (2016)

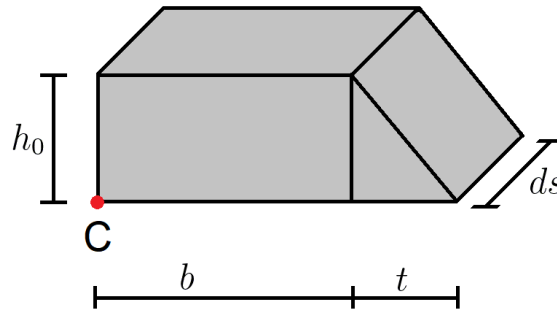
Um pequeno volume da membrana na forma da seção delgada fechada da Figura 18 pode ser visualizada na Figura 19.

Figura 18: Seção delgada de forma arbitrária



Fonte: Adaptado de Beer e Johnston (2008)

Figura 19: Volume infinitesimal de membrana de seção delgada fechada



Fonte: Autor

Esse incremento de volume da Figura 18 apresenta as dimensões  $ds$ ,  $t$ ,  $h_0$  e  $b$ , que equivalem a profundidade, a espessura da seção, a altura da membrana e a distância do centroide  $C$  da seção até a parede interna da seção, respectivamente. O incremento de volume  $dV_0$  da membrana pode ser determinado pelo produto da área da face trapezoidal pela profundidade  $ds$ , logo:

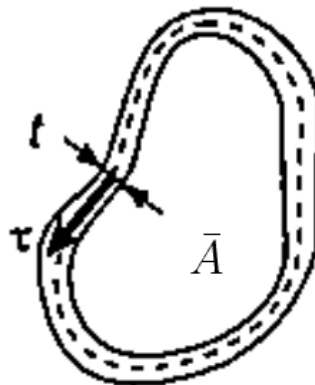
$$dV_0 = \left[ \frac{(b+t) + b}{2} \cdot h_0 \right] ds \quad (88)$$

Integrando os dois lados da expressão (88) e simplificando o lado direito da equação, tem-se:

$$V_0 = h_0 \oint \left[ b + \frac{t}{2} \right] ds \quad (89)$$

O termo  $\left[ b + \frac{t}{2} \right]$  é a distância entre o centroide  $C$  da seção até o ponto médio da espessura, o que significa que integral da expressão (89) representa toda a área interna, denotada por  $\bar{A}$ , a uma linha (linha média da seção) que contorna o meio da parede fina. A Figura 20 mostra a seção transversal com a linha do esqueleto.

Figura 20: Seção delgada com a linha de esqueleto



Fonte: Beer e Johnston (2008)

Aplicando-se o resultado (89) em (74), considerando-se uma seção transversal que apresenta mais de uma célula e sabendo que a integral pode ser discretizada em um somatório, tem-se a inércia a torção de uma seção delgada fechada:

$$I_T = \frac{4k}{p} \sum_i h_i \cdot \bar{A}_i \quad (90)$$

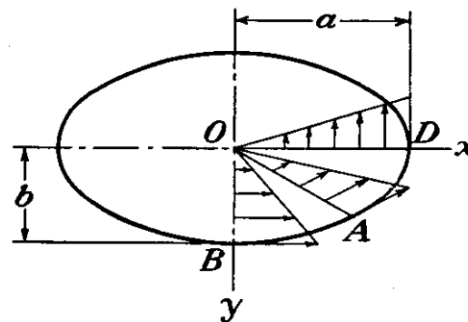
#### 4.4 Momento de inércia à torção de seções não-circulares maciças

##### 4.4.1 Seção Eliptíca

Steinbruch (2000) demonstra que o contorno de uma elipse, como a da figura 21, é descrita pela equação:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad (91)$$

Figura 21: Seção Eliptíca



Fonte: Timoshenko e Goodier (1951)

A equação (91) mostra que para qualquer ponto  $(x,y)$  localizado no contorno da elipse, a equação é sempre zero.

Timoshenko e Goodier (1951) definem a função de tensão  $\phi(x,y)$  da elipse como sendo uma relação linear entre esta e a equação (91), de maneira que  $\phi$  é igual a zero sobre o bordo da elipse, conforme proposto pela equação (71), logo:

$$\phi(x,y) = m \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \quad (92)$$

Na equação (92),  $m$  é a constante de proporcionalidade entre  $\phi$  e a expressão (91). Derivando-se a expressão (92) duas vezes com respeito as variáveis  $x$  e  $y$ , obtém-se:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{2m}{a^2} \quad (93.a)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{2m}{b^2} \quad (93.b)$$



Substituindo os resultados (93.a) e (93.b) em (56), consegue-se:

$$\frac{2m}{a^2} + \frac{2m}{b^2} = -2G\theta \quad (94)$$

Isolando  $m$  na equação (94) e o aplicando seu valor em (92), tem-se:

$$m = -\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} G\theta \quad (95)$$

$$\phi = -\frac{a^2 b^2 G\theta}{a^2 + b^2} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \quad (96)$$

A equação (96) quando aplicada em (72) resulta na equação (97).

$$M_z = \int_A -2 \cdot \frac{a^2 b^2 G\theta}{a^2 + b^2} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) dA \quad (97)$$

Quando utilizadas as propriedades de integrais, a expressão (97) pode ser reescritas em (98):

$$M_z = \frac{-2a^2 b^2 G\theta}{a^2 + b^2} \left( \frac{1}{a^2} \int_A x^2 dA + \frac{1}{b^2} \int_A y^2 dA - \int_A 1 dA \right) \quad (98)$$

As integrais  $\int_A x^2 dA$  e  $\int_A y^2 dA$  definem, respectivamente, os momentos de inércia à flexão em relação aos eixos  $y$  e  $x$ , enquanto a integral  $\int_A 1 dA$  representa a área da seção (HIBBELER, 2005).

$$\int_A x^2 dA = I_y = \frac{\pi}{4} b a^3 \quad (99.a)$$

$$\int_A y^2 dA = I_x = \frac{\pi}{4} a b^3 \quad (99.b)$$

$$\int_A dA = A = \pi a b \quad (99.c)$$

Os resultados das integrais (99) aplicadas em (98), permite simplificar (98) em:

$$M_z = \frac{a^3 b^3 \pi G\theta}{a^2 + b^2} \quad (100)$$

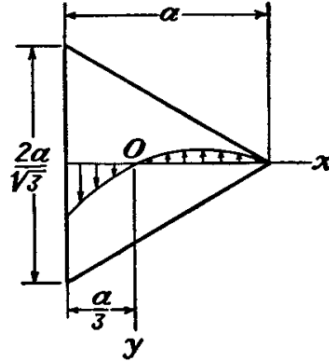
Dividindo-se os dois lados de (I) por  $G\theta$  e utilizando a definição (71), obtém-se o momento de inércia à torção da seção elíptica.

$$I_T = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2} \quad (101)$$

#### 4.4.2 Triângulo equilátero

Timoshenko e Goodier (1951), através da equação (102), expressam o produto das equações que regem os lados o triângulo equilátero da figura 22.

Figura 22: Triângulo equilátero



Fonte: Adaptado de Timoshenko e Goodier (1951)

$$\left(x - y\sqrt{3} - \frac{2}{3}a\right)\left(x + y\sqrt{3} - \frac{2}{3}a\right)\left(x + \frac{a}{3}\right) = 0 \quad (102)$$

Ao se utilizar as propriedades distributivas da multiplicação na expressão (102), esta reescreve-se como (103). A expressão (103) foi denotada pôr  $g(x, y)$  para se evitar carregar notação.

$$g(x, y) = x^3 - ax^2 - 3xy^2 - ay^2 + \frac{4}{27}a^3 = 0 \quad (103)$$

De maneira análoga a feita para seção contornada por uma elipse, será considerada uma relação de linearidade entre a função de tensão  $\phi(x, y)$  e a função  $g(x, y)$ , que representa o contorno do triângulo, conforme a equação (104).

$$\phi(x, y) = m \cdot g(x, y) \quad (104)$$

A equação (104) tem valor nulo no contorno do triângulo, conforme condicionado pela expressão (71). As derivadas parciais primeira e segunda de (104) são:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = m \cdot (3x^2 - 2ax - 3y^2 - ay^2) \quad (105.a)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = m \cdot (6x - 2a) \quad (105.b)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = m \cdot (-6xy - 2ay) \quad (105.c)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = m \cdot (-6x - 2a) \quad (105.d)$$

Aplicando (105.b) e (105.d) em (56) e isolando  $m$ , obtém-se:

$$m \cdot (6x - 2a) + m \cdot (-6x - 2a) = -2G\theta \quad (106.a)$$

$$m = \frac{G\theta}{2a} \quad (106.b)$$

Aplicando o resultado 105.b na expressão 103 e desenvolvendo essa na integral 72, é obtida a equação (107).

$$M_z = \frac{G\theta}{a} \int_A g(x,y) dA \quad (107)$$

Da figura 22, é possível definir os intervalos de integração da expressão (107).

$$\frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{2a}{3\sqrt{3}} \leq y \leq -\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{2a}{3\sqrt{3}} \quad (108.a)$$

$$-\frac{a}{3} \leq x \leq \frac{2a}{3} \quad (108.b)$$

A integral  $\int_A g(x,y) dA$  da equação (107) pode ser resolvida a partir dos intervalos definidos em (108). Em (109), encontra-se o resultado de cada uma das parcelas da integral da função  $g(x,y)$ .

$$\int_A x^3 dA = \frac{a^5}{135\sqrt{3}} \quad (109.a)$$

$$\int_A -ax^2 dA = -\frac{a^5}{18\sqrt{3}} \quad (109.b)$$

$$\int_A -3xy^2 dA = \frac{a^5}{45\sqrt{3}} \quad (109.c)$$

$$\int_A -ay^2 dA = -\frac{a^5}{18\sqrt{3}} \quad (109.d)$$

$$\int_A \frac{4}{27} a^3 dA = \frac{4a^5}{27\sqrt{3}} \quad (109.e)$$

Somando-se todas as parcelas da integral das expressões (109), tem-se o resultado  $\int_A g(x,y) dA$  em (110).

$$\int_A g(x,y) dA = \frac{a^5}{15\sqrt{3}} \quad (110)$$

Dividindo-se os dois lados da igualdade (107) por  $G\theta$ , aplicando o resultado (110) na mesma e utilizando a definição da equação (71) define-se o momento de inércia à torção de um triângulo equilátero em (111).

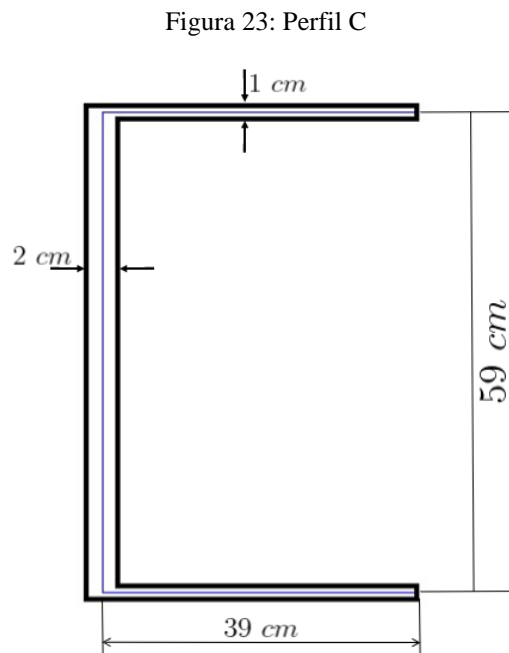
$$I_T = \frac{a^4}{15\sqrt{3}} \quad (111)$$

## 5 EXEMPLOS NUMÉRICOS DE APLICAÇÃO

### 5.1 Inércia à torção de seção delgada aberta

#### 5.1.1 Exemplo em Perfil C

O Perfil C da Figura 23 apresenta duas mesas com espessura  $t_1 = 1 \text{ cm}$  e uma alma com espessura  $t_2 = 2 \text{ cm}$ . O Momento de Inércia à Torção desse perfil pode ser determinado utilizando a expressão (87).



Fonte: Autor

Considerando  $s = s_1 + s_2 + s_3$ , tem-se:

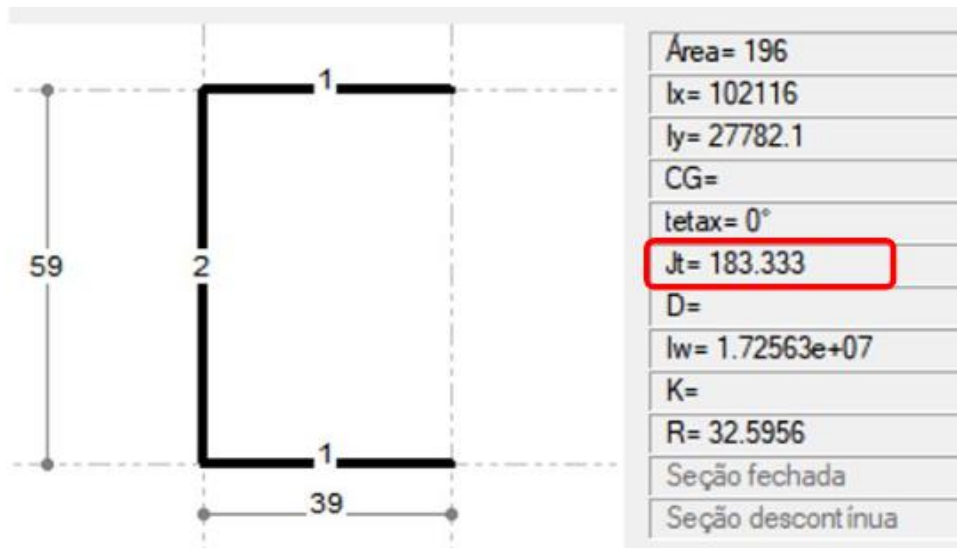
$$I_T = \frac{1}{3} \int_s t^3 ds \quad (112.a)$$

$$I_T = \frac{1}{3} [(1 \text{ cm})^3 \cdot (39 \text{ cm}) + (2 \text{ cm})^3 \cdot (59 \text{ cm}) + (1 \text{ cm})^3 \cdot (39 \text{ cm})] \quad (112.b)$$

$$I_T = 183,33 \text{ cm}^4 \quad (112.c)$$

O resultado obtido em (111.c) coincide com o resultado obtido através do *software* Flexo II, ao qual denota por  $J_t$ , conforme a Figura 24.

Figura 24: Resultado do Flexo II para perfil C

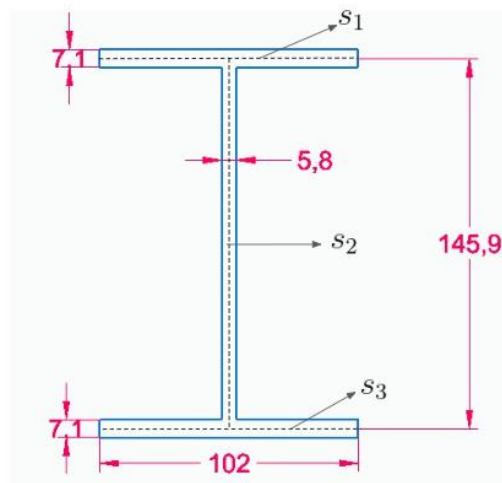


Fonte: Autor

### 5.1.2 Exemplo em Perfil I

Considerando o Perfil I da Figura 25, o momento de inércia à torção pode ser determinado utilizando a expressão (87).

Figura 25: Perfil Laminado W200x35,9



Fonte: Autor

Sendo  $s = s_1 + s_2 + s_3$ , então:

$$I_T = \frac{1}{3} \int_{s_1} (7,1 \text{ mm})^3 ds + \frac{1}{3} \int_{s_2} (5,8 \text{ mm})^3 ds + \frac{1}{3} \int_{s_3} (7,1 \text{ mm})^3 ds \quad (113.a)$$

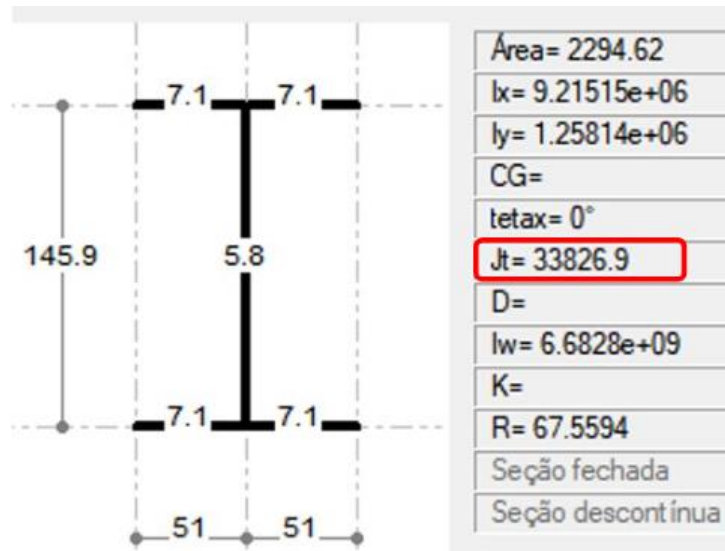
$$I_T = \frac{(7,1 \text{ mm})^3}{3} \cdot s_1 + \frac{(5,8 \text{ mm})^3}{3} \cdot s_2 + \frac{(7,1 \text{ mm})^3}{3} \cdot s_3 \quad (113.b)$$

$$I_T = \frac{(7,1 \text{ mm})^3}{3} \cdot (102 \text{ mm}) + \frac{(5,8 \text{ mm})^3}{3} \cdot (145,9 \text{ mm}) + \frac{(7,1 \text{ mm})^3}{3} \cdot (102 \text{ mm}) \quad (113.c)$$

$$I_T = 33826,9 \text{ mm}^4 \quad (113.d)$$

O Resultado obtido em (112.d) coincide com o resultado obtido através do *software* Flexo II para a mesma seção, conforme a Figura 26.

Figura 26: Resultado do Flexo II para perfil W



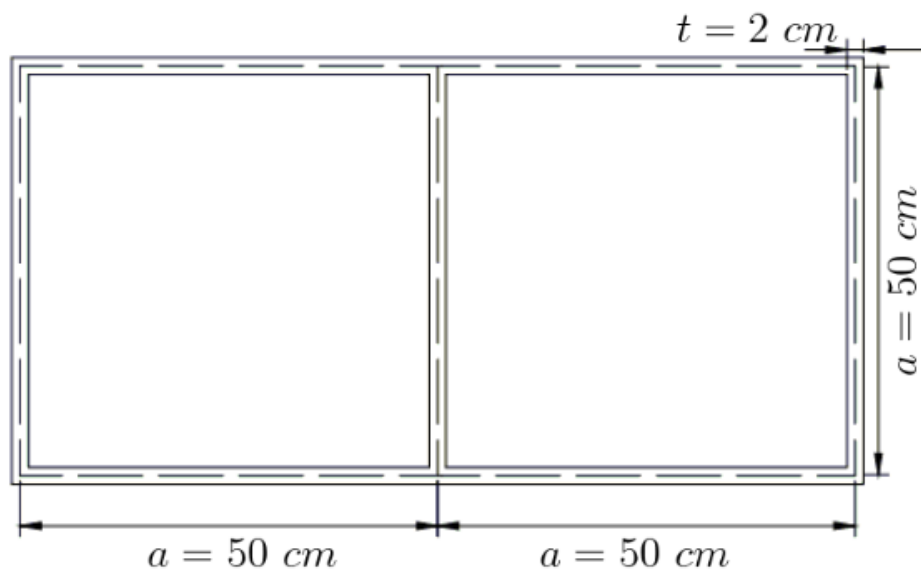
Fonte: Autor

## 5.2 Inércia à torção de seção delgada celular

### 5.2.1 Seção delgada de duas células

Para a inércia da seção celular da Figura 27, é necessário determinar as alturas da membrana deslocada através do equilíbrio entre a pressão  $p$  e a tração  $k$ .

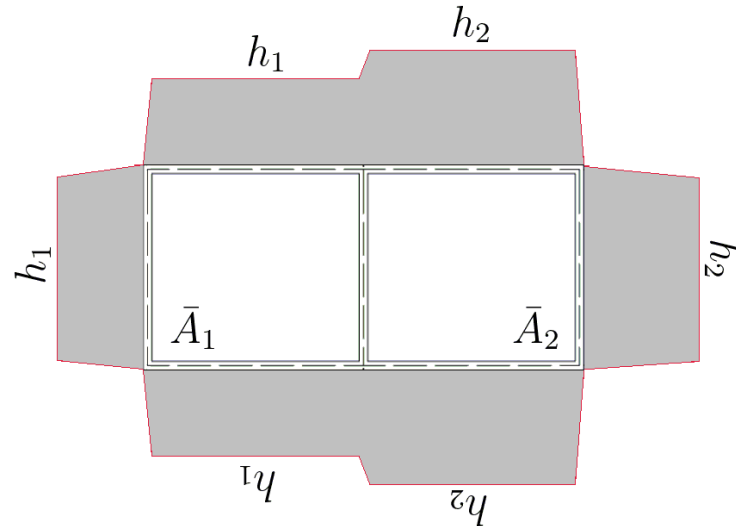
Figura 27: Seção delgada com duas células



Fonte: Autor

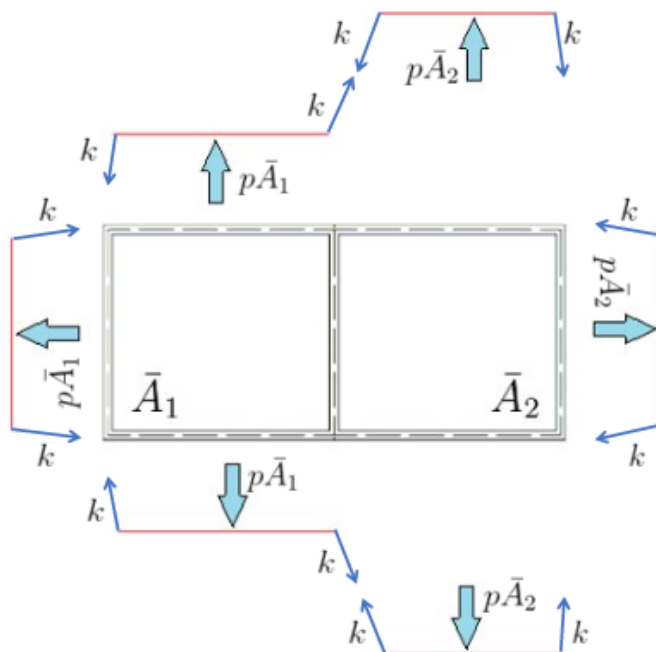
A Figura 28 mostra a forma da membrana, após sofrer deslocamentos, visualizada por cada uma das laterais, enquanto a figura 29 mostra as trações  $k$  que aparecem sobre os contornos.

Figura 28: Membrana deslocada de seção delgada com duas células



Fonte: Autor

Figura 29: Membrana de seção delgada de duas células submetida à pressão  $p$  e tração  $k$



Fonte: Autor

Realizando o somatório das forças verticais na região da célula  $\bar{A}_1$ , tem-se:

$$p \cdot a^2 - k \cdot \sin \left[ \operatorname{atan} \left( \frac{h_1}{t} \right) \right] \cdot 3a + k \cdot \sin \left[ \operatorname{atan} \left( \frac{h_2 - h_1}{t} \right) \right] \cdot a = 0 \quad (114.a)$$

$$pa^2 - \frac{4k ah_1}{t} + \frac{k ah_2}{t} = 0 \quad (114.b)$$

Multiplicando a equação (104.b) por  $\frac{t}{ka}$ , tem-se:

$$\frac{pta}{k} - 4h_1 + h_2 = 0 \quad (115)$$

Realizando o somatório das forças verticais na região da célula  $\bar{A}_2$ , tem-se:

$$p \cdot a^2 - k \cdot \sin \left[ \operatorname{atan} \frac{(h_2 - h_1)}{t} \right] \cdot a - k \cdot \sin \left[ \operatorname{atan} \frac{h_2}{t} \right] \cdot 3a = 0 \quad (116.a)$$

$$pa^2 - \frac{4k ah_2}{t} + \frac{k ah_1}{t} = 0 \quad (116.b)$$

Multiplicando a equação (116.b) por  $\frac{t}{ka}$ , tem-se:

$$\frac{pta}{k} - 4h_2 + h_1 = 0 \quad (117)$$

Ao resolver o sistema de equações lineares formado pelas equações (115) e (117), tem-se  $h_1 = h_2 = \frac{pta}{3k}$ . A simetria da seção transversal justifica as alturas  $h_1$  e  $h_2$  serem iguais.

O volume da membrana será definido por  $V_0 = \bar{A}_1 h_1 + \bar{A}_2 h_2$ , como mostrado em (90), logo:

$$V_0 = \bar{A}_1 \cdot h_1 + \bar{A}_2 \cdot h_2 \quad (118.a)$$

$$V_0 = a^2 \cdot \frac{pta}{3k} + a^2 \cdot \frac{pta}{3k} \quad (118.b)$$

$$V_0 = \frac{2pta^3}{3k} \quad (118.c)$$

Sendo determinado o volume da membrana, se faz possível a determinação da Inércia à Torção da seção transversal da Figura 27. Utilizando o resultado (118.c) na expressão (74).

$$I_T = \frac{4k}{p} V_0 \quad (119.a)$$

$$I_T = \frac{4k}{p} \cdot \frac{2pta^3}{3k} \quad (119.b)$$

$$I_T = \frac{8ta^3}{3} \quad (119.c)$$



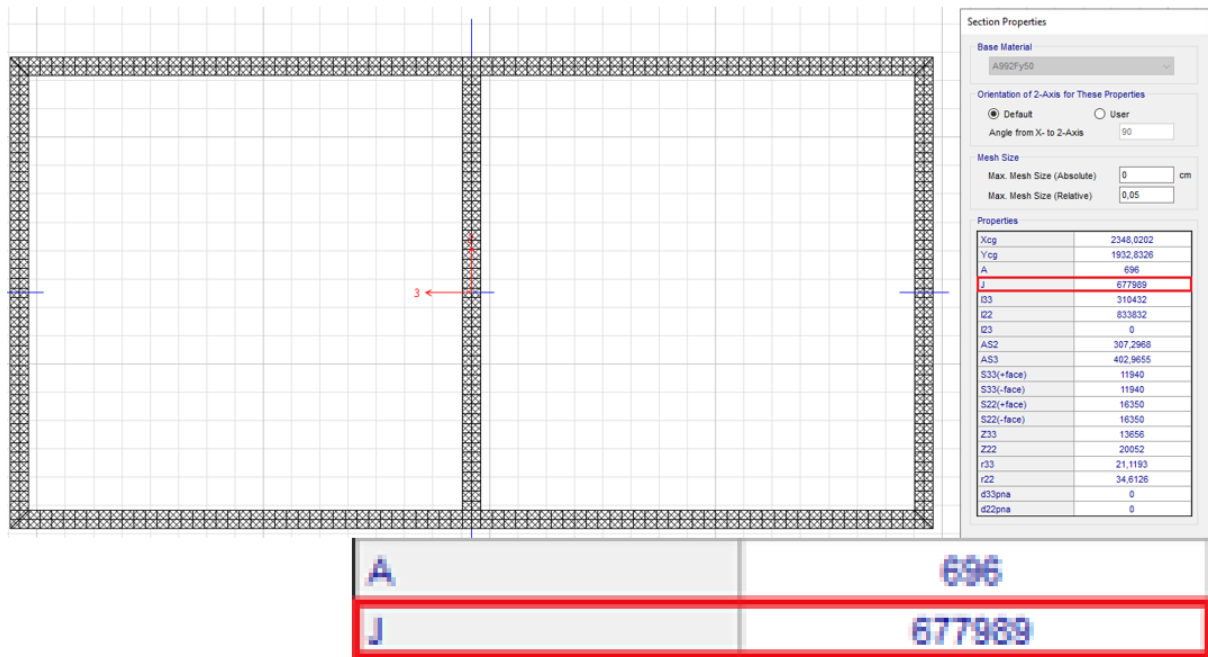
Pela figura 25, tem-se  $a = 50 \text{ cm}$  e  $t = 2 \text{ cm}$ , logo, pela expressão (96.c), obtém-se:

$$I_T = \frac{8}{3} \cdot (2 \text{ cm}) \cdot (50 \text{ cm})^3 \quad (120.a)$$

$$I_T \approx 6,667 \cdot 10^5 \text{ cm}^4 \quad (120.b)$$

O resultado obtido em (120.b) para o Momento de Inércia à Torção da Figura 25 apresenta uma diferença de 1,67% em relação ao resultado obtido através do *software* SAP2000, que foi de  $677989 \text{ cm}^4$  (denotado pelo *software* por J), conforme a Figura 30.

Figura 30: Resultado do SAP2000 para seção de duas células

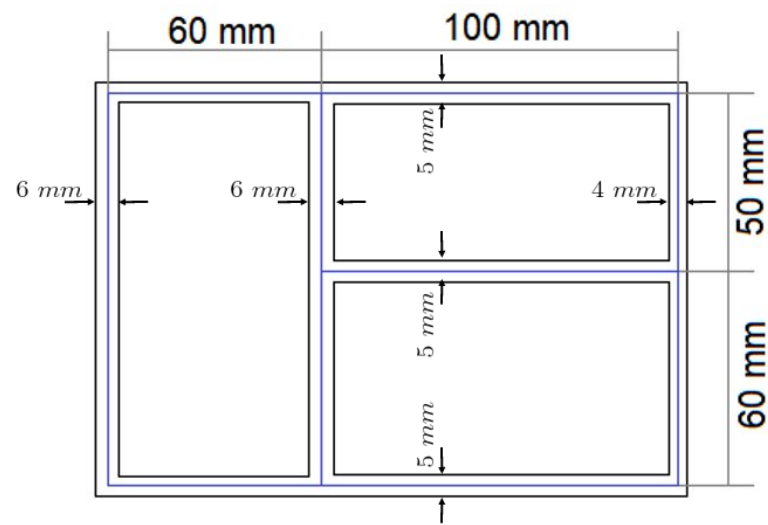


Fonte: Autor

### 5.2.2 Seção delgada de três células

A Figura 31 apresenta uma seção delgada com três células.

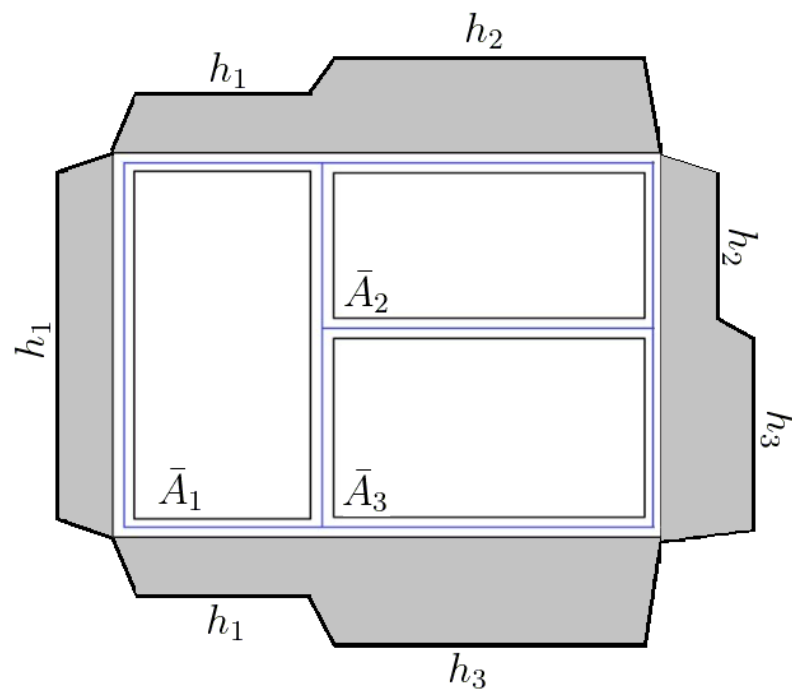
Figura 31: Seção delgada com três células



Fonte: Autor

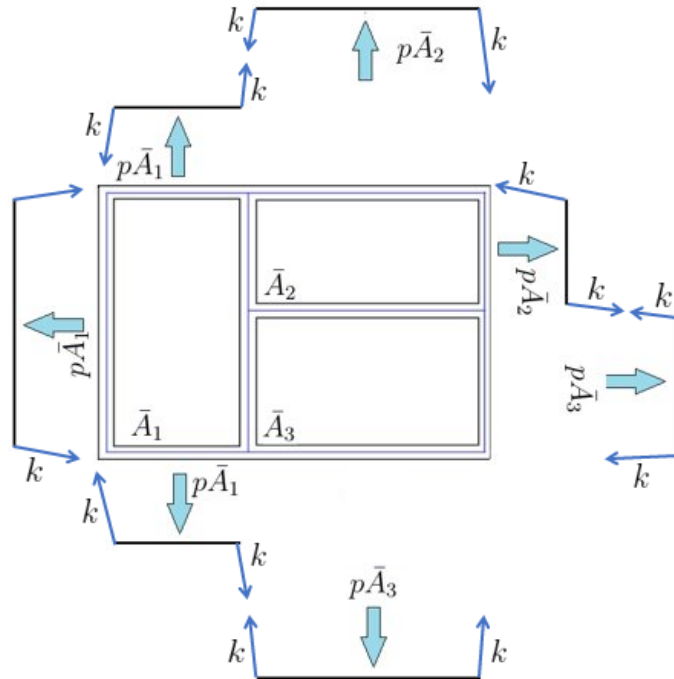
A Figura 32 e 33 apresentam, respectivamente, a forma da membrana deslocada visualizadas pelas vistas laterais e a atuação de  $p$  e  $k$  na membrana.

Figura 32: Membrana deslocada de seção delgada com três células



Fonte: Autor

Figura 33: Membrana de seção delgada de três células submetida à pressão p e tração k



Fonte: Autor

Ao realizar-se o somatório das forças verticais na região da célula  $\bar{A}_1$ , tem-se:

$$p\bar{A}_1 - k \cdot \frac{h_1}{6} \cdot 110 - 2 \cdot k \cdot \frac{h_1}{5} \cdot 60 + k \cdot \frac{(h_3 - h_1)}{6} \cdot 60 + k \cdot \frac{(h_2 - h_1)}{6} \cdot 50 = 0 \quad (121.a)$$

$$p\bar{A}_1 - \frac{182}{3}kh_1 + \frac{25}{3}kh_2 + 10kh_3 = 0 \quad (121.b)$$

$$p \cdot (60 \text{ mm})(110 \text{ mm}) - \frac{182}{3}kh_1 + \frac{25}{3}kh_2 + 10kh_3 = 0 \quad (121.c)$$

$$p \cdot (6600 \text{ mm}^2) - \frac{182}{3}kh_1 + \frac{25}{3}kh_2 + 10kh_3 = 0 \quad (121.d)$$

Realizando o somatório das forças verticais na região da célula  $\bar{A}_2$ , tem-se:

$$p\bar{A}_2 - k \cdot \frac{(h_2 - h_1)}{6} \cdot 50 - k \cdot \frac{h_2}{5} \cdot 100 + k \cdot \frac{(h_3 - h_2)}{5} \cdot 100 - k \cdot \frac{h_2}{4} \cdot 50 = 0 \quad (122.a)$$

$$p \cdot (100 \text{ mm})(50 \text{ mm}) + \frac{50}{6}kh_1 - \frac{365}{6}kh_2 + 20kh_3 = 0 \quad (122.b)$$

$$p \cdot (5000 \text{ mm}^2) + \frac{50}{6}kh_1 - \frac{365}{6}kh_2 + 20kh_3 = 0 \quad (122.c)$$

Realizando o somatório das forças verticais na região da célula  $\bar{A}_3$ , tem-se:

$$p\bar{A}_3 - k \cdot \frac{h_3}{4} \cdot 60 - k \cdot \frac{h_3}{5} \cdot 100 - k \cdot \frac{(h_3 - h_2)}{5} \cdot 100 - k \cdot \frac{(h_3 - h_1)}{6} \cdot 60 = 0 \quad (123.a)$$

$$p \cdot (100 \text{ mm})(60 \text{ mm}) + 10kh_1 + 20kh_2 - 65kh_3 = 0 \quad (123.b)$$

$$p \cdot (6000 \text{ mm}^2) + 10kh_1 + 20kh_2 - 65kh_3 = 0 \quad (123.c)$$

Resolvendo o sistema de equações lineares formado pelas equações (121.d), (122.c) e (123.c), tem-se  $h_1 = 157,747 \frac{p}{k}$ ,  $h_2 = 158,123 \frac{p}{k}$  e  $h_3 = 165,230 \frac{p}{k}$ . O volume da membrana será:

$$V_0 = \bar{A}_1 h_1 + \bar{A}_2 h_2 + \bar{A}_3 h_3 \quad (124.a)$$

$$V_0 = (110)(60) \left( 157,747 \frac{p}{k} \right) + (100)(50) \left( 158,123 \frac{p}{k} \right) + (100)(60) \left( 165,230 \frac{p}{k} \right) \quad (124.b)$$

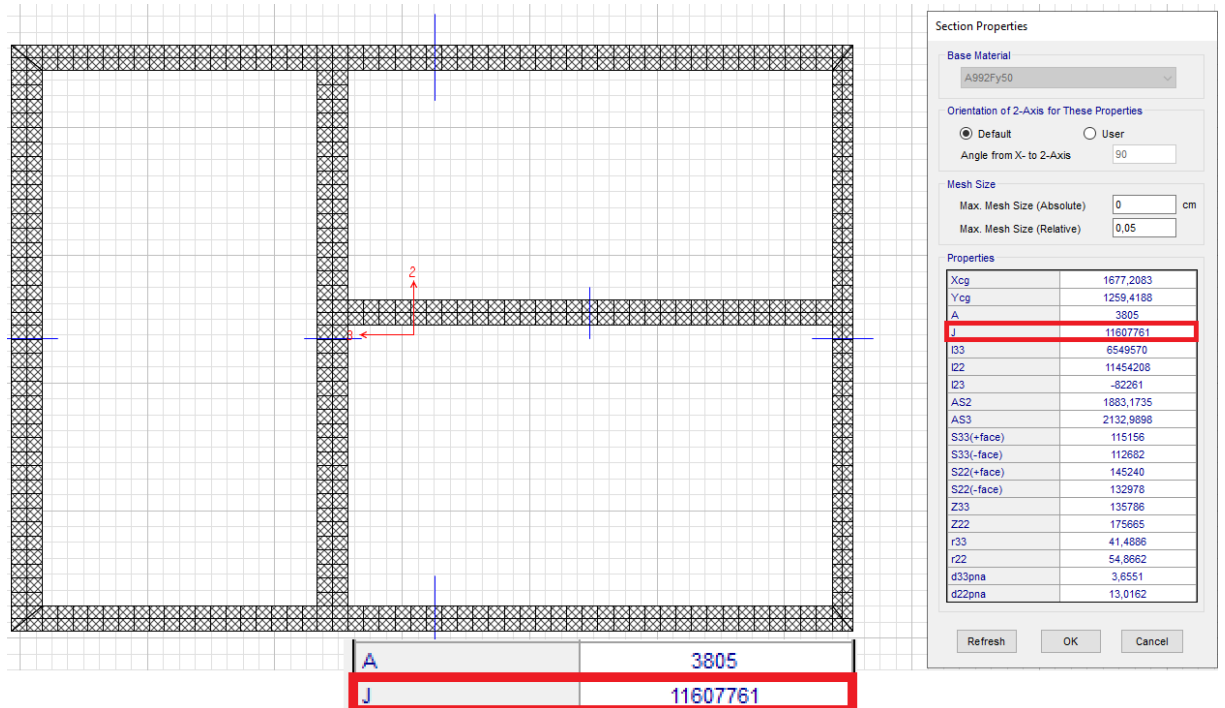
$$V_0 = 2.823.125 \frac{p}{k} \quad (124.c)$$

Se obtém a Inércia à Torção da seção transversal da Figura 31 aplicando o resultado (124.c) em (74), tem-se:

$$I_T \approx 1,129 \cdot 10^7 \text{ mm}^4 \quad (125)$$

O resultado de (125) mostrou uma diferença de 2,72% em relação ao dado pelo SAP2000 para a mesma seção, como se pode ver pela Figura 34.

Figura 34: Resultado do SAP2000 para seção de três células

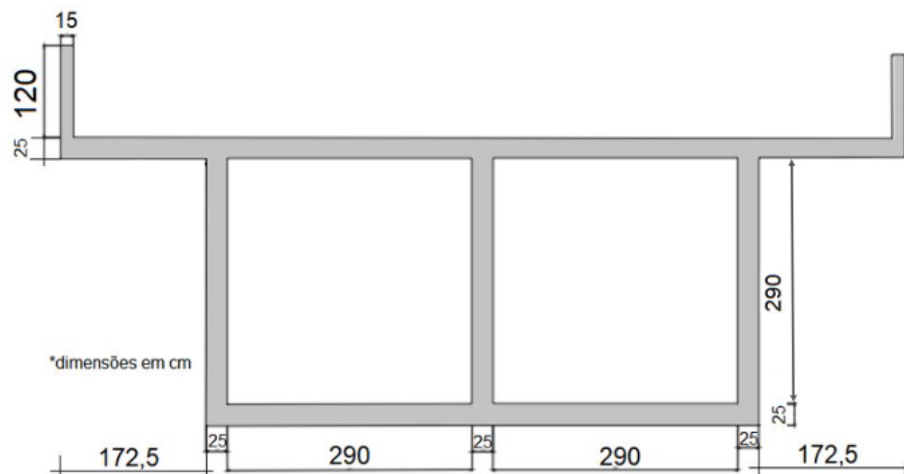


Fonte: Autor

### 5.3 Inércia à torção de seção mista

A seção transversal da Figura 35, apresenta uma seção mistas com duas células e abas abertas, devido a isso, os conceitos a respeito de seção fechada e aberta devem ser aplicados nesse exemplo:

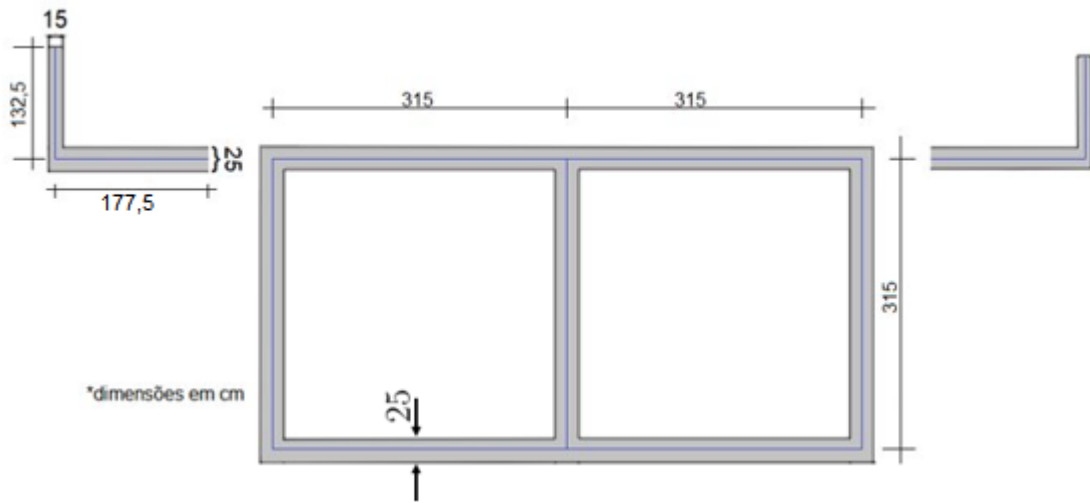
Figura 35: Seção Mista



Fonte: Autor

A Figura 36 mostra como será feita divisão entre as partes abertas e fechadas da seção, bem como os comprimentos das linhas de esqueleto.

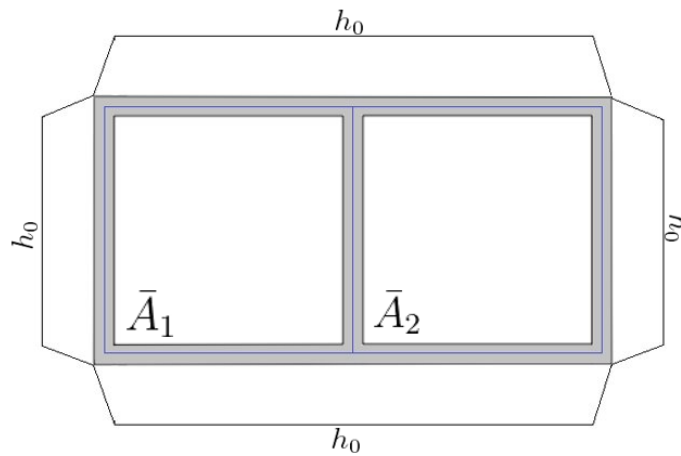
Figura 36: Separação entre as partes abertas e fechadas da seção mista



Fonte: Autor

A Figura 37 apresenta a membrana deslocada quando submetida à uma pressão em uma de suas faces. Devido a simetria da seção, a altura da membrana na região e são iguais.

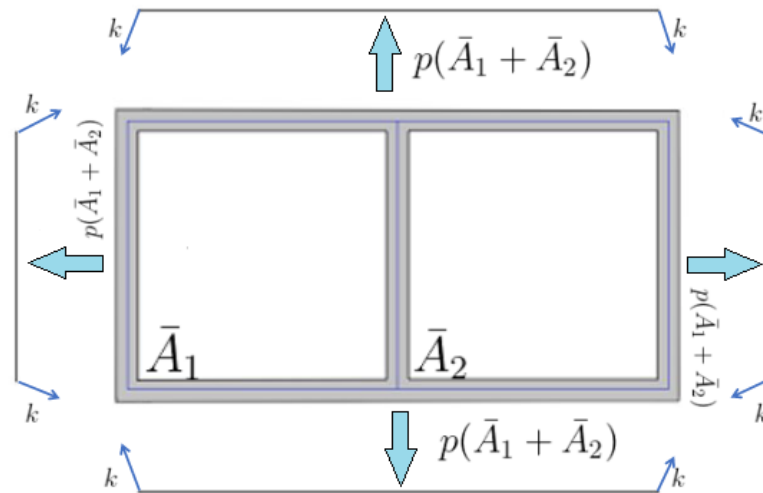
Figura 37: Parte fechada da membrana de seção mista quando deslocada



Fonte: Autor

A Figura 38 mostra a parte fechada da seção mista sobre a atuação da pressão  $p$  e a tração  $k$ .

Figura 38: Parte fechada da membrana de seção mista sob a ação de pressão



Fonte: Autor

Realizando-se o somatório das forças verticais, obtém-se:

$$p(\bar{A}_1 + \bar{A}_2) - k \frac{h}{25} \cdot (315 + 630 + 630 + 315) = 0 \quad (126.a)$$

$$p(315 \cdot 315 + 315 \cdot 315) - 75,6kh = 0 \quad (126.b)$$

$$p \cdot (198.450) - 75,6kh = 0 \quad (126.c)$$

$$h = 2625 \cdot \frac{p}{k} \text{ (cm)} \quad (126.d)$$

O Volume da membrana na região fechada, utilizando (125.d) é:

$$V_0 = (\bar{A}_1 + \bar{A}_2)h \quad (127.a)$$

$$V_0 = (315 \cdot 315 + 315 \cdot 315) \cdot \left(2625 \cdot \frac{p}{k}\right) \quad (127.b)$$

$$V_0 = 520.931.250 \cdot \frac{p}{k} \quad (127.c)$$

A Inércia à Torção da região fechada da seção será denotada  $I_f$  e ao utilizar o resultado (126.c) em (74), obtém-se:

$$I_f \approx 2,084 \cdot 10^9 \text{ cm}^4 \quad (128)$$

Para a Inércia à Torção da aba à esquerda, que é uma seção aberta, será usada a expressão (87). Denotando esta por  $I_a$ , obtém-se:

$$I_a = \frac{1}{3} \int t^3 ds \quad (129.a)$$

$$I_a = \frac{1}{3} [(15 \text{ cm})^3 \cdot (132,5 \text{ cm}) + (25 \text{ cm})^3 \cdot (177,5 \text{ cm})] \quad (129.b)$$

$$I_a = 1,073 \cdot 10^6 \text{ cm}^4 \quad (129.c)$$

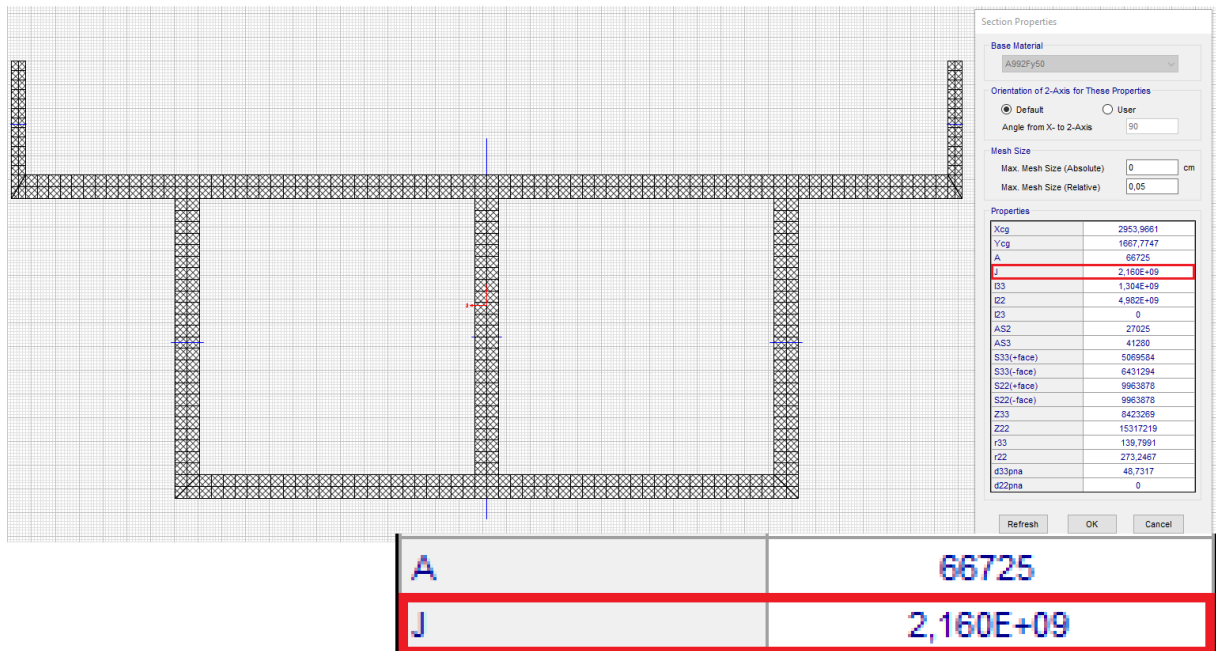
Como a aba à direita apresenta as mesmas dimensões da aba à esquerda, então esta apresenta o mesmo valor  $I_a$ . A inércia à torção da seção mista da Figura 35 é:

$$I_T = I_f + 2I_a \quad (130.a)$$

$$I_T \approx 2,086 \cdot 10^9 \text{ cm}^4 \quad (130.b)$$

O resultado (129.b) para o momento de inércia à torção de uma seção de paredes delgada mista mostrou uma diferença de 3,43% em comparação ao resultado obtido através do *software* SAP2000.

Figura 39: Resultado do SAP2000 para seção mista



Fonte: Autor



## 6 RESULTADOS E DISCUSSÕES

A utilização do software Flexo II para comparação entre os resultados de Momento de Inércia à Torção calculados analiticamente e aqueles obtidos pelo *software* mostrou resultados 100% satisfatórios. O *software* foi usado única e exclusivamente para comparar os resultados de seção delgadas abertas, visto que esta ferramenta computacional se limita seções delgadas abertas. Foi observado que o FLEXO II® usa a mesma expressão analítica demonstrada no trabalho para calcular o momento de inércia à torção de paredes finas abertas, o que justifica os resultados serem exatamente os mesmos.

O *software* SAP2000 foi utilizado para se comparar os resultados das demais seções (celulares e mista) e apresentou resultados bastantes satisfatórios, sendo a maior diferença de 3,43%. Essas diferenças se devem as aproximações que foram consideradas para efeito de simplificação das expressões analíticas. O *software*, na utilização do Método dos Elementos Finitos, não faz distinção a respeito do tipo de parede (delgada ou espessa) e calcula as propriedades geométricas sem as simplificações adotadas na dedução da expressão analítica, garantindo resultados mais precisos e que explica a diferença com os resultados obtidos pela expressão analítica.

No geral, percebeu-se que conforme foi-se aumentando a complexidade da seção, a diferença percentual entre os resultados analítico e computacional aumentava também. Por causa das simplificações consideradas na expressão de momento de inércia à torção de seções delgadas, quanto mais se aumentava a complexidade da geometria, mais se somava os erros devidos à essas simplificações, o que justifica o aumento da diferença percentual.

## 7 CONCLUSÃO

Através deste estudo, foi possível compreender toda a formulação do problema de torção uniforme e quais condições matemáticas regem esse problema. Além disso, pode ser verificado algumas possibilidades quanto ao cálculo do momento de inércia à torção de maneira analítica. As expressões analíticas se demonstraram ter resultados bastantes satisfatórios, isso pode ser observado na comparação com os *softwares*.

Nesse contexto, é possível reconhecer toda a complexidade existente em problemas que envolvem a aplicação de torque em seções transversais não-circulares. É perceptível que a determinação do momento de inércia à torção não é de fácil resolução, visto que há uma série de condições a serem satisfeitas, além de diversas funções a serem determinadas, podendo ser citado aqui as funções  $\phi$ ,  $\psi$  e  $h$ .

Sugere-se para trabalhos futuros, o estudo da determinação do momento de inércia à torção de seções não-circulares maciças com geometrias diferentes das apresentas nesse trabalho, em especial a seção retangular que é a mais comumente usada na construção civil. A determinação poderia se dar por meio de expressões analíticas utilizando outros métodos e teoremas matemáticos para se definir por exemplo uma expressão para  $\phi$  e  $h$ , visto que a determinação destas resolve quase que completamente o problema. Além da determinação de expressões analíticas, pode-se considerar métodos numéricos para se solucionar o problema de torção uniforme.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARBER, J. R. **Elasticity**, 3 ed. [s.1]: Springer, 2010

BARROS, J.A. **Conceitos básicos da teoria da elasticidade**. 2004. Disponível em: <https://repositorium.sdum.uminho.pt/bitstream/1822/13006/2/CAP2.pdf>. Acesso em: 30 mai. de 2023.

BEER, F. P.; JONHSTON, E. R. **Resistencia dos Materiais**. 3 ed.: São Paulo: Pearson, 1995

DO CARMO, M.P. **Geometria diferencial de curvas e superfícies**. 4 ed. [s.1]: Sociedade Brasileira de Matemática, 2010.

FRUCHTENGARTEN, J. **Teoria de Saint-Venant e Teoria de Vlasov**. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil – Escola Politécnica da USP. Sem data. Disponível em: [https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/1817639/mod\\_resource/content/1/APOSTILA%20PEF5734%20-%20Teoria%20de%20St-Venant%20e%20Teoria%20de%20Vlasov%20-%20jun-2014.pdf](https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/1817639/mod_resource/content/1/APOSTILA%20PEF5734%20-%20Teoria%20de%20St-Venant%20e%20Teoria%20de%20Vlasov%20-%20jun-2014.pdf). Acesso em: 02 de Junho de 2023.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de Cálculo. Vol 2**. 7 ed. [s.1]: Rio de Janeiro: LTC, 2008.

HIBBELER, R. C. **Estática: mecânica para engenharia**. Pearson Education do Brasil, 2005.

HILLESHEIM, M. J. **Análise de torção de Saint-Venant em barras com seção arbitrária via método dos elementos de contorno (M.E.C.)**. 83 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2013.

MORI, D. D. *et al.* **Flexo-torção: barras com seção transversal aberta e paredes delgadas**. São Carlos: EESC. 2003.

PIMENTA, P. M. **Fundamentos da Mecânica dos Sólidos e das Estruturas**. São Paulo, 2006.

PROENÇA, S.P.B. **Curso de resistência dos materiais**. São Carlos, SP: EESC. 2018  
Disponível em: <http://www.livrosabertos.sibi.usp.br/portaldelivrosUSP/catalog/book/194>.  
Acesso em: 30 mai. 2023.

SADD, M. H. **Elasticity: theory, applications, and numerics**. Academic Press, 2014.

SILVA, H.F. **Formulação do problema da torção uniforme em barras de seção transversal maciça**. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo. 2005

SPEROTTO, F. A.; DE FREITAS, D.S. **NOTAS DE AULA DE GEOMETRIA ANALÍTICA: VETORES**. Editora Furg. 2017

TIMOSHENKO, S. P. **History of strength of materials: with a brief account of the history of theory of elasticity and theory of structures**. Courier Corporation, 1983.

GERE, J.M.; TIMOSHENKO, S.P. **Mechanics of Materials**, 3rd SI ed. UK: Chapman and Hall, 1991.

TIMOSHENKO, S.P.; GOODIER, J.N. **Theory of Elasticity: By S. Timoshenko and JN Goodier**. McGraw-Hill, 1951.

SOKOLNIKOFF, I. S. *et al.* **Mathematical theory of elasticity**. New York: McGraw-Hill, 1956.

VALLE, Marcos Eduardo. **Aula 20: Teorema de Green**. Apresentação do PowerPoint. Sem data. Disponível em:  
<https://www.ime.unicamp.br/~valle/Teaching/MA211/Aula20.pdf>. Acesso em 21 jan. 2022.