

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
FACULDADE DE TECNOLOGIA
CURSO DE ENGENHARIA CIVIL

PAULO VÍCTOR LIMA BARROSO

DESENVOLVIMENTO DE UMA FERRAMENTA COMPUTACIONAL
PARA DETERMINAÇÃO DE PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS E
CÁLCULO DE TENSÕES NORMAIS NA FLEXÃO GERAL

MANAUS

2025

PAULO VÍCTOR LIMA BARROSO

DESENVOLVIMENTO DE UMA FERRAMENTA COMPUTACIONAL
PARA DETERMINAÇÃO DE PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS E
CÁLCULO DE TENSÕES NORMAIS NA FLEXÃO GERAL

Monografia apresentada à disciplina FTC-067
Projeto Final de Engenharia Civil II como parte
dos requisitos necessários para a obtenção do título
de Engenheiro Civil da UFAM.

Orientador: Prof. Dr. Henrique Barbosa Soares

MANAUS

2025

Ficha Catalográfica

Elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

- B277d Barroso, Paulo Víctor Lima
Desenvolvimento de uma ferramenta computacional para determinação de propriedades geométricas e cálculo de tensões normais na flexão geral / Paulo Víctor Lima Barroso. - 2025.
112 f. ; 31 cm.
- Orientador(a): Henrique Barbosa Soares.
Faculdade de Tecnologia, Curso de Engenharia Civil, Manaus, 2025.
1. Cálculo automatizado. 2. Implementação computacional. 3. Propriedades geométricas. 4. Seções transversais. 5. Tensões normais. I. Soares, Henrique Barbosa. II. Universidade Federal do Amazonas. Faculdade de Tecnologia. Curso de Engenharia Civil. III. Título
-

RESUMO

BARROSO, P. V. L. **Desenvolvimento de uma ferramenta computacional para determinação de propriedades geométricas e cálculo de tensões normais na flexão geral.** 2025. Trabalho de Conclusão de Curso - Faculdade de Tecnologia, Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2025.

Este trabalho teve como finalidade o desenvolvimento de uma ferramenta computacional que permite o cálculo automatizado das propriedades geométricas de seções transversais genéricas simétricas e assimétricas de um ou mais materiais e a aplicação do cálculo de tensões normais na flexão geral. Para tanto, foi realizado o estudo das formulações referentes ao cálculo das propriedades geométricas de seções transversais planas e das tensões normais na flexão geral para um ou mais materiais, seguido do levantamento bibliográfico em artigos, livros e teses e dissertações para fundamentação. Em seguida, deduziu-se fórmulas para as propriedades geométricas por meio da resolução de integrais de contorno da área baseada no Teorema de Green, de modo que seja possível realizar o cálculo automatizado dessas propriedades. Além disso, baseado na revisão bibliográfica, o cálculo das tensões normais foi diretamente aplicado nas fórmulas da flexão geral. Assim, organizou-se toda a rotina de cálculo já feita em algoritmos para implementação computacional realizada em linguagem Fortran. Por conseguinte, a análise de dados e resultados foram feitas em planilhas eletrônicas, além de *softwares* de pós-processamento gratuitos. Primeiramente, após a implementação computacional apenas para seções transversais poligonais de apenas um material, foram processados diversos testes com exemplares de problemas da literatura voltadas às propriedades geométricas para assegurar o correto funcionamento do programa e sua validação. Todavia, por último, o programa computacional englobou não apenas seções transversais poligonais como também seções transversais circulares e circulares parciais, ambas com um ou mais materiais, além do cálculo das tensões normais na flexão geral. Logo, foram realizados exemplos para demonstrar a aplicabilidade do programa que será desenvolvido para situações mais gerais de seção transversal com solicitações. Por fim, concluiu-se que os resultados obtidos foram satisfatórios, não sendo observadas diferenças relevantes nos resultados quando comparado com a literatura.

Palavras-chave: cálculo automatizado; implementação computacional; propriedades geométricas; seções transversais; tensões normais.

ABSTRACT

BARROSO, P. V. L. **Development of a computational tool for determining geometric properties and calculating normal stresses in general bending.** 2025. Graduation work - College of Engineering, Federal University of Amazonas, Manaus, 2025.

The aim of this work was to develop a computational tool that allows the automated calculation of the geometric properties of generic symmetrical and asymmetrical cross-sections of one or more materials and the application of normal stress calculations in general bending. To this end, a study of the formulations related to the calculation of the geometric properties of plane cross-sections and normal stresses in general bending for one or more materials was carried out, followed by a bibliographic survey of articles, books, theses, and dissertations for foundational analysis. Subsequently, formulas for the geometric properties were deduced through the resolution of contour integrals of the area based on Green's Theorem, so that the automated calculation of these properties is possible. Furthermore, based on the bibliographic review, the calculation of normal stresses was directly applied to the general bending formulas. Thus, the entire calculation routine was organized into algorithms for computational implementation in Fortran. Therefore, data analysis and results were performed using spreadsheets, as well as free post-processing software. Initially, after the computational implementation for polygonal cross-sections of a single material, several tests were conducted with examples of problems from the literature focused on geometric properties to ensure the correct functioning of the program and its validation. However, finally, the computational program encompassed not only polygonal cross-sections but also circular and partial circular cross-sections, both with one or more materials, in addition to the calculation of normal stresses in general bending. Therefore, examples were performed to demonstrate the applicability of the program, which will be developed for more general cross-sectional situations with loads. Finally, it was concluded that the results obtained were satisfactory, with no relevant differences observed in the results when compared to the literature.

Key-words: automated calculation; computational implementation; geometric properties; cross-sections; normal stresses.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	10
1.1. CONSIDERAÇÕES GERAIS.....	10
1.2. OBJETIVOS.....	12
1.2.1. OBJETIVO GERAL.....	12
1.2.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS	12
1.3. JUSTIFICATIVA	13
1.4. METODOLOGIA.....	14
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	15
2.1. PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS	15
2.1.1. ÁREA	16
2.1.2. MOMENTO ESTÁTICO DE ÁREA.....	17
2.1.3. CENTROIDE	18
2.1.4. MOMENTO DE INÉRCIA.....	19
2.1.5. PRODUTO DE INÉRCIA.....	20
2.1.6. RAIOS DE GIRAÇÃO	20
2.2. TENSÃO NORMAL NA FLEXÃO GERAL	21
2.2.1. CONCEITO DE TENSÃO E TENSÃO NORMAL	21
2.2.2. FLEXÃO GERAL	23
2.3. SEÇÕES NÃO HOMOGÊNEAS.....	28
2.3.1. FATOR DE TRANSFORMAÇÃO.....	28
2.3.2. PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DE SEÇÕES NÃO HOMOGÊNEAS.....	30
3. FORMULAÇÃO DAS PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS.....	32
3.1. CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES.....	32
3.2. TEOREMA DE GREEN	32
3.3. CONCEITOS IMPORTANTES.....	34
3.3.1. CAMPO VETORIAL	34
3.3.2. PARAMETRIZAÇÃO DA RETA	34
3.3.3. DIVERGENTE DE UM CAMPO VETORIAL.....	35
3.3.4. VETOR NORMAL	36
3.4. FORMULAÇÕES DAS PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS	37
3.4.1. FÓRMULA DA ÁREA	37
3.4.2. FÓRMULA DO MOMENTO ESTÁTICO DE ÁREA EM X.....	40

3.4.3.	FÓRMULA DO MOMENTO ESTÁTICO DE ÁREA EM Y	41
3.4.4.	FÓRMULAS DO CENTROIDE	43
3.4.5.	FÓRMULA DO MOMENTO DE INÉRCIA EM X.....	43
3.4.6.	FÓRMULA DO MOMENTO DE INÉRCIA EM Y.....	45
3.4.7.	FÓRMULAS DO RAIOS DE GIRAÇÃO	46
3.4.8.	FÓRMULA DO PRODUTO DE INÉRCIA	47
3.5.	TEOREMA DOS EIXOS PARALELOS	48
3.6.	PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS PARA SEÇÕES NÃO HOMOGÊNEAS.....	50
3.7.	SEÇÕES CIRCULARES	51
3.8.	TENSÕES NORMAIS PARA FLEXÃO GERAL	54
3.8.1.	SEÇÕES HOMOGÊNEAS	55
3.8.2.	SEÇÕES NÃO HOMOGÊNEAS.....	58
3.8.3.	LINHA NEUTRA	59
4.	PROGRAMA COMPUTACIONAL	60
4.1.	CONSIDERAÇÕES GERAIS.....	60
4.2.	FUNCIONAMENTO DO PROGRAMA.....	61
5.	EXEMPLOS DE VALIDAÇÃO	65
5.1.	EXEMPLO 1	66
5.2.	EXEMPLO 2	71
5.3.	EXEMPLO 3	76
6.	EXEMPLO DE APLICAÇÃO	81
6.1.	EXEMPLO 1	81
6.2.	EXEMPLO 2	83
6.3.	EXEMPLO 3	86
7.	CONCLUSÕES.....	89
7.1.	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	90
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	91
	APÊNDICE A – DEDUÇÃO DAS FORMULAÇÕES.....	93
	APÊNDICE B – FORMATO DO ARQUIVO DE ENTRADA	97
	APÊNDICE C – FORMATO DO ARQUIVO DE SAÍDA	102
	APÊNDICE D – CÓDIGO COMPUTACIONAL	108

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Representação genérica da área	16
Figura 2 – Representação genérica do momento estático em uma superfície plana	17
Figura 3 – Representação genérica do centroide de uma superfície plana.....	18
Figura 4 – Representação genérica dos raios de giração de uma superfície plana.....	20
Figura 5 – Representação da força interna na barra 1	22
Figura 6 – Representação da força interna na barra 2	22
Figura 7 – Representação da flexão pura e reta.....	23
Figura 8 – Representação da flexão pura e oblíqua em duas dimensões.....	24
Figura 9 – Representação da flexão pura e oblíqua em perspectiva.....	24
Figura 10 – Representação das tensões normais máximas em perspectiva.....	25
Figura 11 – Representação da flexão composta 1	25
Figura 12 – Representação da flexão composta 2	26
Figura 13 – Representação da flexão geral.....	27
Figura 14 – Representação da transformação de seções não homogêneas.....	29
Figura 15 – Representação da tensão nas seções transformadas	30
Figura 16 – Representação do Teorema de Green.....	32
Figura 17 – Componentes do vetor \mathbf{v}	33
Figura 18 – Campo vetorial em \mathbb{R}	34
Figura 19 – Representação do vetor normal \mathbf{n}	36
Figura 20 – Representação dos vetores ortogonais \mathbf{v} e \mathbf{n}	36
Figura 21 – Representação de uma seção transversal.....	49
Figura 22 – Seções com seções circulares.....	51
Figura 23 – Representação da parametrização da circunferência.....	52
Figura 24 – Seção homogênea vazada com abertura poligonal.....	53
Figura 25 – Seção homogênea vazada com abertura circular	53
Figura 26 – Seção homogênea vazada com abertura circular	54
Figura 27 – Seção homogênea vazada com abertura circular	55
Figura 28 – Fluxograma do funcionamento do programa	61
Figura 29 – Seção transversal para exemplo 1	67
Figura 30 – Coordenadas para exemplo 1	67
Figura 31 – Seção transversal para exemplo 2	71

Figura 32 – Coordenadas para exemplo 2	72
Figura 33 – Seção transversal para exemplo 3	76
Figura 34 – Coordenadas para exemplo 3	77
Figura 35 – Seção transversal para exemplo 1	81
Figura 36 – Coordenadas para exemplo 1	82
Figura 37 – Seção transversal para exemplo 2	84
Figura 38 – Coordenadas para exemplo 2	84
Figura 39 – Seção transversal para exemplo 3.	86

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Propriedades geométricas do exemplo 1	70
Tabela 2 – Tensão e coeficiente da linha neutra do exemplo 1	70
Tabela 3 – Propriedades geométricas do exemplo 2	75
Tabela 4 – Tensão e coeficiente da linha neutra do exemplo 2	75
Tabela 5 – Propriedades geométricas do exemplo 3	80
Tabela 6 – Tensão e coeficiente da linha neutra do exemplo 3	80
Tabela 7 – Propriedades geométricas e linha neutra do exemplo 1	83
Tabela 8 – Tensão do exemplo 1	83
Tabela 9 – Propriedades geométricas e linha neutra do exemplo 2	85
Tabela 10 – Tensão do exemplo 2	85
Tabela 11 – Propriedades geométricas e linha neutra do exemplo 3	87
Tabela 12 – Tensão do exemplo 3	87

1. INTRODUÇÃO

1.1. CONSIDERAÇÕES GERAIS

O termo “estrutura” se refere a um sistema de elementos conectados utilizados para suportar cargas, logo, quando um engenheiro civil faz o projeto de qualquer obra, este deve levar em consideração as propriedades do material a ser utilizado para garantir que a estrutura da obra disponha da rigidez e resistência necessárias de acordo com a sua função.

Consoante descrito em Hibbeler (2013), a classificação das *estruturas* é importante para o engenheiro civil, visto que permite identificar os variados elementos estruturais bem como suas formas e funções. Assim, quanto à forma, os elementos estruturais podem ser em tirantes, colunas e vigas, por exemplo, e nestes pode-se perceber a importância dos materiais que os compõem e de suas propriedades geométricas.

Conforme descrito em Hibbeler (2013), as vigas são elementos estruturais retos dispostos horizontalmente cuja função é sustentar cargas verticais e, dependendo do material, suas seções transversais podem mudar. Logo, quando o material usado é aço, ou alguma liga de alumínio, as vigas costumam ser usadas com uma seção transversal “I” em que as forças nos extremos seção transversal da viga, as mesas, resistem ao momento aplicado, enquanto a parte do meio, a alma, tem resistência ao cisalhamento aplicado; entretanto, quando o material utilizado é o concreto armado, essas estruturas costumam apresentar seção transversal retangular, de modo que as barras de aço incorporadas ao concreto resistam às tensões nas regiões da viga onde são solicitadas.

O objetivo da análise estrutural é, depois de idealizar o comportamento das ações e do material presente na estrutura, definir esforços solicitantes e deslocamentos decorrentes (Fonte, 2005). Logo, qualquer que seja o tipo de análise estrutural realizada no projeto de uma obra, a determinação de propriedades geométricas das seções transversais dos elementos estruturais que a compõem é um dos primeiros passos a serem feitos. Isso acontece, pois essas propriedades são a base para os cálculos de rigidez e de tensões desses elementos, o que é fundamental no processo de dimensionamento.

A primeira disciplina de graduação do curso de Engenharia Civil focada na área de estruturas da UFAM é “Mecânica” em que, após a abordagem de esforços solicitantes, é explorado o cálculo das propriedades geométricas de interesse para o processo de dimensionamento. A partir disso, o entendimento correto do cálculo dessas propriedades é imprescindível para as demais disciplinas de estruturas, independente do material.

Dessa forma, entende-se que o cálculo manual dessas propriedades para áreas simples de seções transversais costuma ser mais prático e facilitado, porém, a medida em que as áreas se tornam mais complexas, inclusive com a presença de mais de um material, esse cálculo passa a ser mais trabalhoso e demorado, possibilitando também a ocorrência de erros nesse processo. Dado esse contexto, o desenvolvimento de uma ferramenta computacional que permita o cálculo automatizado das propriedades geométricas de seções transversais genéricas, sejam elas simples ou complexas, incluindo a presença de vários materiais, faz-se necessário.

Como descrito em Santos (2020), os esforços internos, como momento fletor e esforço cortante, geram tensões em elementos estruturais sujeitos a carregamentos. Sendo assim, pelo fato de atuarem internamente, isto é, nas seções transversais desses elementos, a análise e cálculo das propriedades geométricas dessas seções são necessários para a determinação dos valores das tensões, sejam elas normais ou de cisalhamento.

Dado esse caráter geral, aproveitou-se o desenvolvimento dos cálculos das propriedades geométricas das seções transversais para, posteriormente, utilizando os valores gerados, aplicar ao cálculo de tensões normais provenientes da flexão geral. Além disso, conforme descrito em Coda (2017), sendo a flexão geral a atuação conjunta de momento fletor numa direção arbitrária (flexão oblíqua) e de esforço normal (flexão composta), esses esforços podem ser aplicados a seções transversais simétricas ou assimétricas.

Vale ressaltar que, primeiramente, foi desenvolvido apenas o código do programa computacional responsável pelo cálculo automático das propriedades geométricas de seções transversais de lados retos homogêneas. Em contrapartida, por último, foi desenvolvido o código do programa computacional responsável pelo cálculo automático das propriedades geométricas de seções transversais poligonais e/ou circulares homogêneas e não homogêneas e o cálculo das tensões normais na flexão geral dessas seções.

1.2. OBJETIVOS

1.2.1. OBJETIVO GERAL

Desenvolver um programa computacional para determinação de propriedades geométricas de seções transversais simples de um material e compostas de vários materiais e cálculo de tensões normais na flexão geral para essas seções.

1.2.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- 1) Estudar e desenvolver formulações que permitam automatizar o cálculo das propriedades geométricas de seções transversais compostas de vários materiais, especificamente centroide, momentos estáticos e momentos e produtos de inércia;
- 2) Implementar algoritmo de programa computacional para o cálculo das propriedades geométricas de áreas de seções transversais compostas de vários materiais;
- 3) Desenvolver e implementar algoritmo para cálculo de tensões normais provenientes da flexão geral aplicada a seções transversais com vários materiais;
- 4) Realizar exemplos numéricos de validação e aplicação.

1.3. JUSTIFICATIVA

Conforme a ABNT NBR 6118:2023, a análise estrutural é uma das mais importantes fases do projeto de uma obra, já que permite determinar esforços internos, tensões, deformações e deslocamentos de um elemento estrutural ou de toda a estrutura. Além disso, de acordo com Santos (2020), durante o estudo da Mecânica dos Sólidos, antes de qualquer análise de tensões, deve-se entender e determinar as propriedades geométricas das seções transversais que caracterizam os elementos estruturais. Logo, faz-se importante que a determinação de propriedades geométricas e cálculo de tensões normais na flexão geral sejam feitos de forma correta.

A metodologia corriqueira no cálculo das propriedades geométricas é simplesmente utilizar formulações específicas presentes na literatura para cada tipo de seção transversal que se encontram nos elementos estruturais analisados. Essa metodologia é eficiente quando se trata de cálculos manuais, no entanto, para seções mais complexas e com diferentes materiais, esse processo passa a ser cada vez mais complexo e dispendioso, o que pode gerar atrasos e até erros na análise estrutural, especialmente devido a aproximações.

Em vários trabalhos voltados para análise e desenvolvimento de ferramentas para determinação de propriedades geométricas, são utilizadas formulações específicas já apresentadas na literatura, o que limita essas ferramentas a casos em que a seção não é usual e possui mais de um material, fato que mostra a importância da utilização de uma metodologia menos usual para contemplar mais casos envolvendo propriedades geométricas de seções.

Neste trabalho, utilizou-se a resolução de integrais de contorno da área baseada no Teorema de Green para deduzir as formulações das propriedades geométricas. Além disso, para a determinação de tensões normais na flexão geral, foram usadas formulações tiradas diretamente do levantamento bibliográfico. Dessa forma, através da implementação computacional desse formulário organizado em algoritmo, será possível o cálculo automatizado dessas variáveis em condições gerais na qual o elemento estrutural tenha uma seção transversal planas e com uma menor amplitude de erros em relação ao cálculo manual.

Portanto, a justificativa para a utilização desse programa computacional seria a resolução de exemplos gerais que exijam a utilização de seções transversais mais complexas, sejam elas simétricas ou assimétricas, incluindo seções com um ou mais materiais, além da disponibilização do programa para que alunos da Universidade Federal do Amazonas (UFAM) possam utilizá-lo durante a graduação.

1.4. METODOLOGIA

Primeiramente, foi realizado um levantamento bibliográfico para determinar as propriedades geométricas onde foram estudadas as formulações referentes ao cálculo de propriedades geométricas de seções transversais planas, incluindo a possibilidade de ter um ou vários materiais. Em seguida, foi realizado também um levantamento bibliográfico em busca de trabalhos que tratam do cálculo de tensões normais na flexão geral, incluindo seções com vários materiais, que usualmente não é encontrado nos livros didáticos de Resistência dos Materiais. Neste sentido, para a pesquisa, utilizou-se o Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Amazonas (SISTEBIB/UFAM), com acesso ao acervo dos livros didáticos de graduação da Biblioteca Setorial de Ciências Exatas e Engenharias, de um banco de teses e dissertações, além das bases de dados do portal de periódicos da CAPES.

Na sequência, foram desenvolvidas as formulações para os cálculos das propriedades geométricas a partir da resolução de integrais sobre o contorno da área baseada no Teorema de Green, de modo que fosse possível o cálculo automatizado dessas propriedades. Essa etapa é constituída pela análise do Teorema de Green e de conceitos básicos importantes para a dedução das fórmulas como: parametrização da reta, campo vetorial, divergente de um campo vetorial e vetor unitário normal. Assim, através dessas definições, é mostrada a dedução de detalhada de cada uma das propriedades geométricas.

Com as propriedades geométricas determinadas, o cálculo das tensões foi realizado diretamente com base na formulação de flexão geral citada anteriormente. Dessa forma, todo esse procedimento de cálculo foi organizado em algoritmos para que fosse implementado computacionalmente.

As implementações computacionais dos algoritmos desenvolvidos foram realizadas em linguagem Fortran. A linguagem possui ambiente de desenvolvimento e compilador para Windows® com licença gratuita. Para análise dos dados e resultados, são utilizadas planilhas eletrônicas, além de softwares de pós-processamento como AcadView (Coda, Paccola, 2005) e Paraview (Ahrens; Geveci; Law, 2005), ambos com licença gratuita.

Com relação à análise de resultados, a implementação computacional foi validada com exemplos encontrados na literatura, feitos em uma planilha eletrônica. Além disso, foram realizados outros exemplos para demonstrar a aplicabilidade do programa que foi desenvolvido para situações mais gerais de forma que contemple seção transversal e solicitações, como problemas envolvendo vigas e pilares.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Nos próximos itens, será comentada a base teórica para as formulações utilizadas neste trabalho. Primeiramente, serão abordadas as propriedades geométricas das seções transversais planas, incluindo seções com apenas um material (seções homogêneas). Em seguida, serão abordados os cálculos que envolvem a tensão normal na flexão geral devido às seções analisadas no item 2.1. Por último, serão abordadas as propriedades geométricas das seções transversais planas, incluindo seções com apenas um material (seções não homogêneas).

2.1. PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS

De acordo com Santos (2020), as tensões atuam ao longo das seções transversais e são determinadas seguindo os seguintes passos: cálculo dos esforços internos; determinação das propriedades geométricas da seção transversal e aplicação das equações para as tensões. Dessa forma, determinar e calcular as propriedades geométricas das seções transversais, seja de um ou mais materiais, é imprescindível para o cálculo das tensões normais.

Conforme Melconian (2009), as propriedades geométricas mais importantes para o cálculo das tensões são divididas em: área, momento estático de área, centroide, momento de inércia, produto de inércia e raio de giração.

Consoante Oliveira (2023), cada propriedade geométrica possui uma aplicação da Engenharia Civil:

- I. Área da seção transversal: principal propriedade geométrica para determinar a quantidade de material que será aplicado numa estrutura. Através dessa propriedade, o engenheiro civil pode dimensionar a quantidade de área de aço, concreto e madeira, por exemplo, em elementos estruturais, como vigas e pilares, e fazer com que o projeto seja mais econômico;
- II. Centróide: ponto que corresponde ao centro geométrico de um objeto e que, em modelos estruturais, é importante já que pode definir o ponto de aplicação de forças resultantes em elementos estruturais adjacentes;
- III. Momento de inércia: determina a capacidade da seção transversal de um elemento estrutural de resistir aos esforços internos atuantes. Isso pode ser observado em qualquer seção, e um exemplo disso são em vigas de seção I, onde a área é mais distribuída na

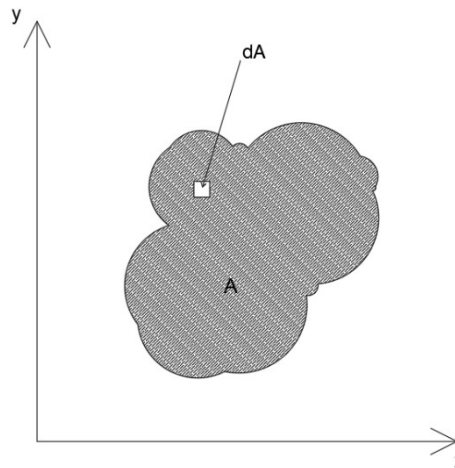
mesa do que na alma, com a finalidade de aumentar a capacidade de resistir ao momento fletor;

IV. Raio de giração: é usado para descrever a estabilidade de objetos giratórios e pode influenciar na rigidez da seção transversal de um elemento estrutural, tal que previne falhas por flambagem na mesma.

2.1.1. ÁREA

A área corresponde à uma medida de superfície, isto é, uma porção de um espaço bidimensional, como um polígono, de acordo com a Figura 1.

Figura 1 - Representação genérica da área.



Fonte: Autoria própria.

Logo, Melconian (2009) considera dA como um elemento de área e os eixos x e y como os eixos de coordenadas em que a área da superfície está inserida, a área total da superfície pode ser dada por (2.1):

$$A = \int_A dA \quad (2.1)$$

A análise dimensional da área mostra que $[A] = [L^2]$. Logo, as unidades de medida da área podem ser $[\text{mm}^2]$, $[\text{cm}^2]$, $[\text{m}^2]$.

2.1.2. MOMENTO ESTÁTICO DE ÁREA

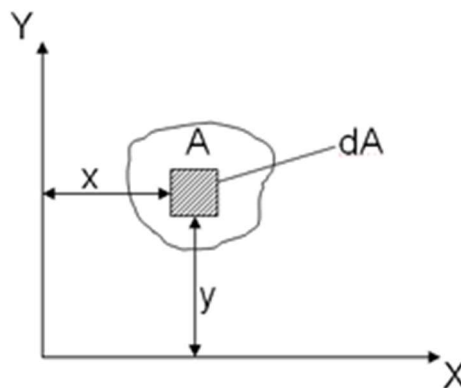
Segundo Castro e Junior (2009), o momento estático de um elemento de superfície é obtido a partir do produto entre o elemento de área dA e a distância que separa esse elemento dos eixos de referência, x ou y , dado por (2.2) e (2.3):

$$dQ_x = y \cdot dA \quad (2.2)$$

$$dQ_y = x \cdot dA \quad (2.3)$$

Para representar o momento estático de uma superfície plana, deve-se considerar a Figura 2.

Figura 2 - Representação genérica do momento estático em uma superfície plana.



Fonte: Castro e Junior (2009).

Dessa forma, como descrito em Castro e Junior (2009) e Beer (2012), os momentos estáticos de uma superfície plana, ou momentos de primeira ordem da área A em relação aos eixos, são dados por (2.4) e (2.5):

$$Q_x = \int_A y \cdot dA \quad (2.4)$$

$$Q_y = \int_A x \cdot dA \quad (2.5)$$

A análise dimensional dos momentos estáticos de área mostra que $[Qx] = [Qy] = [L] \cdot [L^2] \Rightarrow [Qx] = [Qy] = [L^3]$. Logo, as unidades de medida dos momentos estáticos de área podem ser $[\text{mm}^3]$, $[\text{cm}^3]$, $[\text{m}^3]$.

Vale ressaltar que, pelo fato de os momentos estáticos terem dimensão $[L^3]$, os valores podem ser positivos e negativos.

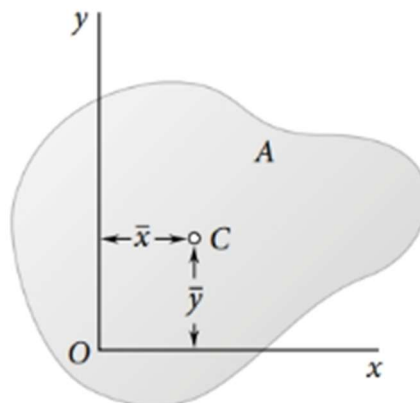
2.1.3. CENTROIDE

Conforme descrito em Beer (2012), o centro de gravidade corresponde ao ponto específico de um corpo em que uma força resultante serve como substituta de um sistema de forças distribuídas, já o centroide de uma superfície plana é o ponto cujas coordenadas são o resultado das médias das coordenadas dos pontos de uma figura geométrica.

Além disso, consoante Oliveira (2017), quando essa figura geométrica corresponde a uma seção homogênea de um corpo, então o centroide tem a mesma posição que o centro de massa e quando o corpo é homogêneo e um campo gravitacional constante atua sobre ele, esse ponto corresponde ao centro de gravidade.

Logo, para representar o centroide de uma superfície plana, pode-se considerar a representação da Figura 3.

Figura 3 - Representação genérica do centroide de uma superfície plana.



Fonte: Beer (2012).

Determinando as formulações da área total de uma superfície plana e dos momentos estáticos de área, as coordenadas são dadas pela razão entre essas propriedades geométricas. Então, o ponto de centroide de uma superfície plana é definido por essas coordenadas dadas por (2.6) e (2.7):

$$C_x = \frac{Q_y}{A} \Rightarrow C_x = \frac{\int_A x \cdot dA}{\int_A dA} \quad (2.6)$$

$$C_y = \frac{Q_x}{A} \Rightarrow C_y = \frac{\int_A y \cdot dA}{\int_A dA} \quad (2.7)$$

Assim, o ponto do centroide de uma superfície plana é $C(C_x, C_y)$. A análise dimensional das coordenadas mostra que $[C_x] = [C_y] = \frac{[L^3]}{[L^2]} = [L]$. Logo, as unidades de medida das coordenadas do centroide podem ser [mm], [cm], [m].

Vale ressaltar que, conforme Oliveira (2017), para uma figura geométrica com centroide na origem dos eixos, os momentos estáticos são nulos, logo, em $C_x = C_y = 0$.

2.1.4. MOMENTO DE INÉRCIA

Consoante Castro e Junior (2009), o momento de inércia é propriedade geométrica relevante durante o dimensionamento de elementos estruturais, visto que compõe a rigidez de seções transversais à rotação, ou seja, quanto maior for os valores de momento de inércia da secção transversal, maior será a resistência à rotação.

Como descrito em Beer (2012), tomando como referência a Figura 2, os momentos de inércia, ou momentos de segunda ordem da área A em relação aos eixos, são dados por (2.8) e (2.9):

$$I_x = \int_A y^2 \cdot dA \quad (2.8)$$

$$I_y = \int_A x^2 \cdot dA \quad (2.9)$$

A análise dimensional dos momentos de inércia de área mostra que $[I_x] = [I_y] = [L^2] \cdot [L^2] = [L^4]$. Logo, as unidades de medida dos momentos de inércia podem ser [mm⁴], [cm⁴], [m⁴].

Vale ressaltar que, pelo fato de os momentos de inércia terem dimensão [L⁴], os valores podem ser apenas positivos.

2.1.5. PRODUTO DE INÉRCIA

Conforme descrito em Beer (2012), o produto de inércia é dado por (2.10):

$$I_{xy} = \int_A x \cdot y \cdot dA \quad (2.10)$$

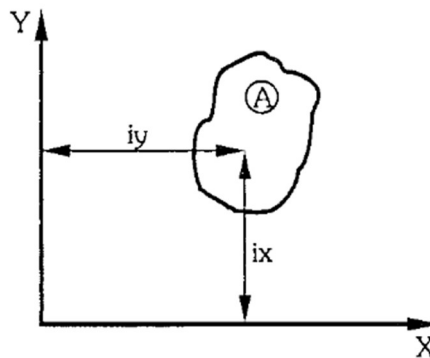
A análise dimensional dos momentos de inércia de área mostra que $[I_{xy}] = [L] \cdot [L] \cdot [L^2] = [L^4]$. Logo, as unidades de medida dos momentos de inércia podem ser $[\text{mm}^4]$, $[\text{cm}^4]$, $[\text{m}^4]$.

Vale ressaltar que, consoante descrito em Beer (2012), o produto de inércia I_{xy} pode ser positivo, negativo ou nulo.

2.1.6. RAIOS DE GIRAÇÃO

De acordo com Melconian (2009), os raios de giração de uma superfície planas consistem nas distâncias entre essa superfície e os eixos, como pode ser visto na Figura 4.

Figura 4 - Representação genérica dos raios de giração de uma superfície plana.



Fonte: Melconian (2009).

Dessa forma, considerando as propriedades geométricas de momento de inércia e área total de uma superfície, os raios de giração de uma superfície planas são dadas por (2.11) e (2.12):

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \quad (2.11)$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \quad (2.12)$$

A análise dimensional dos raios de giração de uma superfície mostra que $[ix] = [iy] = \left[\frac{[L^4]}{[L^2]} \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{[L^2]}{[L]} = [L]$. Logo, as unidades de medida dos raios de giração de uma superfície podem ser [mm], [cm], [m].

2.2. TENSÃO NORMAL NA FLEXÃO GERAL

2.2.1. CONCEITO DE TENSÃO E TENSÃO NORMAL

De acordo com Hibbeler (2010), a tensão corresponde à intensidade da força interna sobre um plano específico (superfície plana da área) que passa por um ponto, no qual o material que compõe essa superfície é coeso e contínuo. Além disso, dá-se o nome de tensão normal à intensidade da força, ΔF_z , que age na direção perpendicular a um elemento de área, isto é, é normal à área. Essa relação que pode ser descrita por (2.13):

$$\sigma_z = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_z}{\Delta A} \quad (2.13)$$

Outro ponto importante, é que a tensão tracionar o elemento de área, considerada tensão de tração, já se comprimir esse elemento, será considerada tensão de compressão.

Como descrito em Hibbeler (2010), quando uma barra está sob uma deformação uniforme e constante, sabe-se que uma tensão normal constante σ está agindo sobre ela. Logo, considerando que cada elemento de área ΔA de toda a seção transversal do plano está submetido a uma força $\Delta F = \sigma \cdot \Delta A$, a força resultante interna N seria o resultado da somatória de todas as forças que agem na seção. Assim, a tensão normal média constante seria descrita por (2.14):

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad (2.14)$$

Onde:

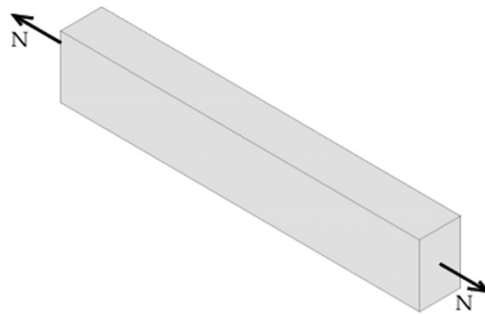
$\sigma \rightarrow$ Tensão normal média em qualquer ponto na área da seção transversal; no Sistema Internacional (SI), é dado em mega pascal (Pa);

N → Força normal interna resultante, que é aplicada no centroide da área da seção transversal; no Sistema Internacional (SI), é dado em newtons (N);

A → Área da seção transversal da barra; no Sistema Internacional (SI), é dado em metros quadrados (m^2).

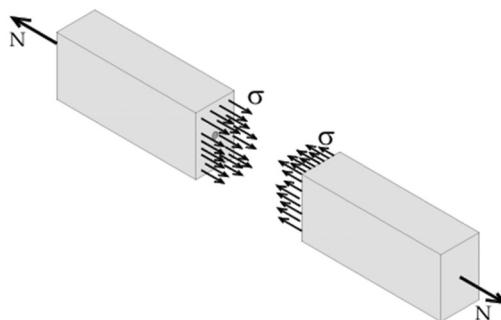
Em contrapartida, Como descrito em Hibbeler (2010), quando a barra está sujeita à várias cargas externas ao longo de seu eixo ou quando sobre alterações na seção transversal, a tensão normal no interior desse elemento pode mudar, o que exige que seja determinada a tensão normal média máxima. Logo, faz-se necessário determinar a força interna N em várias seções ao longo da barra através de um diagrama de força axial ou normal. Então, a força que age sobre a barra pode ser representada pela Figura 5, enquanto a tensão normal média σ gerada pode ser representada pela Figura 6.

Figura 5 - Representação da força interna na barra 1.



Fonte: Coda (2017).

Figura 6 - Representação da força interna na barra 2.



Fonte: Coda (2017).

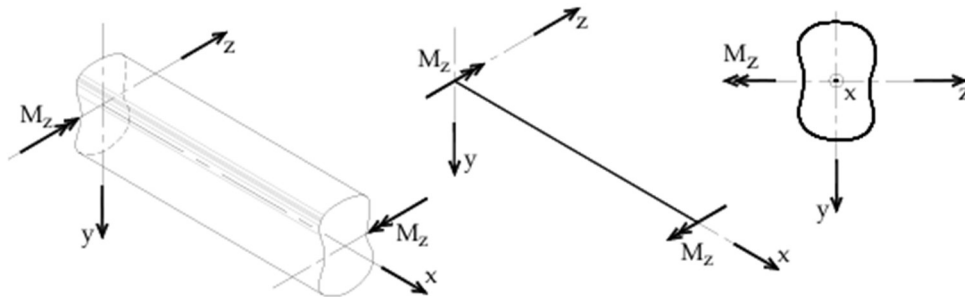
Vale ressaltar que, por convenção, a tensão de compressão é considerada com sinal negativo e a tensão de tração é considerada com sinal positivo.

2.2.2. FLEXÃO GERAL

Determinando o momento interno em uma seção transversal, a tensão por flexão poderá ser calculada. Além disso, a tensão normal por flexão pode ser calculada para diferentes situações em elementos estruturais retos, seja em seção transversal simétrica e com elementos feitos de materiais homogêneos lineares elásticos, seja em seção transversal assimétrica e com elementos feitos de materiais diferentes (Hibbeler, 2010). Assim, a tensão normal pode acontecer em: flexão pura e reta, flexão pura e oblíqua, flexão composta e flexão geral (Coda, 2017).

Consoante Coda (2017), a tensão por flexão pura e reta ocorre, quando, no elemento estrutural ou barra geral, existe momento fletor sendo aplicado na direção ortogonal ao eixo de simetria da seção desse elemento. Essa situação pode ser representada pela Figura 7.

Figura 7 - Representação da flexão pura e reta.



Fonte: Coda (2017).

Logo, para seções homogêneas, isto é, de apenas um material, a tensão normal por flexão pura e reta pode ser representada pela fórmula (2.15) quando o momento fletor está no eixo z e pela fórmula (2.16) quando está no eixo y :

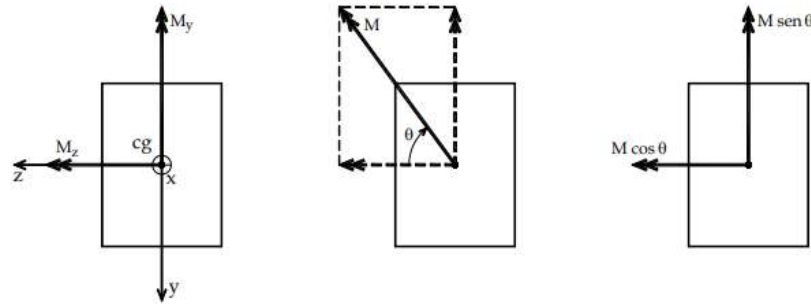
$$\sigma_x = \frac{M_z \cdot y}{I_z} \quad (2.15)$$

$$\sigma_x = \frac{M_y \cdot z}{I_y} \quad (2.16)$$

Conforme Coda (2017), a tensão por flexão pura e oblíqua ocorre, quando, no elemento estrutural ou barra geral, existe momento fletor em dois eixos que, juntos, resultam em um

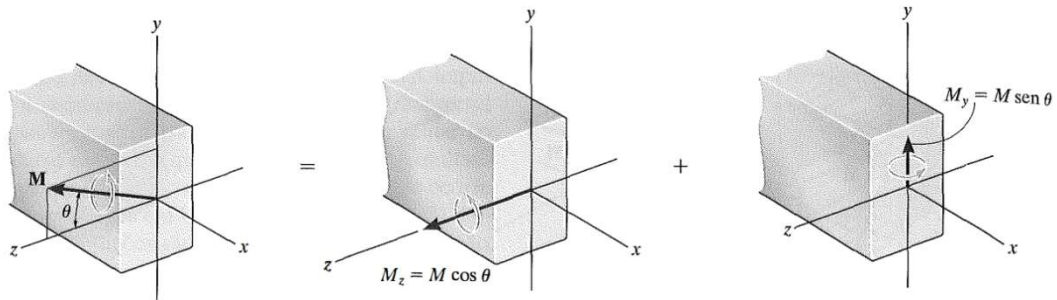
momento fletor inclinado em relação ao sistema de eixos adotados. Essa situação pode ser representada pela Figura 8 e pela Figura 9.

Figura 8 - Representação da flexão pura e oblíqua em duas dimensões.



Fonte: Coda (2017).

Figura 9 - Representação da flexão pura e oblíqua em perspectiva.



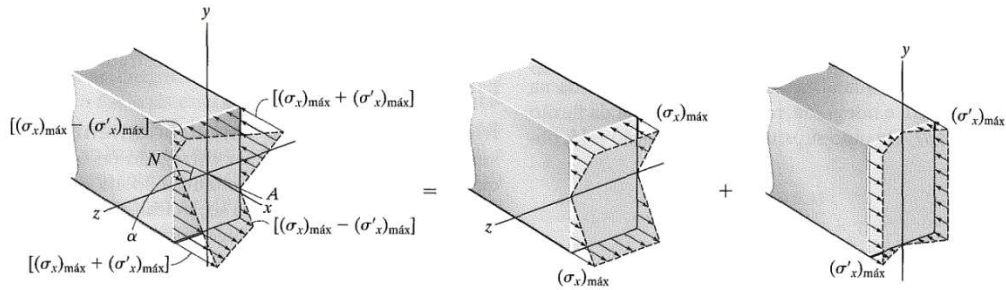
Fonte: Hibbeler (2010).

Logo, para seções homogêneas, a tensão normal por flexão pura e oblíqua pode ser representada pela fórmula (2.17) quando o momento fletor está no eixo z e no eixo y :

$$\sigma_x = \frac{M_z \cdot y}{I_z} + \frac{M_y \cdot z}{I_y} \quad (2.17)$$

Tomando em consideração as Figuras 8 e 9, a representação, em perspectiva, das tensões normais máximas por flexão pura oblíqua pode ser mostrada na Figura 10.

Figura 10 - Representação das tensões normais máximas em perspectiva.



Fonte: Hibbeler (2010).

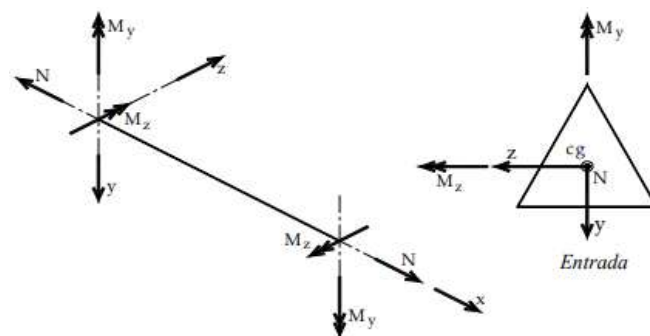
Por último, vale ressaltar que, nas posições do diagrama de tensões normais em que as tensões se anulam, o eixo neutro atravessa. Logo, pode-se dizer que o eixo neutro corresponde a uma linha neutra presente na seção transversal do elemento estrutural em que a tensão normal na flexão é nula, como descrito em Hibbeler (2010). Utilizando as Figuras 8, 9 e 10 como base e considerando o ângulo θ como ângulo de inclinação do momento fletor inclinado, a equação da reta que define o eixo neutro para a seção transversal é dada por (2.18):

$$tg \beta = \frac{I_z}{I_y} \cdot tg \theta \quad (2.18)$$

em que β corresponde ao ângulo da linha neutra em relação ao eixo z .

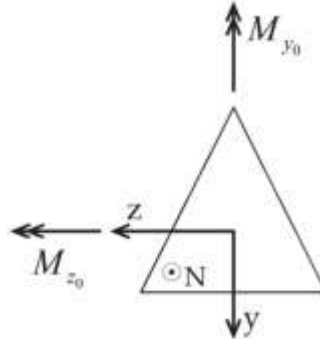
De acordo com Coda (2017), a tensão normal por flexão composta ocorre, quando, no elemento estrutural ou barra geral, existe momento fletor, em pelo menos um dos eixos, e esforço normal. Essa situação pode ser representada na Figura 11, quando o esforço normal se encontra no centro de gravidade da seção, e na Figura 12, quando este se encontra fora do centro de gravidade.

Figura 11 - Representação da flexão composta 1.



Fonte: Coda (2017).

Figura 12 - Representação da flexão composta 2.



Fonte: Coda (2017).

Logo, para seções homogêneas e esforço normal passando pelo centro de gravidade dessas seções, a tensão normal por flexão composta pode ser representada pela fórmula (2.19) quando o momento fletor está no eixo z e no eixo y :

$$\sigma_x = \frac{M_z \cdot y}{I_z} + \frac{M_y \cdot z}{I_y} + \frac{N}{A} \quad (2.19)$$

Em contrapartida, em relação à fórmula (2.19), para seções homogêneas e esforço normal passando fora do centro de gravidade dessas seções, a tensão normal por flexão composta pode ser representada pela fórmula (2.20) quando o momento fletor está no eixo z e no eixo y :

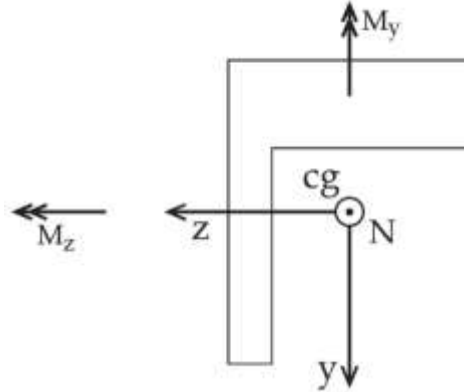
$$\sigma_x = \frac{(M_{z_0} + N \cdot y_N) \cdot y}{I_z} + \frac{(M_{y_0} + N \cdot z_N) \cdot z}{I_y} + \frac{N}{A} \quad (2.20)$$

Sendo y_N e z_N as distâncias do ponto de atuação do esforço normal N até, respectivamente, o eixo z e o eixo y .

Por fim, de acordo com Coda (2017), a tensão normal por flexão geral ocorre quando existe a combinação de momentos fletores e força normal atuando numa barra, ou elemento estrutural reto, cuja seção transversal pode ser simétrica ou assimétrica. Sendo assim, a flexão geral engloba todos os outros casos em que há tensão normal por flexão, com a diferença de

englobar também elementos estruturais com seções transversais assimétricas. Essa situação pode ser representada pela Figura 13.

Figura 13 - Representação da flexão geral.



Fonte: Coda (2017).

Logo, para seções homogêneas e esforço normal passando pelo centro de gravidade dessas seções, a tensão normal por flexão geral pode ser representada pela fórmula (2.21) quando o momento fletor está no eixo z e no eixo y :

$$\sigma_x = \left(\frac{M_z \cdot I_y - M_y \cdot I_{yz}}{I_y \cdot I_z - I_{yz}^2} \right) \cdot y + \left(\frac{M_y \cdot z - M_z \cdot I_{yz}}{I_y \cdot I_z - I_{yz}^2} \right) \cdot z + \frac{N}{A} \quad (2.21)$$

Onde:

M_y, M_z → Momentos fletores nos eixos z e y , respectivamente; no Sistema Internacional (SI), são dados por newtons vezes metro (N.m);

I_y, I_z → Momentos principais de inércia calculados nos eixos z e y , respectivamente; no Sistema Internacional (SI), são dados por metros à quarta potência (m^4);

I_{yz} → Produto de inércia calculados nos eixos z e y ; no Sistema Internacional (SI), é dado por metros à quarta potência (m^4);

y, z → Coordenadas do ponto medidas em relação aos eixos y e z com origem no centroide da área da seção transversal; no Sistema Internacional (SI), são dados em metros (m);

σ → Tensão normal por flexão geral; no Sistema Internacional (SI), é dado em mega pascal (Pa);

N → Força normal interna resultante; no Sistema Internacional (SI), é dado em newtons (N);

A → Área da seção transversal da barra; no Sistema Internacional (SI), é dado em metros quadrados (m^2).

Logo, em relação à fórmula (2.21), para seções homogêneas e esforço normal passando fora do centro de gravidade dessas seções, a tensão normal por flexão geral pode ser representada pela fórmula (2.22) quando o momento fletor está no eixo z e no eixo y :

$$\sigma_x = \left(\frac{(M_{z_0} + N \cdot y_N) \cdot I_y - (M_{y_0} + N \cdot z_N) \cdot I_{yz}}{I_y \cdot I_z - I_{yz}^2} \right) \cdot y + \left(\frac{(M_{y_0} + N \cdot z_N) \cdot I_z - (M_{z_0} + N \cdot y_N) \cdot I_{yz}}{I_y \cdot I_z - I_{yz}^2} \right) \cdot z + \frac{N}{A} \quad (2.22)$$

Sendo y_N e z_N as distâncias do ponto de atuação do esforço normal N até, respectivamente, o eixo z e o eixo y . Logo, para qualquer situação geral de tensão normal por flexão para seções homogêneas, especificamente no referencial adotado na Figura 13, a fórmula (2.22) pode ser usada.

2.3. SEÇÕES NÃO HOMOGÊNEAS

2.3.1. FATOR DE TRANSFORMAÇÃO

Segundo Hibbeler (2010), as seções não homogêneas correspondem a seções transversais formadas por um ou mais materiais. Além disso, consoante Coda (2017), aplicações comuns dessas seções correspondem aos casos de seções não homogêneas utilizando fibras longitudinais em barras gerais ou de seções não homogêneas com trechos maciços com materiais de propriedades elásticas diferentes.

Um exemplo de material cuja seção é não homogênea é concreto armado, em que as barras de aço da armadura têm a função de resistência à tração nas regiões tracionadas das barras gerais, compensando a baixa resistência à tração do concreto, enquanto o concreto tem resistência à compressão. Além disso, no limite de resistência, o comportamento dúctil do aço estrutural compensa o comportamento frágil do concreto ao longo do elemento estrutural (Coda, 2017).

Consoante Hibbeler (2010), apesar de elementos estruturais poderem apresentar seções não homogêneas, a fórmula da flexão geral exige que o material da seção seja homogêneo, logo, a opção para realizar o cálculo em seções não homogêneas é transformá-las em seções homogêneas através de um fator de transformação ou coeficiente de homogeneização n.

Segundo Hibbeler (2010) e Coda (2017), o fator de transformação n é a razão entre os módulos de elasticidade dos diferentes materiais que formam uma seção não homogênea. Assim, utilizando-o como multiplicador, o fator converte as dimensões da seção transversal do elemento estrutural composto em um simples, de apenas um material, de forma que ambos os elementos possuam a mesma resistência. Logo, devido à conversão de dimensões, as fórmulas de propriedades geométricas e de tensão devem ser multiplicadas pelo coeficiente de homogeneização.

O coeficiente de homogeneização é dado por (2.23):

$$n = \frac{E_1}{E_2} \quad n' = \frac{E_2}{E_1} \quad (2.23)$$

Onde:

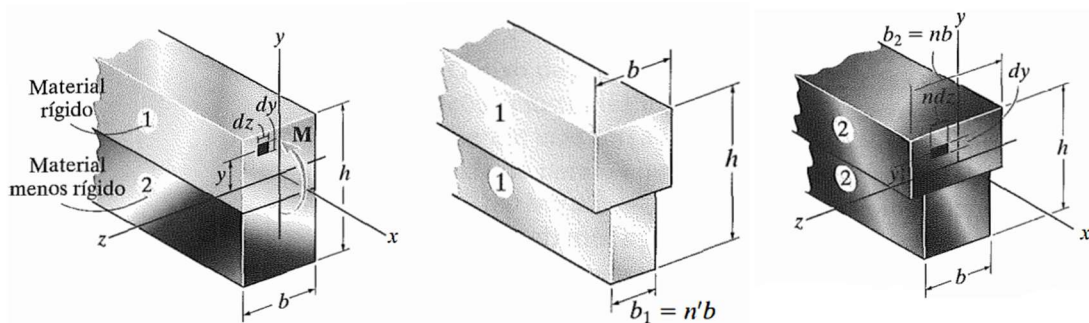
E_1 → O módulo de elasticidade do material mais rígido, ou 1;

E_2 → O módulo de elasticidade do material menos rígido, ou 2;

n, n' → Número adimensional de fator de transformação ou coeficiente de homogeneização.

Logo, como $n > 0$, transforma-se a seção de material 1 em material 2 utilizando o coeficiente e faz-se necessário uma quantidade maior de material 2 para suportar o momento aplicado no elemento estrutural. Em contrapartida, como $n' < 0$, transforma-se a seção de material 2 em material 1 utilizando o coeficiente e faz-se necessário uma quantidade menor de material 1 para suportar o mesmo momento aplicado no elemento estrutural, como mostrado na Figura 14.

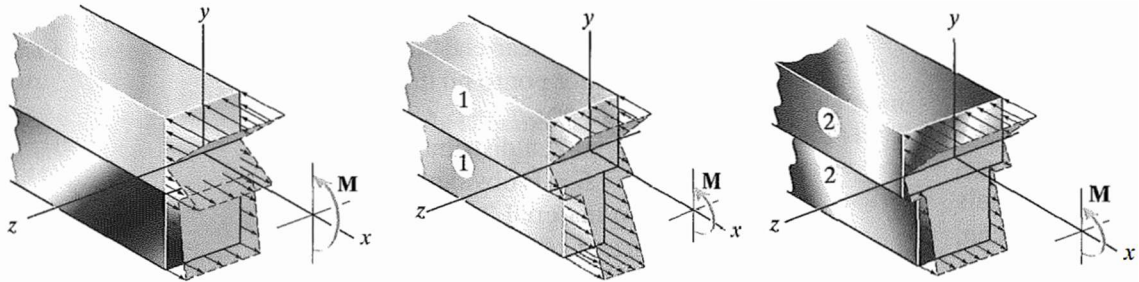
Figura 14 - Representação da transformação de seções não homogêneas.



Fonte: Hibbeler (2010).

De acordo com Hibbeler (2010), sobre a tensão, após a seção transversal não homogênea do elemento estrutural ser transformada em homogênea, a distribuição de tensão na seção será linear, como mostrado na Figura 15.

Figura 15 - Representação da tensão nas seções transformadas.



Fonte: Hibbeler (2010).

Conseqüentemente, as propriedades geométricas e a tensão podem ser calculadas da maneira usual, no entanto, para a seção que foi transformada, a tensão deve ser multiplicada pelo fator de transformação n (ou n') para que a tensão verdadeira seja obtida (Hibbeler, 2010). Generalizando os casos, o fator de transformação será dado por (2.24):

$$\alpha_i = \frac{E_i}{E_{ref}} \quad (2.24)$$

Onde:

E_i → O módulo de elasticidade do material “i”;

E_{ref} → O módulo de elasticidade do material de referência;

α_i → Número adimensional de fator de transformação ou coeficiente de homogeneização do material “i”.

2.3.2. PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DE SEÇÕES NÃO HOMOGÊNEAS

Para generalizar os cálculos das propriedades geométricas para seções homogêneas e não homogêneas, basta multiplicar o fator de transformação presente em (2.24) pelas integrais de área em (2.1), (2.4), (2.5), (2.8), (2.9) e (2.10). Além disso, vale ressaltar que, para o caso de seções homogêneas, o coeficiente será $\alpha_i = 1$, logo, as integrais de área permanecem as mesmas. Desse modo, as integrais de área para as propriedades geométricas de área, momento

estático em x, momento estático em y, momento de inércia em x, momento de inércia em y e produto de inércia são dadas, respectivamente, por (2.25), (2.26), (2.27), (2.28), (2.29) e (2.30):

$$A = \sum_{i=1}^m \alpha_i \int_{A_i} dA \quad (2.25)$$

$$Q_x = \sum_{i=1}^m \alpha_i \int_{A_i} y \cdot dA \quad (2.26)$$

$$Q_y = \sum_{i=1}^m \alpha_i \int_{A_i} x \cdot dA \quad (2.27)$$

$$I_x = \sum_{i=1}^m \alpha_i \int_{A_i} y^2 \cdot dA \quad (2.28)$$

$$I_y = \sum_{i=1}^m \alpha_i \int_{A_i} x^2 \cdot dA \quad (2.29)$$

$$I_{xy} = \sum_{i=1}^m \alpha_i \int_{A_i} x \cdot y \cdot dA \quad (2.30)$$

onde “m” é o número de materiais que compõem a área.

3. FORMULAÇÃO DAS PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS

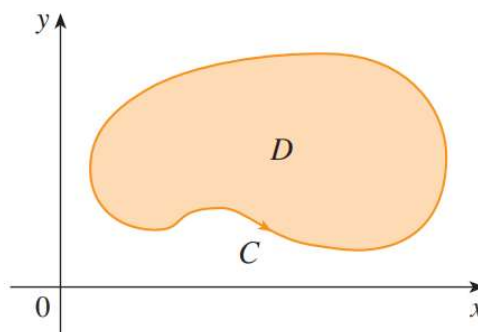
3.1. CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES

No Capítulo 2, foi mostrado que todas as propriedades geométricas das seções transversais dependem da área dessas seções para serem calculadas. Para calcular quaisquer propriedades geométricas de seções transversais poligonais e/ou circulares, sejam simétricas ou assimétricas, homogêneas ou não, é necessário entender o que influencia as integrais de área. Sobre as tensões normais na flexão geral, é necessário adaptar a fórmula geral (2.22) para o referencial de eixos adotado na elaboração do programa computacional.

3.2. TEOREMA DE GREEN

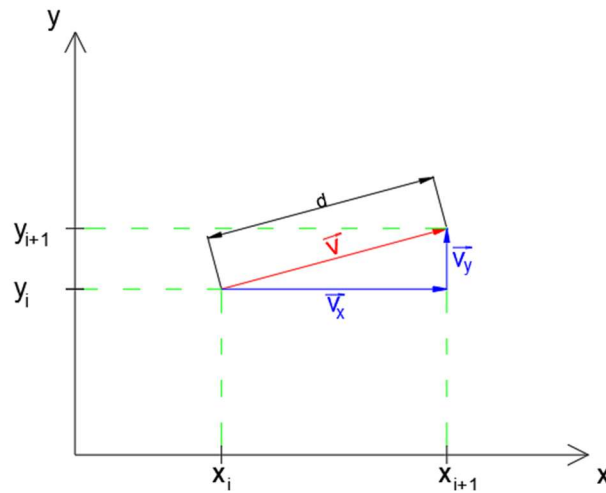
De acordo com Stewart (2013), “o Teorema de Green consiste em uma relação matemática entre uma integral de linha, ou de contorno, ao redor de uma curva C fechada e simples e uma integral dupla de área sobre uma região do plano D delimitado por C ”. Essa descrição pode ser visualmente representada pela Figura 16.

Figura 16 – Representação do Teorema de Green.



Fonte: Stewart (2013).

Pelo Teorema de Green, entende-se que a orientação da curva C deve ser no sentido anti-horário, considerando que a região D é constituída de todos os pontos de C . Dessa forma, sendo o vetor diretor \mathbf{v} um vetor de magnitude d que representa um lado qualquer de um polígono no plano xy , a orientação adotada no vetor diretor \mathbf{v} deve ser dada da esquerda para direita, como mostrado na Figura 17.

Figura 17 – Componentes do vetor \mathbf{v} .

Fonte: Adaptado de Stewart (2013).

Sendo o vetor separado em duas componentes, conforme a fórmula (3.1):

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v}_x, \mathbf{v}_y) = (x_{i+1} - x_i, y_{i+1} - y_i) \quad (3.1)$$

Dessa forma, segundo Stewart (2013), considerando que uma função vetorial $\mathbf{r}(t)$, no intervalo $t \in [a, b]$, descreve a curva fechada S a qual delimita a região A , se P e Q , componentes de campo vetorial \mathbf{F} , possuem derivadas parciais de primeira ordem contínuas sobre essa região, a expressão que mostra que uma integral de linha pode ser considerada como uma integral de área é dada por (3.2):

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = \iint_A \nabla \cdot \mathbf{F} \, dA \quad (3.2)$$

Onde:

\mathbf{F} → Campo vetorial;

\mathbf{n} → Vetor normal;

\mathbf{r} → Função vetorial.

$\nabla \cdot \mathbf{F}$ → Divergente do campo vetorial.

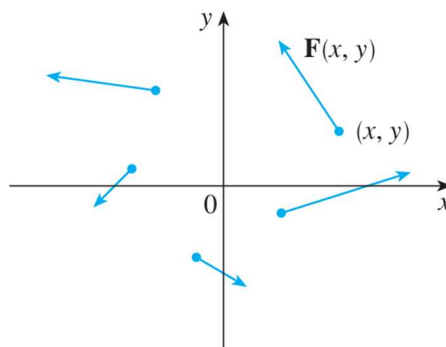
3.3. CONCEITOS IMPORTANTES

Utilizando a fórmula (3.2), para a dedução das fórmulas das propriedades geométricas, existem outros conceitos importantes que devem ser considerados, são eles: campo vetorial, vetor normal \mathbf{n} , divergente de um campo vetorial e parametrização de uma reta.

3.3.1. CAMPO VETORIAL

Conforme Stewart (2013), considerando um conjunto A numa região plana \mathbb{R}^2 , o campo vetorial nessa região é uma função \mathbf{F} que vincula a cada ponto $P(x, y)$ em A , um vetor de duas dimensões $\mathbf{F}(x, y)$, como mostrado na Figura 18.

Figura 18 – Campo vetorial em \mathbb{R}^2 .



Fonte: Adaptado de Stewart (2013).

Como o vetor \mathbf{F} é bidimensional, ele pode ser escrito decompondo seus componentes em P e Q , os chamados campos escalares, como mostrado em (3.3):

$$\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} \quad (3.3)$$

O vetor $\mathbf{F}(x, y)$ será importante na dedução, visto que, será utilizada para alterar os termos que serão integrados durante a dedução das fórmulas das propriedades geométricas.

3.3.2. PARAMETRIZAÇÃO DA RETA

Conforme Stewart (2013), a parametrização da reta em um plano xy pode ser feita a partir de um vetor diretor \mathbf{v} e de um ponto $P(x, y)$ pertencente à reta. Logo, as coordenadas dos pontos da reta, em função do parâmetro t , serão dadas por (3.4):

$$P(x(t), y(t)) = (x_i + \mathbf{v}_x \cdot t, y_i + \mathbf{v}_y \cdot t) \quad (3.4)$$

Portanto, como as fórmulas das propriedades geométricas da área seção transversal serão feitas a partir do primeiro lado do polígono, cujo intervalo de t será $t \in [0, 1]$, sendo todos esses valores números inteiros positivos.

3.3.3. DIVERGENTE DE UM CAMPO VETORIAL

Consoante Stewart (2013), se $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ é um campo vetorial em \mathbb{R}^2 e as derivadas parciais $\frac{\partial P}{\partial x}$ e $\frac{\partial Q}{\partial y}$ existem, o divergente desse campo vetorial é dado por (3.5):

$$\text{div } \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \quad (3.5)$$

Além disso, como o divergente de \mathbf{F} é um campo escalar, em termos de gradiente, ele é considerado o produto escalar do gradiente pelo campo vetorial \mathbf{F} e pode ser dado por (3.6):

$$\text{div } \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \cdot (P, Q) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \quad (3.6)$$

Pela resolução do Teorema de Green, a integral de contorno é dada por (3.7):

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_a^b (P \cdot dy - Q \cdot dx) = \iint_A \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dA \quad (3.7)$$

Portanto, pela resolução do Teorema de Green, a integral de contorno é dada por (3.8):

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = \iint_A \nabla \cdot \mathbf{F} \, dA \quad (3.8)$$

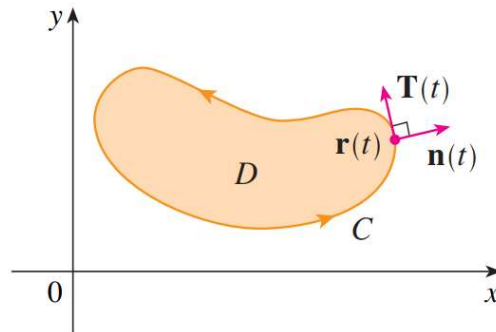
3.3.4. VETOR NORMAL

Sobre o vetor diretor \mathbf{v} , sabe-se que ele é dado por (3.1). Além disso, sabe-se que, assim como o vetor tangente unitário $\mathbf{T}(t)$ mostrado na Figura 19, o vetor diretor \mathbf{v} é perpendicular a um vetor normal $\mathbf{n}(t)$, logo, também é ortogonal ao mesmo vetor, como mostrado na Figura 20.

Assim, o vetor normal $\mathbf{n}(t)$ é dado (3.9):

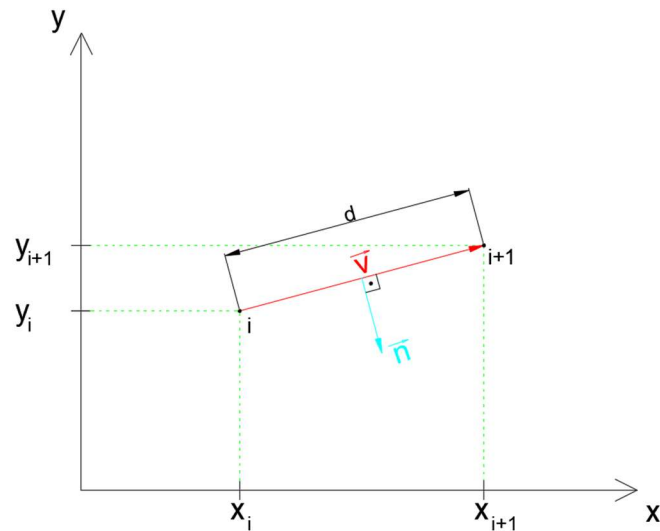
$$\mathbf{n}(t) = \left(\frac{v_y}{d}, -\frac{v_x}{d} \right) \quad (3.9)$$

Figura 19 – Representação do vetor normal \mathbf{n} .



Fonte: Stewart, 2013.

Figura 20 – Representação dos vetores ortogonais \mathbf{v} e \mathbf{n} .



Fonte: Autoria própria.

3.4. FORMULAÇÕES DAS PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS

Nos itens anteriores, foram mostradas condições importantes para o desenvolvimento das formulações das propriedades geométricas:

- a) O ponto $P(x, y)$, pertencente a uma reta parametrizada cuja direção é a mesma de vetor diretor \mathbf{v} , é dado por (3.4), de forma que o intervalo de t seja $t \in [0, 1]$, logo, a partir das coordenadas desse ponto, será definido o intervalo de integração da integral de linha;
- b) Através da resolução Teorema de Green, pela equação (3.2), uma integral de área A delimitada pela função vetorial $\mathbf{r}(t)$ é igual a uma integral de linha de curva S definida pela equação vetorial $\mathbf{r}(t)$, logo, todas as integrais de área das propriedades geométricas terão o mesmo formato;
- c) O vetor diretor \mathbf{v} é um vetor tangente à curva S e ortogonal ao vetor unitário normal \mathbf{n} , logo, o vetor unitário normal \mathbf{n} será dado por (3.9).

Além disso, apesar das integrais de área das propriedades geométricas presentes em livros de Mecânica dos Sólidos para graduação serem representadas por integrais simples, para livros de Cálculo, estas são integrais duplas.

Portanto, considerando essas condições, é necessário verificar, então, o campo vetorial $\mathbf{F}(x, y)$ que cada propriedade geométrica terá visto que, conforme a fórmula (3.7), transformar uma integral de área em uma integral de linha resulta em reverter o divergente do campo vetorial para o campo vetorial na forma algébrica. Portanto, baseado nessas considerações, será possível deduzir as formulações das propriedades geométricas de seções transversais homogêneas de lados retos.

3.4.1. FÓRMULA DA ÁREA

A fórmula geral da área para seções homogêneas é dada integral de área (2.1). Logo, pela equação (3.7), tem-se que essa relação é dada por (3.10):

$$A = \int_A dA = \iint_A \nabla \cdot \mathbf{F} dA \quad (3.10)$$

Assim, o divergente do campo vetorial \mathbf{F} da fórmula geral da área é dado por (3.11):

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 1 \quad (3.11)$$

Então, o campo vetorial na sua forma algébrica pode ser adotado por (3.12) ou (3.13):

$$\mathbf{F} = (x, 0) \quad (3.12)$$

$$\mathbf{F} = (0, y) \quad (3.13)$$

Aplicando as formas algébricas do campo vetorial (3.12) e (3.13) na fórmula (3.6):

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \cdot (x, 0) = \frac{\partial(x)}{\partial x} + \frac{\partial(0)}{\partial y} = 1$$

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \cdot (0, y) = \frac{\partial(0)}{\partial x} + \frac{\partial(y)}{\partial y} = 1$$

Então, os campos vetoriais (3.12) e (3.13) possuem como sendo o divergente do campo vetorial (3.11), o que valida os campos vetoriais (3.12) e (3.13) como sendo opções para a dedução. Vale ressaltar que qualquer campo vetorial pode ser utilizado na dedução, com a condição de que o divergente do campo vetorial escolhido seja equivalente ao integrando da integral (3.10) que, nesse caso, é “1”. Essa explicação será considerada nos itens 3.4.2, 3.4.3, 3.4.5, 3.4.6 e 3.4.8.

Na dedução, foi adotado o campo vetorial dado por (3.12), mas ambos resultam em fórmulas semelhantes. Assim, o termo integrável seria o resultado do produto escalar entre a forma algébrica do campo vetorial \mathbf{F} e o vetor unitário \mathbf{n} , como foi mostrado em (3.2). Então, seguindo a dedução, tem-se por (3.14):

$$A = \int_S (x, 0) \cdot \left(\frac{v_y}{d}, -\frac{v_x}{d} \right) \cdot d \cdot dt = \int_S \left(\frac{x \cdot v_y}{d} \right) \cdot d \cdot dt = \int_S x \cdot v_y \cdot dt \Rightarrow$$

$$A = \int_S x \cdot v_y \cdot dt \quad (3.14)$$

Em seguida, deve-se: aplicar o intervalo de integração $t \in [0, 1]$ e substituir o correspondente do ponto $P(x, y)$ no eixo x presente em (3.4) para, assim, deixar a equação da integral em função do parâmetro t . Logo, seguindo a dedução, tem-se por (3.15):

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 x \cdot v_y \cdot dt = \int_0^1 x \cdot v_y \cdot dt = \int_0^1 (x_i + v_x \cdot t) \cdot v_y \cdot dt \Rightarrow \\ &\Leftrightarrow A = \int_0^1 (x_i + v_x \cdot t) \cdot v_y \cdot dt \end{aligned} \quad (3.15)$$

De acordo com Stewart (2013), a integral de uma constante vezes uma função corresponde à constante vezes a integral dessa função, regra que é dada por (3.16):

$$\int_a^b k \cdot f(x) \cdot dx = k \cdot \int_a^b f(x) \cdot dx \quad (3.16)$$

Além disso, a integral de uma função é dada por (3.17):

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = F(b) - F(a) \quad (3.17)$$

Logo, seguindo a dedução, tem-se por (3.18):

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 (x_i + v_x \cdot t) \cdot v_y \cdot dt = v_y \cdot \int_0^1 (x_i + v_x \cdot t) \cdot dt = v_y \cdot \left(x_i \cdot t + \frac{v_x \cdot t^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \\ &= v_y \cdot \left(\frac{2 \cdot x_i \cdot t}{2} + \frac{v_x \cdot t^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{v_y}{2} \cdot (2 \cdot x_i \cdot t + v_x \cdot t^2) \Big|_0^1 = \frac{v_y \cdot (2 \cdot x_i + v_x)}{2} \Rightarrow \\ &\Leftrightarrow A = \frac{v_y \cdot (2 \cdot x_i + v_x)}{2} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Então, considerando o equivalente dos componentes do vetor diretor \mathbf{v} nos eixos x e y em (3.1), tem-se por (3.19):

$$A = \frac{v_y \cdot (2 \cdot x_i + v_x)}{2} = \frac{(y_{i+1} - y_i) \cdot (2 \cdot x_i + x_{i+1} - x_i)}{2} = \frac{(y_{i+1} - y_i) \cdot (x_{i+1} + x_i)}{2} \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{(x_{i+1} + x_i) \cdot (y_{i+1} - y_i)}{2} \quad (3.19)$$

Vale ressaltar que a fórmula obtida em (3.19) corresponde a somente um lado de um polígono, logo, deve-se generalizar essa fórmula como uma somatória para contemplar qualquer polígono, independentemente do número de lados. Além disso, de acordo com Stewart (2013), quanto à somatória com uma constante, sem que a constante dependa de i , tem-se por (3.20):

$$\sum_{i=m}^n c \cdot a_i = c \cdot \sum_{i=m}^n a_i \quad (3.20)$$

Portanto, generalizando a equação (3.19), sendo “ n ” o número total de arestas do polígono e sendo “ i ” a primeira aresta do polígono, a fórmula geral da área de seções transversais homogêneas para lados retos é dada por (3.21):

$$A = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n (x_{i+1} + x_i) \cdot (y_{i+1} - y_i) \quad (3.21)$$

3.4.2. FÓRMULA DO MOMENTO ESTÁTICO DE ÁREA EM X

O divergente do campo vetorial da fórmula geral do momento estático de área em x é dado por (3.22):

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = y \quad (3.22)$$

Então, o campo vetorial, na sua forma algébrica, pode ser adotado por (3.23):

$$\mathbf{F} = \left(0, \frac{y^2}{2} \right) \quad (3.23)$$

Aplicando a forma algébrica do campo vetorial (3.23) na fórmula (3.6):

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \cdot \left(0, \frac{y^2}{2} \right) = \frac{\partial(0)}{\partial x} + \frac{\partial \left(\frac{y^2}{2} \right)}{\partial y} = y$$

Então, o campo vetorial (3.23) possui como sendo o divergente do campo vetorial (3.22).

A partir desse ponto, o procedimento adotado na fórmula geral da área foi o mesmo, resultando na fórmula (3.24):

$$\begin{aligned} Q_x &= \int_S \left(0, \frac{y^2}{2} \right) \cdot \left(\frac{v_y}{d}, -\frac{v_x}{d} \right) \cdot d \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot \int_S \left(-\frac{y^2 \cdot v_x}{d} \right) \cdot d \cdot dt = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \int_S y^2 \cdot v_x \cdot dt = -\frac{1}{2} \cdot \int_0^1 y^2 \cdot v_x \cdot dt = -\frac{1}{2} \cdot \int_0^1 (y_i + v_y \cdot t)^2 \cdot v_x \cdot dt = \\ &= -\frac{v_x}{2} \cdot \int_0^1 (y_i + v_y \cdot t)^2 \cdot dt = -\frac{v_x}{2} \cdot \int_0^1 (y_i^2 + 2 \cdot y_i \cdot v_y \cdot t + v_y^2 \cdot t^2) \cdot dt \Rightarrow \\ &\Leftrightarrow Q_x = \frac{(x_i - x_{i+1}) \cdot (y_i^2 + y_i \cdot y_{i+1} + y_{i+1}^2)}{6} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Portanto, generalizando a equação (3.24), sendo “n” o número total de arestas do polígono e sendo “i” a primeira aresta do polígono, a fórmula geral do momento estático de área em x de seções transversais homogêneas para lados retos é dada por (3.24).

$$Q_x = \frac{1}{6} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i+1}) \cdot (y_i^2 + y_i \cdot y_{i+1} + y_{i+1}^2) \quad (3.25)$$

3.4.3. FÓRMULA DO MOMENTO ESTÁTICO DE ÁREA EM Y

O divergente do campo vetorial da fórmula geral do momento estático de área em y é dado por (3.26):

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = x \quad (3.26)$$

Então, o campo vetorial, na sua forma algébrica, pode ser adotado conforme (3.27):

$$\mathbf{F} = \left(\frac{x^2}{2}, 0 \right) \quad (3.27)$$

Aplicando a forma algébrica do campo vetorial (3.27) na fórmula (3.6):

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \cdot \left(\frac{x^2}{2}, 0 \right) = \frac{\partial \left(\frac{x^2}{2} \right)}{\partial x} + \frac{\partial(0)}{\partial y} = x$$

Então, o campo vetorial (3.27) possui como sendo o divergente do campo vetorial (3.26).

A partir desse ponto, o procedimento adotado na fórmula geral da área foi o mesmo, resultando na fórmula (3.28):

$$\begin{aligned} Q_y &= \int_S \left(\frac{x^2}{2}, 0 \right) \cdot \left(\frac{v_y}{d}, -\frac{v_x}{d} \right) \cdot d \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot \int_S \left(\frac{x^2 \cdot v_y}{d} \right) \cdot d \cdot dt = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int_S x^2 \cdot v_y \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 x^2 \cdot v_y \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 (x_i + v_x \cdot t)^2 \cdot v_y \cdot dt = \\ &= \frac{v_y}{2} \cdot \int_0^1 (x_i + v_x \cdot t)^2 \cdot dt = \frac{v_y}{2} \cdot \int_0^1 (x_i^2 + 2 \cdot x_i \cdot v_x \cdot t + v_x^2 \cdot t^2) \cdot dt \Rightarrow \\ &\Leftrightarrow Q_y = \frac{(y_{i+1} - y_i) \cdot (x_i^2 + x_i \cdot x_{i+1} + x_{i+1}^2)}{6} \quad (3.28) \end{aligned}$$

Portanto, generalizando a equação (3.28), sendo “n” o número total de arestas do polígono e sendo “i” a primeira aresta do polígono, a fórmula geral do momento estático de área em y de seções transversais homogêneas para lados retos é dada por (3.29).

$$Q_y = \frac{1}{6} \cdot \sum_{i=1}^n (y_{i+1} - y_i) \cdot (x_i^2 + x_i \cdot x_{i+1} + x_{i+1}^2) \quad (3.29)$$

3.4.4. FÓRMULAS DO CENTROIDE

Com a dedução da fórmula da área (3.21) e das fórmulas dos momentos estáticos em x (3.25) e em y (3.29), com base em (2.6) e (2.7), as fórmulas do centroide de seções transversais homogêneas para lados retos são dadas por (3.30), paralelo ao eixo x , e por (3.31), paralelo ao eixo y :

$$\begin{aligned} C_x &= \frac{Q_y}{A} = \frac{\frac{1}{6} \cdot \sum_{i=1}^n (y_{i+1} - y_i) \cdot (x_i^2 + x_i \cdot x_{i+1} + x_{i+1}^2)}{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_{i+1} + x_i) \cdot (y_{i+1} - y_i)} \Rightarrow \\ &\Leftrightarrow C_x = \frac{\frac{1}{6} \cdot \sum_{i=1}^n (y_{i+1} - y_i) \cdot (x_i^2 + x_i \cdot x_{i+1} + x_{i+1}^2)}{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_{i+1} + x_i) \cdot (y_{i+1} - y_i)} \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} C_y &= \frac{Q_x}{A} = \frac{\frac{1}{6} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i+1}) \cdot (y_i^2 + y_i \cdot y_{i+1} + y_{i+1}^2)}{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_{i+1} + x_i) \cdot (y_{i+1} - y_i)} \Rightarrow \\ &\Leftrightarrow C_y = \frac{\frac{1}{6} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i+1}) \cdot (y_i^2 + y_i \cdot y_{i+1} + y_{i+1}^2)}{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_{i+1} + x_i) \cdot (y_{i+1} - y_i)} \end{aligned} \quad (3.31)$$

3.4.5. FÓRMULA DO MOMENTO DE INÉRCIA EM X

O divergente do campo vetorial da fórmula geral do momento de inércia em x é dado por (3.32):

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = y^2 \quad (3.32)$$

Então, o campo vetorial, na sua forma algébrica, pode ser adotado por (3.33):

$$\mathbf{F} = \left(0, \frac{y^3}{3}\right) \quad (3.33)$$

Aplicando a forma algébrica do campo vetorial (3.33) na fórmula (3.6):

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) \cdot \left(0, \frac{y^3}{3}\right) = \frac{\partial(0)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\frac{y^3}{3}\right)}{\partial y} = y^2$$

Então, o campo vetorial (3.33) possui como sendo o divergente do campo vetorial (3.32).

A partir desse ponto, o procedimento adotado na fórmula geral da área foi o mesmo, resultando na fórmula (3.34):

$$\begin{aligned} I_x &= \int_S \left(0, \frac{y^3}{3}\right) \cdot \left(\frac{v_y}{d}, -\frac{v_x}{d}\right) \cdot d \cdot dt = \frac{1}{3} \cdot \int_S -\left(\frac{y^3 \cdot v_x}{d}\right) \cdot d \cdot dt = \\ &= -\frac{1}{3} \cdot \int_S y^3 \cdot v_x \cdot dt = -\frac{1}{3} \cdot \int_0^1 y^3 \cdot v_x \cdot dt = -\frac{1}{3} \cdot \int_0^1 (y_i + v_y \cdot t)^3 \cdot v_x \cdot dt = \\ &= -\frac{v_x}{3} \cdot \int_0^1 (y_i + v_y \cdot t)^3 \cdot dt = -\frac{v_x}{3} \cdot \int_0^1 (y_i^3 + 3 \cdot y_i \cdot v_y^2 \cdot t^2 + 3 \cdot y_i^2 \cdot v_y \cdot t + v_y^3 \cdot t^3) \cdot dt \Rightarrow \\ &\Leftrightarrow I_x = \frac{(y_i^2 + y_{i+1}^2) \cdot (x_i - x_{i+1}) \cdot (y_i + y_{i+1})}{12} \quad (3.34) \end{aligned}$$

Portanto, generalizando a equação (3.34), sendo “n” o número total de arestas do polígono e sendo “i” a primeira aresta do polígono, a fórmula geral do momento de inércia em x de seções transversais homogêneas para lados retos é dada por (3.35).

$$I_x = \frac{1}{12} \cdot \sum_{i=1}^n (y_i^2 + y_{i+1}^2) \cdot (x_i - x_{i+1}) \cdot (y_i + y_{i+1}) \quad (3.35)$$

3.4.6. FÓRMULA DO MOMENTO DE INÉRCIA EM Y

O divergente do campo vetorial da fórmula geral do momento de inércia em y é dado por (3.36):

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = x^2 \quad (3.36)$$

Então, o campo vetorial, na sua forma algébrica, que pode ser adotado por (3.37):

$$\mathbf{F} = \left(\frac{x^3}{3}, 0 \right) \quad (3.37)$$

Aplicando a forma algébrica do campo vetorial (3.37) na fórmula (3.6):

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \cdot \left(\frac{x^3}{3}, 0 \right) = \frac{\partial \left(\frac{x^3}{3} \right)}{\partial x} + \frac{\partial(0)}{\partial y} = x^2$$

Então, o campo vetorial (3.37) possui como sendo o divergente do campo vetorial (3.36).

A partir desse ponto, o procedimento adotado na fórmula geral da área foi o mesmo, resultando na fórmula (3.38):

$$\begin{aligned} I_y &= \int_S \left(\frac{x^3}{3}, 0 \right) \cdot \left(\frac{v_y}{d}, -\frac{v_x}{d} \right) \cdot d \cdot dt = \frac{1}{3} \cdot \int_S \left(\frac{x^3 \cdot v_y}{d} \right) \cdot d \cdot dt = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \int_S x^3 \cdot v_y \cdot dt = \frac{1}{3} \cdot \int_0^1 x^3 \cdot v_y \cdot dt = \frac{1}{3} \cdot \int_0^1 (x_i + v_x \cdot t)^3 \cdot v_y \cdot dt = \\ &= \frac{v_y}{3} \cdot \int_0^1 (x_i + v_x \cdot t)^3 \cdot dt = \frac{v_y}{3} \cdot \int_0^1 (x_i^3 + 3 \cdot x_i \cdot v_x^2 \cdot t^2 + 3 \cdot x_i^2 \cdot v_x \cdot t + v_x^3 \cdot t^3) \cdot dt \Rightarrow \\ &\Leftrightarrow I_y = \frac{(x_i^2 + x_{i+1}^2) \cdot (x_i + x_{i+1}) \cdot (y_{i+1} - y_i)}{12} \quad (3.38) \end{aligned}$$

Portanto, generalizando a equação (3.38), sendo “n” o número total de arestas do polígono e sendo “i” a primeira aresta do polígono, a fórmula geral do momento de inércia em y de seções transversais homogêneas para lados retos é dada por (3.39).

$$I_y = \frac{1}{12} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i^2 + x_{i+1}^2) \cdot (x_i + x_{i+1}) \cdot (y_{i+1} - y_i) \quad (3.39)$$

3.4.7. FÓRMULAS DO RAIÃO DE GIRAÇÃO

Com a dedução da fórmula da área (3.21) e das fórmulas dos momentos inércia em x (3.35) e em y (3.39), com base em (2.11) e (2.12), as fórmulas do raio de giração de seções transversais homogêneas para lados retos são dadas por (3.40), paralelo ao eixo y , e por (3.41), paralelo ao eixo x :

$$\begin{aligned} i_x &= \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{12} \cdot \sum_{i=1}^n (y_i^2 + y_{i+1}^2) \cdot (x_i - x_{i+1}) \cdot (y_i + y_{i+1})}{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_{i+1} + x_i) \cdot (y_{i+1} - y_i)}} \Rightarrow \\ &\Leftrightarrow i_x = \sqrt{\frac{\frac{1}{12} \cdot \sum_{i=1}^n (y_i^2 + y_{i+1}^2) \cdot (x_i - x_{i+1}) \cdot (y_i + y_{i+1})}{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_{i+1} + x_i) \cdot (y_{i+1} - y_i)}} \quad (3.40) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_y &= \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{12} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i^2 + x_{i+1}^2) \cdot (x_i + x_{i+1}) \cdot (y_{i+1} - y_i)}{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_{i+1} + x_i) \cdot (y_{i+1} - y_i)}} \Rightarrow \\ i_y &= \sqrt{\frac{\frac{1}{12} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i^2 + x_{i+1}^2) \cdot (x_i + x_{i+1}) \cdot (y_{i+1} - y_i)}{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_{i+1} + x_i) \cdot (y_{i+1} - y_i)}} \quad (3.41) \end{aligned}$$

3.4.8. FÓRMULA DO PRODUTO DE INÉRCIA

O divergente do campo vetorial \mathbf{F} da fórmula geral do produto de inércia é dado por (3.42):

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = x \cdot y \quad (3.42)$$

Então, o campo vetorial, na sua forma algébrica, pode ser adotado por (3.43):

$$\mathbf{F} = \left(\frac{x^2 \cdot y}{2}, 0 \right) \quad (3.43)$$

Aplicando a forma algébrica do campo vetorial (3.43) na fórmula (3.6):

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \cdot \left(\frac{x^2 \cdot y}{2}, 0 \right) = \frac{\partial \left(\frac{x^2 \cdot y}{2} \right)}{\partial x} + \frac{\partial(0)}{\partial y} = x \cdot y$$

Então, o campo vetorial (3.43) possui como sendo o divergente do campo vetorial (3.42).

A partir desse ponto, o procedimento adotado na fórmula geral da área foi o mesmo, resultando na fórmula (3.44):

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \int_S \left(\frac{x^2 \cdot y}{2}, 0 \right) \cdot \left(\frac{v_y}{d}, -\frac{v_x}{d} \right) \cdot d \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot \int_S \left(\frac{x^2 \cdot y \cdot v_y}{d} \right) \cdot d \cdot dt \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int_S x^2 \cdot y \cdot v_y \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 x^2 \cdot y \cdot v_y \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 (x_i + v_x \cdot t)^2 \cdot (y_i + v_y \cdot t) \cdot v_y \cdot dt = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 (x_i + v_x \cdot t)^2 \cdot (y_i + v_y \cdot t) \cdot dt = \\ &= \frac{v_y}{2} \cdot \int_0^1 (x_i^2 + 2 \cdot x_i \cdot v_x \cdot t + v_x^2 \cdot t^2) \cdot (y_i + v_y \cdot t) \cdot dt \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow I_{xy} = \frac{(3 \cdot x_i^2 + 2 \cdot x_i \cdot x_{i+1} + x_{i+1}^2) \cdot (y_i \cdot y_{i+1} - y_i^2)}{24} + \frac{(x_i^2 + 2 \cdot x_i \cdot x_{i+1} + 3 \cdot x_{i+1}^2) \cdot (y_{i+1}^2 - y_i \cdot y_{i+1})}{24} \quad (3.44)$$

Portanto, generalizando a equação (3.44), sendo “n” o número total de arestas do polígono e sendo “i” a primeira aresta do polígono, a fórmula geral do produto de inércia de seções transversais homogêneas para lados retos é dada por (3.45).

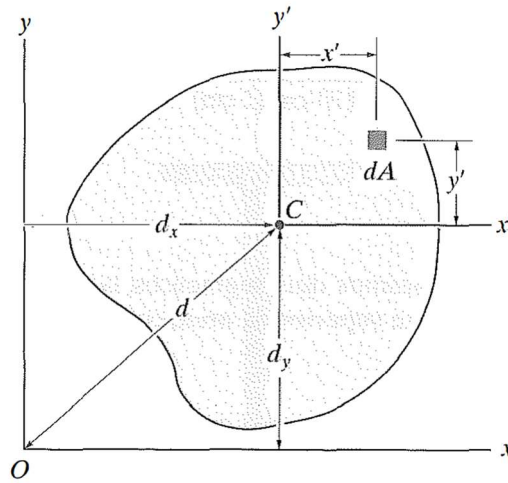
$$I_{xy} = \frac{1}{24} \cdot \sum_{i=1}^n [(3 \cdot x_i^2 + 2 \cdot x_i \cdot x_{i+1} + x_{i+1}^2) \cdot (y_i \cdot y_{i+1} - y_i^2) + (x_i^2 + 2 \cdot x_i \cdot x_{i+1} + 3 \cdot x_{i+1}^2) \cdot (y_{i+1}^2 - y_i \cdot y_{i+1})] \quad (3.45)$$

A dedução completa das fórmulas das propriedades geométricas de seções transversais homogêneas para lados retos encontra-se no Apêndice A.

3.5. TEOREMA DOS EIXOS PARALELOS

Conforme Hibbeler (2010), “Se o momento de inércia de uma área em torno de um eixo centroide for conhecido, pode-se determinar o momento de inércia da área em torno de um eixo paralelo correspondente através do Teorema dos Eixos Paralelos”. Então, para deduzir o teorema, deve-se considerar o momento de inércia em torno de x , cuja fórmula é (2.8). Além disso, considerando um elemento diferencial dA , esse elemento está localizado a uma distância y' do eixo centroide x' , e a distância entre os eixos paralelos x e x' é definida como d_y . Isso pode ser mostrado na Figura 21 para os eixos x e y .

Figura 21 – Representação de uma seção transversal.



Fonte: Hibbeler, 2010.

Para o elemento diferencial dA , o momento de inércia em x é dado por (3.46) e, generalizando para a área total do elemento, ela resulta em (3.47):

$$dI_x = y^2 \cdot dA \Rightarrow dI_x = (y' + d_y)^2 \cdot dA \quad (3.46)$$

$$I_x = \int_A (y' + d_y)^2 \cdot dA = \int_A y'^2 \cdot dA + 2d_y \cdot \int_A y' \cdot dA + d_y^2 \cdot \int_A dA \quad (3.47)$$

Por fim, sabendo o segundo termo da integral (3.47) é nulo, pelo fato do eixo x' passar pelo centroide do elemento, a fórmula do momento de inércia em torno de x' é dada por (3.48):

$$I_x = I_{x_{cg}} + A \cdot d_y^2 \Rightarrow I_x = I_{x_{cg}} + A \cdot (y - y')^2 \Rightarrow I_{x_{cg}} = I_x - A \cdot C_y^2 \quad (3.48)$$

Analogamente, a fórmula do momento de inércia em torno de y' é dada por (3.49) e a fórmula do produto de inércia é dado por (3.50):

$$I_y = I_{y_{cg}} + A \cdot d_x^2 \Rightarrow I_y = I_{y_{cg}} + A \cdot (x - x')^2 \Rightarrow I_{y_{cg}} = I_y - A \cdot C_x^2 \quad (3.49)$$

$$I_{xy} = I_{xy_{cg}} + A \cdot d_x \cdot d_y \Rightarrow I_{xy} = I_{xy_{cg}} + A \cdot (x - x') \cdot (y - y') \Rightarrow I_{xy_{cg}} = I_{xy} - A \cdot C_x \cdot C_y \quad (3.50)$$

Vale ressaltar que, as fórmulas (3.48), (3.49) e (3.50) a partir das fórmulas deduzidas no tópico 3.4 do Capítulo 3 de área, momentos de inércia, produto de inércia e centroide.

Sobre os centroides em x e y , nas fórmulas acima, é representado, respectivamente, por C_x e C_y .

3.6. PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS PARA SEÇÕES NÃO HOMOGÊNEAS

No Capítulo 2, mostrou-se que, para generalizar os cálculos das propriedades geométricas para seções homogêneas e não homogêneas, bastou multiplicar o fator de transformação pelas integrais de área, o que gerou as integrais de área (2.25), (2.26), (2.27), (2.28), (2.29) e (2.30).

Além disso, ao longo Capítulo 3, o Teorema de Green foi utilizado para converter as integrais de área das propriedades geométricas de seções transversais em integrais de linha e, assim, gerar somatórias dessas propriedades. Dessa forma, utilizando as somatórias presentes em (3.21), (3.24), (3.29), (3.35), (3.39), (3.45) e aplicando a propriedade da somatória em (3.20), assim como foi feito anteriormente, multiplicou-se o fator de transformação pelas fórmulas das propriedades geométricas, o que gerou as somatórias (3.51), (3.52), (3.53), (3.54), (3.55) e (3.56):

$$A = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{2} \cdot (x_{i+1} + x_i) \cdot (y_{i+1} - y_i) \quad (3.51)$$

$$Q_x = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{6} \cdot (x_i - x_{i+1}) \cdot (y_i^2 + y_i \cdot y_{i+1} + y_{i+1}^2) \quad (3.52)$$

$$Q_y = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{6} \cdot (y_{i+1} - y_i) \cdot (x_i^2 + x_i \cdot x_{i+1} + x_{i+1}^2) \quad (3.53)$$

$$I_x = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{12} \cdot (y_i^2 + y_{i+1}^2) \cdot (x_i - x_{i+1}) \cdot (y_i + y_{i+1}) \quad (3.54)$$

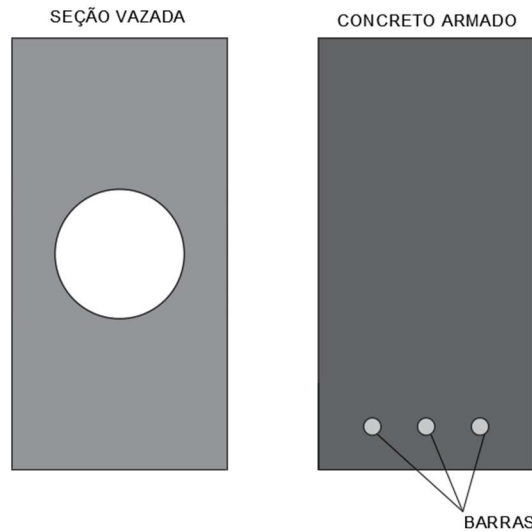
$$I_y = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{12} \cdot (x_i^2 + x_{i+1}^2) \cdot (x_i + x_{i+1}) \cdot (y_{i+1} - y_i) \quad (3.55)$$

$$I_{xy} = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{24} \cdot [(3 \cdot x_i^2 + 2 \cdot x_i \cdot x_{i+1} + x_{i+1}^2) \cdot (y_i \cdot y_{i+1} - y_i^2) + (x_i^2 + 2 \cdot x_i \cdot x_{i+1} + 3 \cdot x_{i+1}^2) \cdot (y_{i+1}^2 - y_i \cdot y_{i+1})] \quad (3.56)$$

3.7. SEÇÕES CIRCULARES

Casos comuns de aplicação de seções circulares e/ou semicirculares podem ser observados em seções homogêneas vazadas, cujas aberturas são círculos ou semicírculos, ou seções não homogêneas utilizando fibras longitudinais em barras gerais (Coda, 2017), como pode ser mostrado na Figura 22.

Figura 22 – Seções com seções circulares.



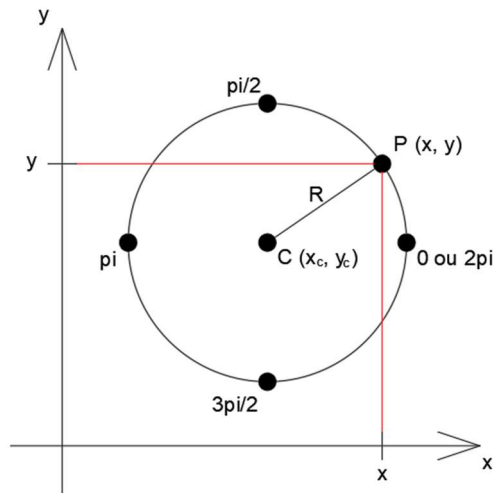
Fonte: Autoria própria.

Para englobar as seções circulares e/ou semicirculares no cálculo das propriedades geométricas, é necessário descrever as fórmulas que descrevem a parametrização da circunferência. De acordo com Stewart (2013), considerando uma circunferência de centro $C(x_c, y_c)$, raio R e ângulo θ variando no intervalo dado por $\theta \in [0, 2\pi]$, a parametrização da circunferência é dada por (3.57):

$$P(x, y) = (x_c + R \cdot \cos(\theta), y_c + R \cdot \sin(\theta)) \quad (3.57)$$

A representação da circunferência e de sua parametrização pode ser mostrada na Figura 23.

Figura 23 – Representação da parametrização da circunferência.



Fonte: Autoria própria.

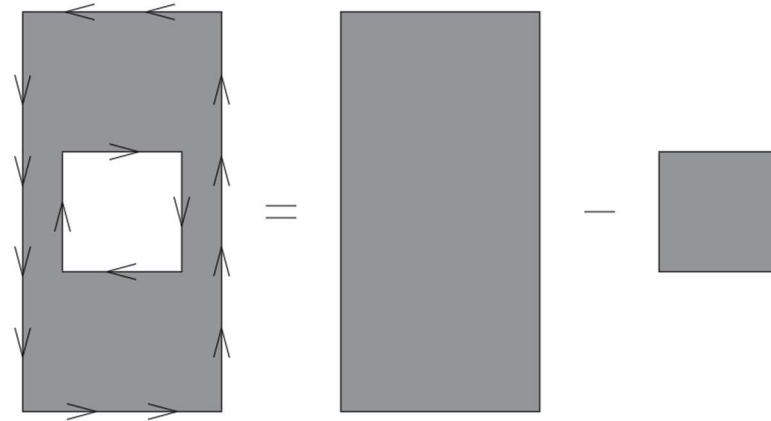
Definida a parametrização da circunferência, é necessário verificar elementos importantes para a programação do cálculo das propriedades geométricas de seções circulares e/ou semicirculares: os ângulos iniciais θ_0 em cada quadrante da região circular delimitada e o sentido de orientação da circunferência. Logo, os ângulos são dados por:

- 1º quadrante do círculo: $\theta_0 = 0$;
- 2º quadrante do círculo: $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$;
- 3º quadrante do círculo: $\theta_0 = \pi$;
- 4º quadrante do círculo: $\theta_0 = \frac{3\pi}{2}$.

Sobre o sentido de orientação, como mostrado no tópico 3.2 do Capítulo 3, pelo Teorema de Green, entende-se que a orientação da curva deve ser no sentido anti-horário, considerando que a região delimitada pela curva é constituída de todos os pontos da curva. Desse modo, se a orientação da curva for inserida, através das coordenadas (x, y) , no sentido horário, as fórmulas das propriedades geométricas deduzidas no tópico 3.4 do Capítulo 3 fornecerão dados negativos, informação que pode ser usada para calcular essas propriedades em seções homogêneas vazadas no geral, seja elas com aberturas poligonais ou circulares, e seções não homogêneas com barras longitudinais, como o concreto armado.

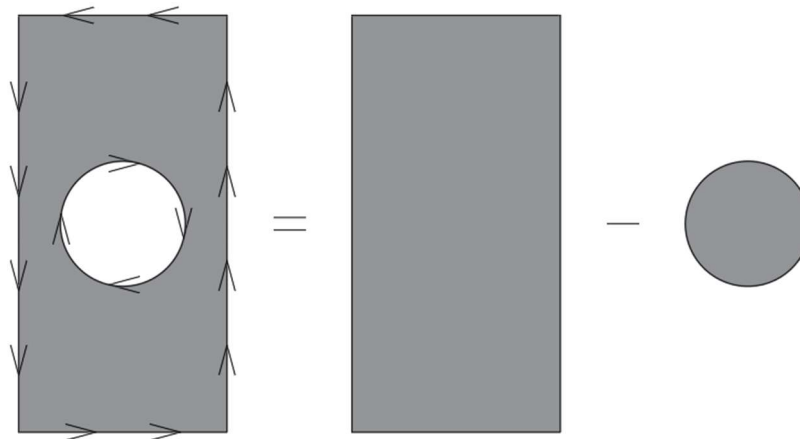
Para calcular as propriedades geométricas das seções homogêneas vazadas, é necessário definir a ordem das coordenadas de forma que, para os vértices externos, deve seguir o sentido anti-horário, porém, para vértices internos, deve seguir o sentido horário. Isso pode ser mostrado nos exemplos da Figura 24 e Figura 25.

Figura 24 – Seção homogênea vazada com abertura poligonal.



Fonte: Autoria própria.

Figura 25 – Seção homogênea vazada com abertura circular.

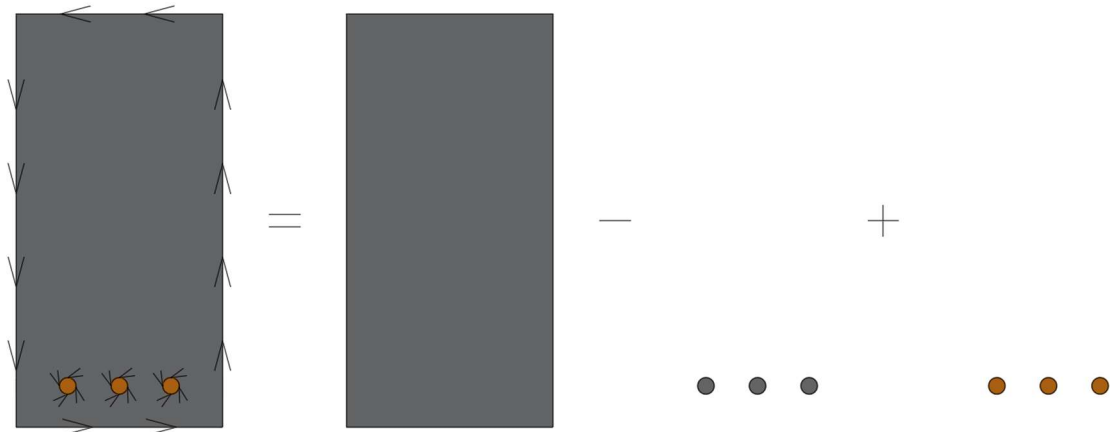


Fonte: Autoria própria.

Para as aberturas circulares em seções homogêneas vazadas, para retirar o círculo ou semicírculo, considerou-se os seguintes elementos de circunferência: arcos (4 iguais por circunferência), coordenada do centro, raio, ordem dos quadrantes por arco e ordem de sentido horário. Além disso, como os critérios considerados contemplam apenas arcos de 90° em 90° , cada arco pode ser dividido em 1 ou mais arestas conectadas por 1 ou mais vértices, cujas coordenadas são calculadas através das fórmulas de parametrização da circunferência (3.57).

Por fim, para seções não homogêneas com barras longitudinais, como no caso de seções de concreto armado, o processo é semelhante ao anterior, no entanto, para adicionar as seções circulares correspondentes às barras, o sentido adotado é anti-horário. Isso pode ser mostrado no exemplo da Figura 26.

Figura 26 – Seção homogênea vazada com abertura circular.



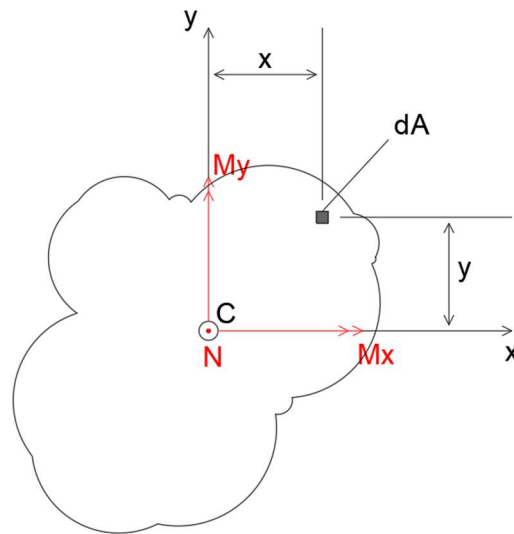
Fonte: Autoria própria.

3.8. TENSÕES NORMAIS PARA FLEXÃO GERAL

Para o cálculo das tensões normais na flexão geral em seções transversais, utilizando as expressões deduzidas nos itens 3.4, 3.5 e 3.6, faz-se necessário empregar as fórmulas (2.21) e (2.22), devidamente adaptadas ao referencial adotado no programa computacional. Logo, como as coordenadas adotadas para as seções transversais estão contidas no primeiro quadrante de um sistema de eixos (x, y) , os valores positivos das coordenadas estão, para y , estão para cima e, para x , estão para direita, o que pode ser mostrado na Figura 27.

Vale ressaltar que, por convenção, no eixo z , a força normal N sai do plano xy , assim como os valores de tensão normal por flexão geral geradas.

Figura 27 – Seção transversal na flexão geral.



Fonte: Autoria própria.

Segundo Coda (2017), para tensões na flexão geral, será admitida a Hipótese de Euler-Bernoulli, na qual, admite que “seções planas e ortogonais à linha de referência permanecem planas e ortogonais à linha de referência após a deformação”. Portanto, de acordo com Coda (2017), o campo de deformação ε_z derivado de momentos fletores M_x e M_y possui comportamento linear ao longo de uma seção transversal, no entanto, para seções assimétricas, em primeiro período, não se reconhece de que forma o campo depende dos momentos citados.

Resumidamente, na Hipótese de Euler-Bernoulli, ignorando a força normal, o campo de deformação ε_z é dado pela fórmula (3.58), em que a origem dos eixos (x, y) é o centro de gravidade da seção:

$$\varepsilon_z = \bar{a} \cdot y + \bar{b} \cdot x \quad (3.58)$$

3.8.1. SEÇÕES HOMOGÊNEAS

Conforme Coda (2017), para seções homogêneas seguindo as direções adotadas dos eixos x e y pela Figura 27, aplicando-se, no centro de gravidade, a Lei de Hooke uniaxial sobre a fórmula (3.58) e a admitindo a presença da força normal, a fórmula da tensão normal na flexão geral é dada por (3.59):

$$\sigma_z = a \cdot y + b \cdot x + \frac{N}{A} \quad (3.59)$$

Além disso, considerando o eixo z e o referencial adotado para eixos (x, y) , sabe-se que as integrais de área da força normal N e momentos fletores M_x e M_y são dadas por (3.60), (3.61), (3.62):

$$N = \int_A \sigma_z \cdot dA \quad (3.60)$$

$$M_x = \int_A \sigma_z \cdot y \cdot dA \quad (3.61)$$

$$M_y = - \int_A \sigma_z \cdot x \cdot dA \quad (3.62)$$

Assim, considerando que o momento estático nos eixos (x, y) , visto que a origem é o centro de gravidade da seção transversal e as integrais de área dos momentos de inércia (2.8) e (2.9), substituindo (3.59) em (3.60), (3.61) e (3.62), tem-se as seguintes fórmulas resultantes (3.63), (3.64) e (3.65):

$$N = \int_A \left(a \cdot y + b \cdot x + \frac{N}{A} \right) \cdot dA = a \cdot \int_A y \cdot dA + b \cdot \int_A x \cdot dA + \frac{N}{A} \cdot \int_A dA = N \quad (3.63)$$

$$M_x = \int_A \left(a \cdot y + b \cdot x + \frac{N}{A} \right) \cdot y \cdot dA = a \cdot \int_A y^2 \cdot dA + b \cdot \int_A x \cdot y \cdot dA + \frac{N}{A} \cdot \int_A y \cdot dA \quad (3.64)$$

$$\Leftrightarrow M_x = a \cdot I_x + b \cdot I_{xy}$$

$$M_y = - \int_A \left(a \cdot y + b \cdot x + \frac{N}{A} \right) \cdot x \cdot dA = -a \cdot \int_A x \cdot y \cdot dA - b \cdot \int_A x^2 \cdot dA - \frac{N}{A} \cdot \int_A x \cdot dA \quad (3.65)$$

$$\Leftrightarrow M_y = -a \cdot I_{xy} - b \cdot I_y$$

A partir do sistema de equações formado por (3.64) e (3.65), isolou-se a constante “ a ” na equação (3.66) e essa foi substituída na equação (3.65), gerando a equação da constante “ b ” dada por (3.67):

$$a \cdot I_x + b \cdot I_{xy} = M_x \Rightarrow a = \frac{M_x - b \cdot I_{xy}}{I_x} \quad (3.66)$$

$$\begin{aligned} -a \cdot I_{xy} - b \cdot I_y = M_y &\Rightarrow \frac{-M_x \cdot I_{xy} + b \cdot I_{xy}^2}{I_x} - b \cdot I_y = M_y \Rightarrow \\ \Leftrightarrow b &= \frac{-M_y \cdot I_x - M_x \cdot I_{xy}}{I_x \cdot I_y - I_{xy}^2} \Rightarrow b = - \left(\frac{M_y \cdot I_x + M_x \cdot I_{xy}}{I_x \cdot I_y - I_{xy}^2} \right) \end{aligned} \quad (3.67)$$

Assim, a equação da constante “a” é dada por (3.68):

$$\begin{aligned} a &= \frac{M_x - b \cdot I_{xy}}{I_x} = \frac{M_x + \frac{M_y \cdot I_x \cdot I_{xy} + M_x \cdot I_{xy}^2}{I_x \cdot I_y - I_{xy}^2}}{I_x} = \frac{M_x}{I_x} + \frac{M_y \cdot I_x \cdot I_{xy} + M_x \cdot I_{xy}^2}{I_x^2 \cdot I_y - I_x \cdot I_{xy}^2} = \\ &= \frac{M_x \cdot I_x \cdot I_y - M_x \cdot I_{xy}^2 + M_y \cdot I_x \cdot I_{xy} + M_x \cdot I_{xy}^2}{I_x^2 \cdot I_y - I_x \cdot I_{xy}^2} = \frac{I_x \cdot (M_x \cdot I_y + M_y \cdot I_{xy})}{I_x \cdot (I_x \cdot I_y - I_{xy}^2)} \Rightarrow \\ \Leftrightarrow a &= \frac{M_x \cdot I_y + M_y \cdot I_{xy}}{I_x \cdot I_y - I_{xy}^2} \end{aligned} \quad (3.68)$$

Logo, inserindo as constantes “a” e “b” na equação (3.59), tem-se a fórmula da tensão normal na flexão geral dada por (3.69):

$$\sigma_z = \left(\frac{M_x \cdot I_y + M_y \cdot I_{xy}}{I_x \cdot I_y - I_{xy}^2} \right) \cdot y - \left(\frac{M_y \cdot I_x + M_x \cdot I_{xy}}{I_x \cdot I_y - I_{xy}^2} \right) \cdot x + \frac{N}{A} \quad (3.69)$$

Aplicando as fórmulas (3.48), (3.49) e (3.50) obtidas pelo Teorema dos Eixos Paralelos na fórmula (3.69), isto é, momentos de inércia e produto de inércia em torno de eixo centroidais, tem-se a fórmula dada por (3.70):

$$\sigma_z = \left(\frac{M_x \cdot I_{y_{cg}} + M_y \cdot I_{xy_{cg}}}{I_{x_{cg}} \cdot I_{y_{cg}} - I_{xy_{cg}}^2} \right) \cdot y - \left(\frac{M_y \cdot I_{x_{cg}} + M_x \cdot I_{xy_{cg}}}{I_{x_{cg}} \cdot I_{y_{cg}} - I_{xy_{cg}}^2} \right) \cdot x + \frac{N}{A} \quad (3.70)$$

Além disso, caso a força normal N não esteja aplicada no centro de gravidade da seção transversal, como em (2.22), considerando eixos centroidais, a fórmula da tensão normal na flexão geral é dada por (3.71):

$$\sigma_z = \left(\frac{(M_{x_0} + N \cdot y_N) \cdot I_{y_{cg}} + (M_{y_0} + N \cdot x_N) \cdot I_{xy_{cg}}}{I_{x_{cg}} \cdot I_{y_{cg}} - I_{xy_{cg}}^2} \right) \cdot y - \left(\frac{(M_{y_0} + N \cdot x_N) \cdot I_{x_{cg}} + (M_{x_0} + N \cdot y_N) \cdot I_{xy_{cg}}}{I_{x_{cg}} \cdot I_{y_{cg}} - I_{xy_{cg}}^2} \right) \cdot x + \frac{N}{A} \quad (3.71)$$

Sendo y_N e z_N as distâncias do ponto de atuação da força normal N até, respectivamente, o eixo x e o eixo y . Logo, para qualquer situação geral de tensão normal por flexão, especificamente no referencial adotado na Figura 27, para seções homogêneas, a fórmula (3.69) pode ser usada.

3.8.2. SEÇÕES NÃO HOMOGÊNEAS

Para seções não homogêneas, seguindo as direções adotadas dos eixos x e y pela Figura 27, conforme o item 2.3 do Capítulo 2, a tensão deve ser multiplicada pelo fator de transformação α_i para que a tensão verdadeira seja obtida. Logo, as fórmulas da tensão geral na flexão geral, pegando como base as fórmulas (3.70) e (3.71), são dadas por (3.72) e (3.73):

$$\sigma_{zi} = \alpha_i \cdot \left(\left(\frac{M_x \cdot I_{y_{cg}} + M_y \cdot I_{xy_{cg}}}{I_{x_{cg}} \cdot I_{y_{cg}} - I_{xy_{cg}}^2} \right) \cdot y - \left(\frac{M_y \cdot I_{x_{cg}} + M_x \cdot I_{xy_{cg}}}{I_{x_{cg}} \cdot I_{y_{cg}} - I_{xy_{cg}}^2} \right) \cdot x + \frac{N}{A} \right) \quad (3.72)$$

$$\sigma_{zi} = \alpha_i \cdot \left(\left(\frac{(M_{x_0} + N \cdot y_N) \cdot I_{y_{cg}} + (M_{y_0} + N \cdot x_N) \cdot I_{xy_{cg}}}{I_{x_{cg}} \cdot I_{y_{cg}} - I_{xy_{cg}}^2} \right) \cdot y - \left(\frac{(M_{y_0} + N \cdot x_N) \cdot I_{x_{cg}} + (M_{x_0} + N \cdot y_N) \cdot I_{xy_{cg}}}{I_{x_{cg}} \cdot I_{y_{cg}} - I_{xy_{cg}}^2} \right) \cdot x + \frac{N}{A} \right) \quad (3.73)$$

3.8.3. LINHA NEUTRA

Conforme mostrado no item 2.2 do Capítulo 2, o eixo neutro corresponde a uma linha neutra presente na seção transversal do elemento estrutural em que a tensão normal na flexão é nula. Logo, considerando a fórmula (3.59), a equação geral da linha neutra é dada por (3.74):

$$\sigma_z = a \cdot y + b \cdot x + \frac{N}{A} = 0 \Leftrightarrow a \cdot y + b \cdot x + c = 0 \quad (3.74)$$

Onde as constantes as constantes “a”, “b” e “c” equivalem a (3.75), (3.76) e (3.77), respectivamente:

$$a = \left(\frac{M_x \cdot I_{ycg} + M_y \cdot I_{xycg}}{I_{xcg} \cdot I_{ycg} - I_{xycg}^2} \right) \quad (3.75)$$

$$b = - \left(\frac{M_y \cdot I_{xcg} + M_x \cdot I_{xycg}}{I_{xcg} \cdot I_{ycg} - I_{xycg}^2} \right) \quad (3.76)$$

$$c = \frac{N}{A} \quad (3.76)$$

4. PROGRAMA COMPUTACIONAL

4.1. CONSIDERAÇÕES GERAIS

O programa computacional desenvolvido neste trabalho consistiu em rotinas de cálculo nas quais, por meio de dados fornecidos pelo usuário a partir de um arquivo de entrada “.txt”, determinam as propriedades geométricas de área, momento estático de área, centroide, momento de inércia, produto de inércia, raio de giração e das tensões normais na flexão geral. Esses valores são determinados a partir das fórmulas descritas no Capítulo 3.

O código do programa foi escrito em linguagem Fortran, linguagem própria para resoluções de operações matemáticas simplificadas, o que justifica a dedução e simplificação das formulações das propriedades geométricas considerando o Teorema de Green. De forma geral, o código foi formado por uma rotina de cálculos dividida em quatro módulos, com cada módulo sendo dividido em sub-rotinas. Os quatro módulos criados são divididos em:

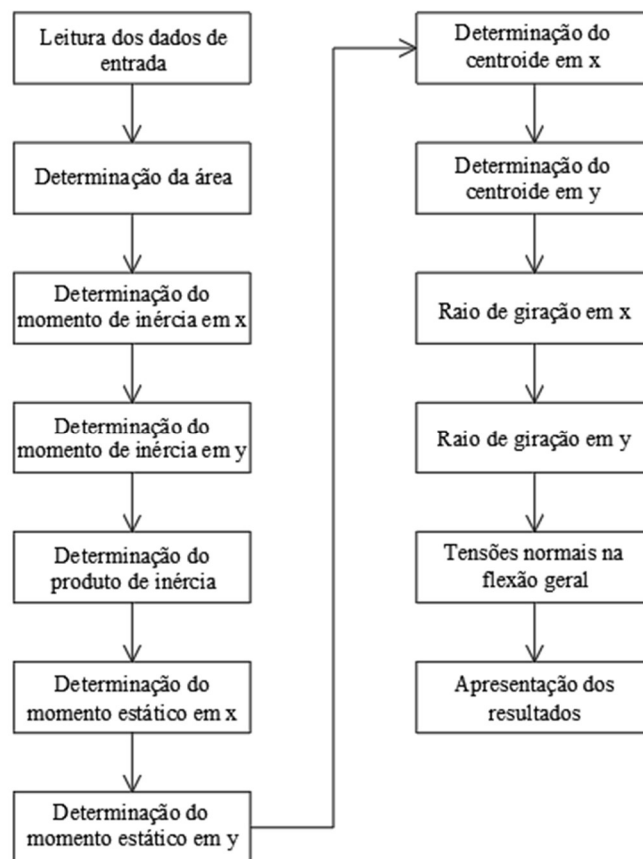
- **Declaração de variáveis:** contém todas as variáveis que serão utilizadas no programa, sejam elas principais, como a área, momento estático, momento de inércia, produto de inércia, tensões normais, e secundárias, como número de vértices, arestas, matérias, módulo de elasticidade, número de arcos de uma circunferência, entre outros;
- **Entrada de dados:** contém uma sub-rotina responsável pela leitura dos dados de entrada fornecidos pelo usuário. Esse processo foi feito utilizando de um arquivo de entrada “.txt”, cujo formato básico, considerando os exemplos que serão apresentados no Capítulo 5, foi descrito no APÊNDICE B;
- **Cálculos:** contém sub-rotinas que realizaram as operações matemáticas de acordo com as formulações das propriedades geométricas abordadas no Capítulo 3 desse trabalho;
- **Saída de dados:** contém uma sub-rotinas destinada a mostrarem os resultados gerados pelo programa para o usuário. Esse processo foi feito utilizando um arquivo de saída “.txt”, cujo formato básico, considerando o processamento dos exemplos que serão apresentados no Capítulo 5, pode ser descrito no APÊNDICE C.

Na seção 4.2, esses módulos e suas sub-rotinas serão detalhados, além da apresentação dos procedimentos presentes nas sub-rotinas e a utilização da formulação das propriedades geométricas desenvolvidas no Capítulo 3.

4.2. FUNCIONAMENTO DO PROGRAMA

Com a apresentação do arquivo de entrada, programa computacional executa as rotinas de cálculo citadas anteriormente e concebe os resultados no arquivo de saída. Essa situação pode ser demonstrada no fluxograma da Figura 28.

Figura 28 – Fluxograma do funcionamento do programa.



Fonte: Autoria própria.

A sub-rotina de leitura de dados configura-se em salvar os dados de entrada num arquivo de entrada “.txt” em variáveis realocáveis no computador de forma que o programa faça a leitura do arquivo linha por linha, da primeira até a última. Esse formato é descrito no APÊNDICE B. Neste processo, abre-se o arquivo de entrada “.txt”, lê-se os dados dos vértices de quantidade e conectividade, aloca a memória dinamicamente para armazenar os dados e guarda os dados lidos no computador para serem usados para calcular as propriedades geométricas que estão em somatória, como visto nas formulações desenvolvidas no Capítulo 3.

Posteriormente, são lidos e organizados os dados referentes aos materiais, aos arcos dos círculos. Além disso, o programa identifica o número de materiais, o módulo de elasticidade de referência e os valores específicos de cada material, associando-os posteriormente às arestas que compõem a geometria, tanto de seções poligonais quanto circulares. Em seguida, são lidas as informações correspondentes a seções circulares e semicirculares, dos arcos, incluindo centro, raio, quadrante, número de divisões, material e sentido, permitindo construir uma circunferência.

Por fim, o programa aloca vetores para armazenar as tensões normais, de flexão e totais, preparando os dados para os cálculos das tensões normais na flexão geral posteriores, nos quais, são usados nas fórmulas de tensão normal na flexão geral deduzidas no Capítulo 3. O modo como o código computacional foi escrito pode ser mostrado no APÊNDICE D.

Vale ressaltar que, na declaração de variáveis, deve-se determinar o tipo de número que a variável será, real ou inteiro, por exemplo, quantos significativos terão as variáveis, a dimensão dessas variáveis e, por fim, se elas serão alocáveis, isto é, se o computador usará a memória enquanto executar o programa. Essa situação pode ser mostrada pelas variáveis:

- **Índices e contadores:** representados por i , j , iv , ia , $acumseg$, foram considerados inteiros (4 bytes), utilizados para controle de laços, contagem de elementos e indexação de vetores e matrizes;
- **Número de elementos geométricos e materiais:** variáveis $nvert$, $narest$, $nmat$, $narc$, $nvert_arc$, $narest_arc$, $nseg$ foram declaradas como inteiras (4 bytes), utilizadas para armazenar o número de vértices, arestas, materiais e arcos da seção;
- **Conectividade:** representadas por $conec$ e $conec_arc$, foram consideradas inteiras (4 bytes), com duas dimensões e alocáveis, utilizadas para indicar a ligação entre os vértices que formam as arestas e os arcos;
- **Associação de materiais:** vetores $assmat$ e $assmat_arc$ foram definidos como inteiros (4 bytes), alocáveis, e armazenam o índice do material associado a cada aresta ou arco;
- **Coordenadas dos vértices e arcos:** matrizes $coord$ e $coord_arc$ foram declaradas como reais de dupla precisão (8 bytes), com duas dimensões e alocáveis, utilizadas para armazenar as coordenadas (x, y) dos vértices e dos pontos gerados nos arcos;
- **Propriedades dos materiais:** vetor mat foi considerado real (8 bytes) e alocável, contendo os módulos de elasticidade relativos de cada material;

- **Propriedades geométricas globais:** variáveis *area*, *Ix*, *Iy*, *Ixy*, *Ixcg*, *Iycg*, *Ixycg*, *Qx*, *Qy*, *kx*, *ky* foram consideradas reais (8 bytes) e representam área, momentos e produtos de inércia, momentos estáticos e raios de giração;
- **Coordenadas do centroide e pontos de referência:** variáveis *x*, *y*, *x1*, *x2*, *y1*, *y2*, *xc*, *yc* foram definidas como reais (8 bytes) e indicam as posições de pontos e centroides da seção;
- **Parâmetros dos arcos:** variáveis *r*, *theta0*, *dtheta* foram definidas como reais (8 bytes), utilizadas para o cálculo das coordenadas dos pontos nos arcos;
- **Componentes das tensões:** vetores *tensao_normal*, *tensao_flexao* e *tensao_total* foram declarados como reais (8 bytes) e alocáveis, armazenando as tensões normais, de flexão e totais em cada vértice;
- **Esforços solicitantes:** variáveis *N*, *Mx* e *My* foram consideradas reais (8 bytes) e representam, respectivamente, o esforço normal e os momentos fletores em torno dos eixos x e y;
- **Coefficientes da equação da flexão geral:** variáveis *a*, *b* e *c* foram consideradas reais (8 bytes), utilizadas para definir os coeficientes da expressão da tensão total em função das coordenadas;
- **Tipo derivado “arco”:** estrutura *type(arco)* contém os campos *centro*, *quadrante*, *naarest*, *indmat* (inteiros, 4 bytes), *raio* (real, 8 bytes) e *sentido* (caractere, 1 byte), utilizada para armazenar as informações geométricas e de material de cada arco.

Nas sub-rotinas das propriedades geométricas, o processo adotado foi o mesmo. Com base nas formulações desenvolvidas no Capítulo 3, definidas as coordenadas dos vértices, a conectividade das arestas e o material tratadas na leitura de dados, basta somar contribuição por contribuição de cada aresta até fornecer o valor total para cada propriedade geométrica de seções transversais homogêneas e não homogêneas, tanto para seções poligonais quanto para circulares. O modo como o código computacional foi escrito pode ser exemplificado no APÊNDICE D, em que está mostrado o exemplo de como o código foi escrito para as propriedades geométricas.

Nas sub-rotinas das tensões, é realizado o cálculo das tensões normais, de flexão e totais em todos os pontos da seção (arestas retas e arcos). Primeiro, o programa percorre as arestas e os arcos, aplicando um fator de correção para considerar as diferenças de rigidez entre materiais. Em seguida, calcula-se a tensão normal uniforme e a tensão de flexão geral em cada ponto extremo de cada elemento, usando os esforços normais e os momentos de inércia corrigidos.

As tensões resultantes são armazenadas em vetores e a tensão total é obtida pela soma dessas componentes. Por fim, são definidos os coeficientes a , b e c da equação geral da tensão, que relaciona as tensões com as coordenadas e os esforços atuantes na seção. O modo como o código computacional foi escrito para esse cálculo pode ser exemplificado no APÊNDICE D.

Como mostrado no Capítulo 3, o Teorema de Green considera o sentido anti-horário da curva, logo, se os vértices forem percorridos no sentido horário, o valor das propriedades geométricas será negativo, dependendo da propriedade. No entanto, esse fato pode ser usado para calcular propriedades geométricas e tensões em seções vazadas e seções circulares.

Por fim, o programa é finalizado com a apresentação de resultados, em que o formato do arquivo gerado pode ser visualizado no APÊNDICE C.

5. EXEMPLOS DE VALIDAÇÃO

Neste capítulo, serão apresentados exemplos elaborados com a finalidade de verificar o funcionamento do programa computacional desenvolvido. Os seis exemplos foram elaborados pelo autor com base em questões encontradas em Hibbeler (2010), livro comumente utilizado no curso de Engenharia Civil na UFAM, e os resultados fornecidos pelo programa foram comparados com os cálculos realizados no *software* de planilha eletrônica EXCEL.

Sobre os cálculos realizados na planilha eletrônica, as fórmulas utilizadas para determinar as propriedades geométricas das seções transversais homogêneas foram baseadas na literatura de Beer (2012) e Hibbeler (2010). Para o cálculo das tensões normal na flexão geral e da linha neutra, foram utilizadas as fórmulas (3.72), (3.74)

Os exemplos realizados envolvem seções transversais retangulares e circulares ou semicirculares homogêneas ou não homogêneas, sejam elas simétricas ou assimétricas. Logo, para os cálculos feitos na planilha eletrônica, deve-se utilizar fórmulas com propriedades geométricas de retângulos e circulares. Dado esse contexto, conforme descrito em Beer (2012), as formulações, para seções retangulares, tanto homogêneas quanto não homogêneas, de área, momento estático de área em x , momento estático de área em y , momento de inércia em x , momento de inércia em y e produto de inércia são dadas, respectivamente, por (5.1), (5.2), (5.3), (5.4), (5.5), (5.6), (5.7), (5.8), (5.9):

$$A = \sum \alpha_i \cdot b_i \cdot h_i \quad (5.1)$$

$$Q_x = \sum \alpha_i \cdot \bar{y}_i \cdot A_i \quad (5.2)$$

$$Q_y = \sum \alpha_i \cdot \bar{x}_i \cdot A_i \quad (5.3)$$

$$I_x = \sum \alpha_i \cdot \left(\frac{b_i \cdot h_i^3}{12} + A_i \cdot \bar{y}_i^2 \right) \quad (5.4)$$

$$I_{xcg} = I_x - A \cdot C_y^2 \quad (5.5)$$

$$I_y = \sum \alpha_i \cdot \left(\frac{b_i^3 \cdot h_i}{12} + A_i \cdot \bar{x}_i^2 \right) \quad (5.6)$$

$$I_{ycg} = I_y - A \cdot C_x^2 \quad (5.7)$$

$$I_{xy} = \sum \alpha_i \cdot A_i \cdot \bar{x}_i \cdot \bar{y}_i \quad (5.8)$$

$$I_{xycg} = I_{xy} - A \cdot C_x \cdot C_y \quad (5.9)$$

Onde:

b_i → base do retângulo i ;

h_i → altura do retângulo i ;

\bar{x}_i, \bar{y}_i → centroide em x e y do(s) retângulo(s);

A_i → área(s) do retângulo(s);

Além disso, para o cálculo do centroide, foram reutilizadas as equações (2.6) e (2.7), e para o cálculo do raio de giração, as equações (2.11) e (2.12).

Para seções circulares, a área do círculo é dada por (5.10):

$$A = \sum \pi \cdot r_i^2 \quad (5.10)$$

Onde:

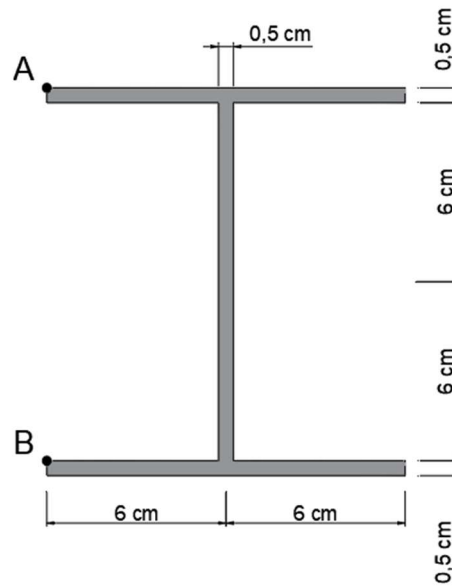
r_i → raio do círculo i ;

A_i → área(s) do círculo(s).

5.1. EXEMPLO 1

Para a seção transversal apresentada na Figura 29, deseja-se determinar as propriedades geométricas de área, momento estático de área, centroide, momento de inércia, produto de inércia, raio de giração. Além disso, deseja-se determinar tensões normais na flexão geral nos pontos A e B da Figura 29 considerando um momento no centroide da seção $M_y = 150 \text{ kN} \cdot \text{cm}$ para cima, em relação ao eixo y , e uma força normal $N = 50 \text{ kN}$ de tração sobre o centroide.

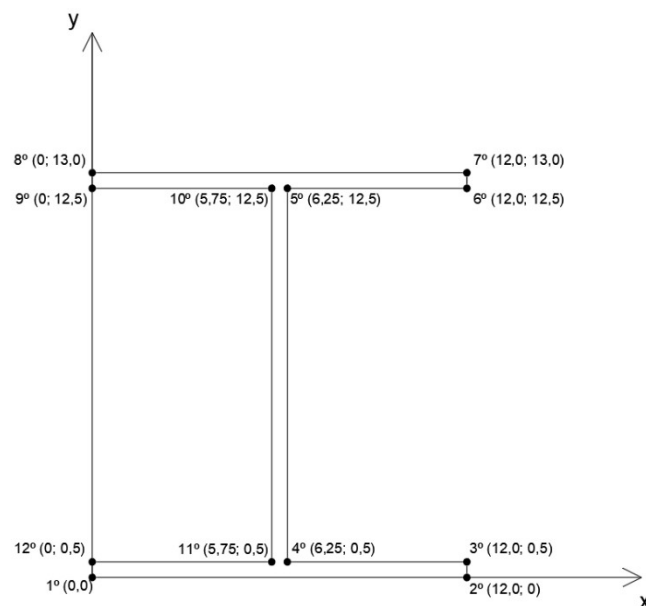
Figura 29 – Seção transversal para exemplo 1.



Fonte: Autoria própria.

Para adaptar o exemplo 1 ao programa computacional desenvolvido, é necessário escolher um ponto de referência no qual todas as posições e distâncias aos eixos serão definidas, e transformar a Figura 29 em coordenadas (x, y) . Dessa forma, para o exemplo 1, foi escolhido como ponto de referência a origem $O(0,0)$. Além disso, considerando todas as coordenadas contidas no primeiro quadrante do plano xy , a Figura 29 pode ser convertida na Figura 30, adotando-se uma ordem a ser seguida das coordenadas.

Figura 30 – Coordenadas do exemplo 1.



Fonte: Autoria própria.

Com as coordenadas decididas, no arquivo de entrada “.txt”, conforme apresentado no APÊNDICE B para o exemplo 1, deve ser informado o número de vértices da figura que seria “12”, número de arestas figura que seria “12”, as coordenadas da figura na ordem escolhida e, por fim, a conectividade entre arestas, vértice inicial e vértice final de todos os lados da seção transversal.

Vale ressaltar que a ordem das coordenadas é arbitrária, ou seja, pode-se escolher como ponto de início o (0,0), (12; 0,5) e outros, no entanto, essa ordem deve respeitar o sentido anti-horário adotado no Teorema de Green para a dedução das fórmulas das propriedades geométricas e a conectividade entre aresta, vértice inicial e vértice final da forma geométrica da seção transversal, material para cada aresta (no caso de seções homogêneas, o coeficiente de homogeneidade será 1), além dos esforços solicitantes e o número “0” de arcos, pela ausência de seções circulares na seção analisada.

Com as considerações preliminares feitas, os dados inseridos no programa computacional geram os valores das propriedades e das tensões conforme o arquivo de saída “.txt”, presente no APÊNDICE C para o exemplo 1.

Para a resolução do exemplo 1 na planilha eletrônica, foram usadas as fórmulas mencionadas anteriormente. Assim, os cálculos realizados na planilha podem ser mostrados a seguir:

- Área:

$$A = \sum b_i \cdot h_i = b_1 \cdot h_1 + b_2 \cdot h_2 + b_3 \cdot h_3$$

$$A = 12 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 12 + 12 \cdot 0,5 = 18 \text{ cm}^2$$

- Momento estático de área:

$$Q_x = \sum \bar{y}_i \cdot A_i = \bar{y}_1 \cdot A_1 + \bar{y}_2 \cdot A_2 + \bar{y}_3 \cdot A_3$$

$$Q_y = \sum \bar{x}_i \cdot A_i = \bar{x}_1 \cdot A_1 + \bar{x}_2 \cdot A_2 + \bar{x}_3 \cdot A_3$$

$$Q_x = 12 \cdot 0,5 \cdot 12,75 + 0,5 \cdot 12 \cdot 6,5 + 12 \cdot 0,5 \cdot 0,2 = 117 \text{ cm}^3$$

$$Q_y = 12 \cdot 0,5 \cdot 6 + 0,5 \cdot 12 \cdot 6 + 12 \cdot 0,5 \cdot 6 = 108 \text{ cm}^3$$

- Centróide:

$$C_x = \frac{Q_y}{A} = \frac{108}{18} = 6 \text{ cm}$$

$$C_y = \frac{Q_x}{A} = \frac{117}{18} = 6,5 \text{ cm}$$

- Momento de inércia:

$$I_x = \sum \left(\frac{b_i \cdot h_i^3}{12} + A_i \cdot \bar{y}_i^2 \right) = \frac{b_1 \cdot h_1^3}{12} + A_1 \cdot \bar{y}_1^2 + \frac{b_2 \cdot h_2^3}{12} + A_2 \cdot \bar{y}_2^2 + \frac{b_3 \cdot h_3^3}{12} + A_3 \cdot \bar{y}_3^2$$

$$I_y = \sum \left(\frac{b_i^3 \cdot h_i}{12} + A_i \cdot \bar{x}_i^2 \right) = \frac{b_1^3 \cdot h_1}{12} + A_1 \cdot \bar{x}_1^2 + \frac{b_2^3 \cdot h_2}{12} + A_2 \cdot \bar{x}_2^2 + \frac{b_3^3 \cdot h_3}{12} + A_3 \cdot \bar{x}_3^2$$

$$I_x = \frac{12,0,5^3}{12} + 6,12,75 \cdot 12,75 + \frac{0,5 \cdot 12^3}{12} + 6,6,5 \cdot 6,5 + \frac{12,0,5^3}{12} + 6,0,25 \cdot 0,25$$

$$= 1.301,5 \text{ cm}^4$$

$$I_{x_{cg}} = I_x - A \cdot C_y^2 = 541 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \frac{12^3 \cdot 0,5}{12} + 6,6 \cdot 6 + \frac{12^3 \cdot 0,5}{12} + 6,6 \cdot 6 + \frac{12^3 \cdot 0,5}{12} + 6,6 \cdot 6 = 792,125 \text{ cm}^4$$

$$I_{y_{cg}} = I_y - A \cdot C_x^2 = 144,125 \text{ cm}^4$$

- Produto de inércia:

$$I_{xy} = \sum A_i \cdot \bar{x}_i \cdot \bar{y}_i = A_1 \cdot \bar{x}_1 \cdot \bar{y}_1 + A_2 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{y}_2 + A_3 \cdot \bar{x}_3 \cdot \bar{y}_3$$

$$I_{xy} = 6,6 \cdot 12,75 + 6,6 \cdot 6,5 + 6,6 \cdot 0,25 = 702 \text{ cm}^4$$

$$I_{xy_{cg}} = I_{xy} - A \cdot C_x \cdot C_y = 0$$

- Raio de giração:

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{1.301,5}{18}} = 8,50326735 \text{ cm}$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{792,125}{18}} = 6,63377302 \text{ cm}$$

- Tensão em A:

$$\sigma_z = \left(\frac{0 \cdot I_{y_{cg}} + M_y \cdot 0}{541 \cdot 144,125 - 0^2} \right) \cdot (13 - 6,5) - \left(\frac{150,541 + 0,0}{541 \cdot 144,125 - 0^2} \right) \cdot (0 - 6) + \frac{50}{18}$$

$$= 9,02235714 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} = 90,22357140 \text{ MPa}$$

- Tensão em B:

$$\sigma_z = \left(\frac{0 \cdot I_{y_{cg}} + M_y \cdot 0}{541 \cdot 144,125 - 0^2} \right) \cdot (0,5 - 6,5) - \left(\frac{150,541 + 0,0}{541 \cdot 144,125 - 0^2} \right) \cdot (0 - 6) + \frac{50}{18}$$

$$= 9,02235714 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} = 90,22357140 \text{ MPa}$$

- Linha neutra:

$$a = 0; b = -1,04076323; c = 2,77777778$$

Os valores gerados pelo programa computacional e pela planilha eletrônica do exemplo 1 podem ser mostrados pela Tabela 1 e Tabela 2.

Tabela 1 – Propriedades geométricas do exemplo 1.

Propriedades geométricas	Programa computacional	Planilha eletrônica	Porcentagem de erro
Área (cm ²)	18,00000000	18,00000000	0,00000000%
Momento estático em x (cm ³)	117,00000000	117,00000000	0,00000000%
Momento estático em y (cm ³)	108,00000000	108,00000000	0,00000000%
Centroide em x (cm)	6,00000000	6,00000000	0,00000000%
Centroide em y (cm)	6,50000000	6,50000000	0,00000000%
Momento de inércia em x (cm ⁴)	1.301,50000000	1.301,50000000	0,00000000%
Momento de inércia em x centroidal (cm ⁴)	541,00000000	541,00000000	0,00000000%
Momento de inércia em y (cm ⁴)	792,12500000	792,12500000	0,00000000%
Momento de inércia em y centroidal (cm ⁴)	144,12500000	144,12500000	0,00000000%
Produto de inércia (cm ⁴)	702,00000000	702,00000000	0,00000000%
Produto de inércia centroidal (cm ⁴)	0,00000000	0,00000000	0%
Raio de giração em x (cm)	8,50326735	8,50326735	0,00000000%
Raio de giração em y (cm)	6,63377302	6,63377302	0,00000000%

Fonte: Autoria própria.

Tabela 2 – Tensão e coeficiente da linha neutra do exemplo 1.

	Programa computacional	Planilha eletrônica	Porcentagem de erro
Tensão em A (MPa)	90,22357140	90,22357140	-0,00000004%
Tensão em B (MPa)	90,22357140	90,22357140	-0,00000004%
Coeficiente a	0,00000000	0,00000000	0,00000000%
Coeficiente b	-1,04076323	-1,04076323	0,00000000%
Coeficiente c	2,77777778	2,77777778	-0,00000004%

Fonte: Autoria própria.

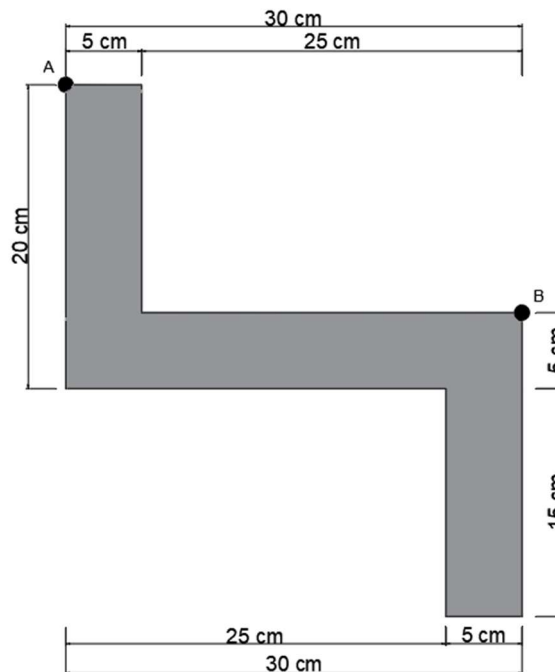
Conforme os resultados fornecidos para esse exemplo pelo programa computacional desenvolvido e pela planilha eletrônica, nota-se que não há diferença nas casas decimais dos resultados e a porcentagem de erro para valor real da planilha eletrônica para varia entre –

0,00000004% e 0%. Para todas as propriedades geométricas, a precisão é de oito ou mais casas decimais. No entanto, para a tensão normal na flexão geral, apesar da precisão ser de oito casas decimais, a porcentagem de erro varia em relação aos valores da planilha eletrônica. Isso pode ser justificado por erros de arredondamento devido ao tipo de variável utilizada no programa.

5.2. EXEMPLO 2

Para a seção transversal apresentada na Figura 31, deseja-se determinar as propriedades geométricas de área, momento estático de área, centroide, momento de inércia, produto de inércia e raio de giração. Além disso, deseja-se determinar tensões normais na flexão geral nos pontos A e B da Figura 31 e a linha neutra considerando um momento no centroide da seção $M_x = 150 \text{ kN.cm}$ à esquerda do eixo x e uma força normal $N = 50 \text{ kN}$ tracionada sobre o centroide.

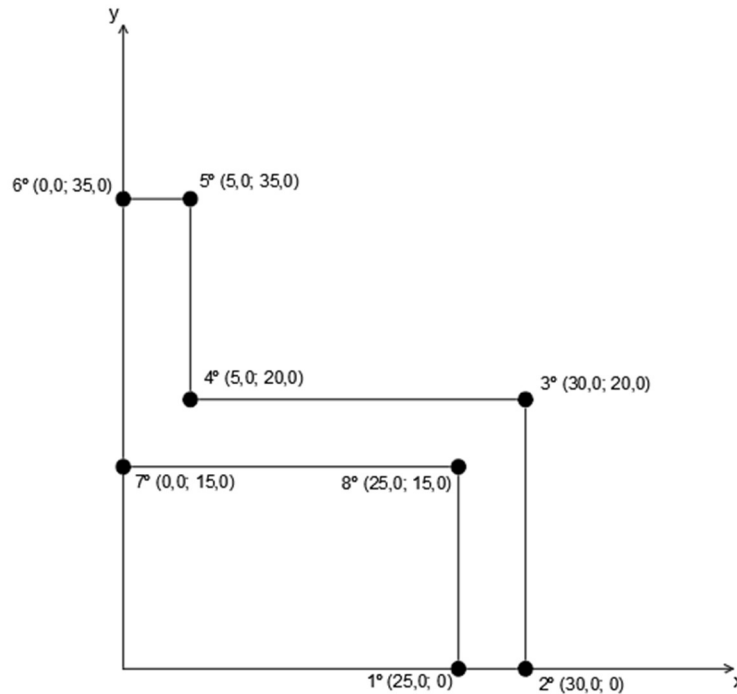
Figura 31 – Seção transversal para exemplo 2.



Fonte: Autoria própria.

Seguindo o exemplo anterior, considerando todas as coordenadas contidas no primeiro quadrante do plano xy , a Figura 31 pode ser convertida na Figura 32, adotando-se uma ordem a ser seguida das coordenadas.

Figura 32 – Coordenadas do exemplo 2.



Fonte: Autoria própria.

Com as coordenadas decididas, no arquivo de entrada “.txt”, conforme apresentado no APÊNDICE B para o exemplo 2, deve ser informado o número de vértices da figura que seria “8”, número de arestas figura que seria “8”, as coordenadas da figura na ordem escolhida e, por fim, a conectividade entre arestas, vértice inicial e vértice final de todos os lados da seção transversal, material para cada aresta (no caso de seções homogêneas, o coeficiente de homogeneidade será 1), além dos esforços solicitantes e o número “0” de arcos, pela ausência de seções circulares na seção analisada.

Com as considerações preliminares feitas, os dados inseridos no programa computacional geram os valores das propriedades e tensões conforme o arquivo de saída “.txt”, presente no APÊNDICE C para o exemplo 2.

Para a resolução do exemplo 2 na planilha eletrônica, foram usadas as fórmulas mencionadas anteriormente. Assim, os cálculos realizados na planilha podem ser mostrados a seguir:

- Área:

$$A = \sum b_i \cdot h_i = b_1 \cdot h_1 + b_2 \cdot h_2 + b_3 \cdot h_3$$

$$A = 5.15 + 30.5 + 5.15 = 300 \text{ cm}^2$$

- Momento estático de área:

$$Q_x = \sum \bar{y}_i \cdot A_i = \bar{y}_1 \cdot A_1 + \bar{y}_2 \cdot A_2 + \bar{y}_3 \cdot A_3$$

$$Q_y = \sum \bar{x}_i \cdot A_i = \bar{x}_1 \cdot A_1 + \bar{x}_2 \cdot A_2 + \bar{x}_3 \cdot A_3$$

$$Q_x = 5.15.27,5 + 30.5.17,5 + 5.15.7,5 = 5.250 \text{ cm}^3$$

$$Q_y = 5.15.2,5 + 30.5.15 + 5.15.27,5 = 4.500 \text{ cm}^3$$

- Centroide:

$$C_x = \frac{Q_y}{A} = \frac{4.500}{300} = 15 \text{ cm}$$

$$C_y = \frac{Q_x}{A} = \frac{5.250}{300} = 17,5 \text{ cm}$$

- Momento de inércia:

$$I_x = \sum \left(\frac{b_i \cdot h_i^3}{12} + A_i \cdot \bar{y}_i^2 \right) = \frac{b_1 \cdot h_1^3}{12} + A_1 \cdot \bar{y}_1^2 + \frac{b_2 \cdot h_2^3}{12} + A_2 \cdot \bar{y}_2^2 + \frac{b_3 \cdot h_3^3}{12} + A_3 \cdot \bar{y}_3^2$$

$$I_y = \sum \left(\frac{b_i^3 \cdot h_i}{12} + A_i \cdot \bar{x}_i^2 \right) = \frac{b_1^3 \cdot h_1}{12} + A_1 \cdot \bar{x}_1^2 + \frac{b_2^3 \cdot h_2}{12} + A_2 \cdot \bar{x}_2^2 + \frac{b_3^3 \cdot h_3}{12} + A_3 \cdot \bar{x}_3^2$$

$$I_x = \frac{5.15^3}{12} + 75.27,5.27,5 + \frac{30.5^3}{12} + 150.17,5.17,5 + \frac{5.15^3}{12} + 75.7,5.7,5 = 110.000 \text{ cm}^4$$

$$I_{x_{cg}} = I_x - A \cdot C_y^2 = 18.125 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \frac{5^3 \cdot 15}{12} + 75.2,5.2,5 + \frac{30^3 \cdot 5}{12} + 150.15.15 + \frac{5^3 \cdot 15}{12} + 75.27,5.27,5 = 102.500 \text{ cm}^4$$

$$I_{y_{cg}} = I_y - A \cdot C_x^2 = 35.000 \text{ cm}^4$$

- Produto de inércia:

$$I_{xy} = \sum A_i \cdot \bar{x}_i \cdot \bar{y}_i = A_1 \cdot \bar{x}_1 \cdot \bar{y}_1 + A_2 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{y}_2 + A_3 \cdot \bar{x}_3 \cdot \bar{y}_3$$

$$I_{xy} = 75.2,5.27,5 + 150.15.17,5 + 75.27,5.7,5 = 60.000 \text{ cm}^4$$

$$I_{xy_{cg}} = I_{xy} - A \cdot C_x \cdot C_y = -18.750 \text{ cm}^4$$

- Raio de giração:

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{110.000}{300}} = 19,14854216 \text{ cm}$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{102.500}{300}} = 18,48422751 \text{ cm}$$

- Tensão em A:

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \left(\frac{-150.35000 + 0.(-18750)}{18125.35000 - (-18750)^2} \right) \cdot (35 - 17,5) \\ &\quad - \left(\frac{0.18125 + 0.(-18750)}{18125.35000 - (-18750)^2} \right) \cdot (0 - 15) + \frac{50}{300} = -0,00902394 \text{ kN/cm}^2 = \\ &= -0,09023940 \text{ MPa} = \end{aligned}$$

- Tensão em B:

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \left(\frac{-150.35000 + 0.(-18750)}{18125.35000 - (-18750)^2} \right) \cdot (20 - 17,5) \\ &\quad - \left(\frac{0.18125 + 0.(-18750)}{18125.35000 - (-18750)^2} \right) \cdot (30 - 15) + \frac{50}{300} = -0,02891344 \text{ kN/cm}^2 \\ &= -0,28913440 \text{ kN/cm}^2 \end{aligned}$$

- Linha neutra:

$$a = -0,01856354; b = -0,00994475; c = 0,16666667$$

Os valores gerados pelo programa computacional e pela planilha eletrônica do exemplo 2 podem ser mostrados pela Tabela 3 e 4.

Tabela 3 – Propriedades geométricas do exemplo 2.

Propriedades geométricas	Programa computacional	Planilha eletrônica	Porcentagem de erros
Área (cm²)	300,00000000	300,00000000	0,00000000%
Momento estático em x (cm³)	5250,00000000	5250,00000000	0,00000000%
Momento estático em y (cm³)	4500,00000000	4500,00000000	0,00000000%
Centroide em x (cm)	15,00000000	15,00000000	0,00000000%
Centroide em y (cm)	17,50000000	17,50000000	0,00000000%
Momento de inércia em x (cm⁴)	110.000,00000000	110.000,00000000	0,00000000%
Momento de inércia em x centroidal (cm⁴)	18.125,00000000	18.125,00000000	0,00000000%
Momento de inércia em y (cm⁴)	102.500,00000000	102.500,00000000	0,00000000%
Momento de inércia em y centroidal (cm⁴)	35.000,00000000	35.000,00000000	0,00000000%
Produto de inércia (cm⁴)	60.000,00000000	60.000,00000000	0,00000000%
Produto de inércia centroidal (cm⁴)	-18.750,00000000	-18.750,00000000	0,00000000%
Raio de giração em x (cm)	19,14854216	19,14854216	0,00000000%
Raio de giração em y (cm)	18,48422751	18,48422751	0,00000000%

Fonte: Autoria própria.

Tabela 4 – Tensão e coeficiente da linha neutra do exemplo 2.

	Programa computacional	Planilha eletrônica	Porcentagem de erro
Tensão em A (MPa)	-0,09023940	-0,09023940	0,00001184%
Tensão em B (MPa)	-0,28913440	-0,28913440	0,00001325%
Coeficiente a	-0,01856354	-0,01856354	0,00000000%
Coeficiente b	-0,00994475	-0,00994475	0,00000000%
Coeficiente c	0,16666667	0,16666667	-0,00000004%

Fonte: Autoria própria.

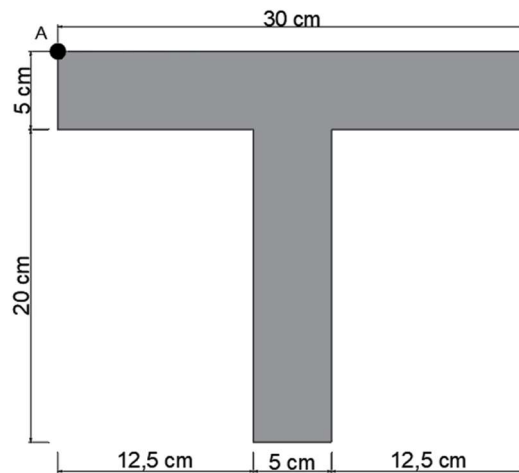
A partir da comparação entre os resultados obtidos pelo programa computacional desenvolvido e aqueles fornecidos pela planilha eletrônica para o exemplo analisado, verifica-se que não há divergências nas casas decimais dos valores calculados. Observa-se que a porcentagem de erro em relação aos valores de referência da planilha eletrônica varia entre 0% e 0,00001325%.

Para as propriedades geométricas avaliadas, a precisão alcançada é de oito ou mais casas decimais. Entretanto, no caso da tensão normal na flexão geral, embora a precisão também seja de oito casas decimais, nota-se uma variação na porcentagem de erro quando comparada aos resultados da planilha eletrônica. Esse comportamento pode ser atribuído a erros de arredondamento decorrentes do tipo de variável numérica adotada no programa.

5.3. EXEMPLO 3

Para a seção transversal apresentada na Figura 33, deseja-se determinar as propriedades geométricas de área, momento estático de área, centroide, momento de inércia, produto de inércia e raio de giração. Além disso, deseja-se determinar tensões normais na flexão geral no ponto A da Figura 33 e a linha neutra considerando momentos no centroide da seção $M_x = 1300 \text{ kN.cm}$ à direita do eixo x e $M_y = 750 \text{ kN.cm}$ para cima, em relação ao eixo y, e uma força normal $N = 500 \text{ kN}$ tracionada sobre o centroide.

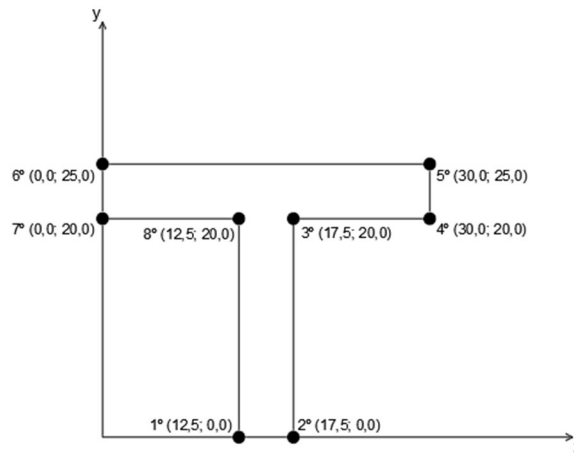
Figura 33 – Seção transversal para exemplo 3.



Fonte: Autoria própria.

Seguindo os exemplos anteriores, considerando todas as coordenadas contidas no primeiro quadrante do plano xy , a Figura 33 pode ser convertida na Figura 34, adotando-se uma ordem a ser seguida das coordenadas.

Figura 34 – Coordenadas do exemplo 3.



Fonte: Autoria própria.

Com as coordenadas decididas, no arquivo de entrada “.txt”, conforme apresentado no APÊNDICE B para o exemplo 3, deve ser informado o número de vértices da figura que seria “8”, número de arestas figura que seria “8”, as coordenadas da figura na ordem escolhida e, por fim, a conectividade entre arestas, vértice inicial e vértice final de todos os lados da seção transversal, material para cada aresta (no caso de seções homogêneas, o coeficiente de homogeneidade será 1), além dos esforços solicitantes e o número “0” de arcos, pela ausência de seções circulares na seção analisada.

Com as considerações preliminares feitas, os dados inseridos no programa computacional geram os valores das propriedades e tensões conforme o arquivo de saída “.txt”, presente no APÊNDICE C para o exemplo 2.

Para a resolução do exemplo 3 na planilha eletrônica, foram usadas as fórmulas mencionadas anteriormente. Assim, os cálculos realizados na planilha podem ser mostrados a seguir:

- Área:

$$A = \sum b_i \cdot h_i = b_1 \cdot h_1 + b_2 \cdot h_2$$

$$A = 30 \cdot 5 + 5 \cdot 20 = 250 \text{ cm}^2$$

- Momento estático de área:

$$Q_x = \sum \bar{y}_i \cdot A_i = \bar{y}_1 \cdot A_1 + \bar{y}_2 \cdot A_2 + \bar{y}_3 \cdot A_3$$

$$Q_y = \sum \bar{x}_i \cdot A_i = \bar{x}_1 \cdot A_1 + \bar{x}_2 \cdot A_2 + \bar{x}_3 \cdot A_3$$

$$Q_x = 30.5.22,5 + 5.20.10 = 4375 \text{ cm}^3$$

$$Q_y = 30.5.15 + 5.20.15 = 3750 \text{ cm}^3$$

- Centroide:

$$C_x = \frac{Q_y}{A} = \frac{3750}{250} = 15 \text{ cm}$$

$$C_y = \frac{Q_x}{A} = \frac{4350}{250} = 17,5 \text{ cm}$$

- Momento de inércia:

$$I_x = \sum \left(\frac{b_i \cdot h_i^3}{12} + A_i \cdot \bar{y}_i^2 \right) = \frac{b_1 \cdot h_1^3}{12} + A_1 \cdot \bar{y}_1^2 + \frac{b_2 \cdot h_2^3}{12} + A_2 \cdot \bar{y}_2^2$$

$$I_y = \sum \left(\frac{b_i^3 \cdot h_i}{12} + A_i \cdot \bar{x}_i^2 \right) = \frac{b_1^3 \cdot h_1}{12} + A_1 \cdot \bar{x}_1^2 + \frac{b_2^3 \cdot h_2}{12} + A_2 \cdot \bar{x}_2^2$$

$$I_x = \frac{30.5^3}{12} + 150.22,5.22,5 + \frac{5.20^3}{12} + 100.10.10 = 89.583,333333333 \text{ cm}^4$$

$$I_{x_{cg}} = I_x - A \cdot C_y^2 = 13.020,833333333 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \frac{30^3 \cdot 5}{12} + 150.15.15 + \frac{5^3 \cdot 20}{12} + 100.15.15 = 67.708,333333333 \text{ cm}^4$$

$$I_{y_{cg}} = I_y - A \cdot C_x^2 = 11.458,333333333 \text{ cm}^4$$

- Produto de inércia:

$$I_{xy} = \sum A_i \cdot \bar{x}_i \cdot \bar{y}_i = A_1 \cdot \bar{x}_1 \cdot \bar{y}_1 + A_2 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{y}_2 + A_3 \cdot \bar{x}_3 \cdot \bar{y}_3$$

$$I_{xy} = 150.15.22,5 + 100.15.10 = 65.625 \text{ cm}^4$$

$$I_{xy_{cg}} = I_{xy} - A \cdot C_x \cdot C_y = 0$$

- Raio de giração:

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{89583,333333333}{250}} = 18,92964486 \text{ cm}$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{67708,333333333}{250}} = 16,45701472 \text{ cm}$$

- Tensão em A:

$$\begin{aligned}\sigma_z &= \left(\frac{1300.11458,33333333 + 750.0}{13020,83333333.11458,33333333 - 0^2} \right) \cdot (25 - 17,5) \\ &\quad - \left(\frac{750.13020,83333333 + 0.0}{13020,83333333.11458,33333333 - 0^2} \right) \cdot (0 - 15) + \frac{50}{250} \\ &= 1,93061818 \text{ kN/cm}^2 = 19,30618180 \text{ kN/cm}^2\end{aligned}$$

- Linha neutra:

$$a = 0,09984; b = -0,06545455; c = 0,2$$

Os valores gerados pelo programa computacional e pela planilha eletrônica do exemplo 3 podem ser mostrados pela Tabelas 5 e 6.

A análise comparativa dos resultados obtidos para o exemplo em estudo, tanto pelo programa computacional desenvolvido quanto pela planilha eletrônica, indica a inexistência de discrepâncias nas casas decimais dos valores calculados. A porcentagem de erro em relação aos valores de referência da planilha eletrônica situa-se entre 0% e 0,00000009%. Para as propriedades geométricas avaliadas, observa-se uma precisão de oito ou mais casas decimais. Entretanto, no que se refere à tensão normal na flexão geral, embora a precisão também seja de oito casas decimais, verifica-se variação na porcentagem de erro quando comparada aos resultados da planilha eletrônica. Essa diferença pode ser atribuída a erros de arredondamento decorrentes do tipo de variável numérica empregado no programa.

Tabela 5 – Propriedades geométricas do exemplo 3.

Propriedades geométricas	Programa computacional	Planilha eletrônica	Porcentagem de erros
Área (cm²)	250,00000000	250,00000000	0,00000000%
Momento estático em x (cm³)	4.375,00000000	4.375,00000000	0,00000000%
Momento estático em y (cm³)	3.750,00000000	3.750,00000000	0,00000000%
Centroide em x (cm)	15,00000000	15,00000000	0,00000000%
Centroide em y (cm)	17,50000000	17,50000000	0,00000000%
Momento de inércia em x (cm⁴)	89.583,33600312	89.583,33333333	0,00000000%
Momento de inércia em x centroidal (cm⁴)	13.020,83333333	13.020,83333333	0,00000000%
Momento de inércia em y (cm⁴)	67.708,33333333	67.708,33333333	0,00000000%
Momento de inércia em y centroidal (cm⁴)	11.458,33333333	11.458,33333333	0,00000000%
Produto de inércia (cm⁴)	65.625,00000000	65.625,00000000	0,00000000%
Produto de inércia centroidal (cm⁴)	0,00000000	0,00000000	0%
Raio de giração em x (cm)	18,92969477	18,92969449	0,00000000%
Raio de giração em y (cm)	16,457015	16,45701472	0,00000000%

Fonte: Autoria própria.

Tabela 6 – Tensão e coeficiente da linha neutra do exemplo 3.

	Programa computacional	Planilha eletrônica	Porcentagem de erro
Tensão em A (MPa)	19,30618180	19,30618180	0,00000009%
Coeficiente a	0,09984000	0,09984000	0,00000000%
Coeficiente b	-0,06545455	-0,06545455	0,00000000%
Coeficiente c	0,20000000	0,20000000	0,00000000%

Fonte: Autoria própria.

Conforme os resultados fornecidos para esses exemplos pelo programa computacional desenvolvido e pela planilha eletrônica, nota-se que praticamente não há diferença nos resultados devido a análise de porcentagem de erros. Logo, os exemplos demonstram que o programa funciona corretamente e atende ao que foi proposto.

Dessa forma, conclui-se que o programa computacional está funcionando de forma adequada para determinar as propriedades geométricas e para tensões normais na flexão geral para seções transversais homogêneas, que gerou dados corretos e precisos em relação aos dados obtidos a partir do método convencional, o que aumenta o grau de confiança nessa ferramenta.

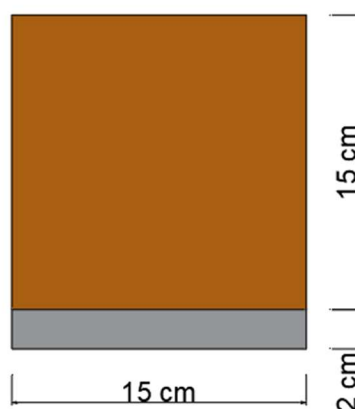
6. EXEMPLO DE APLICAÇÃO

No próximo item, serão apresentados exemplos iguais em quesito de seções e informações fornecidas, tirados da coletânea de questões de Hibbeler (2010), com a finalidade de mostrar que o programa computacional pode ser aplicado nos casos mais comuns na Engenharia Civil, como seções não homogêneas e seções circulares.

6.1. EXEMPLO 1

Para a seção transversal apresentada na Figura 35, deseja-se determinar as propriedades geométricas de área, momento estático de área, centroide, momento de inércia, produto de inércia e raio de giração. Além disso, deseja-se determinar tensões normais na flexão geral em cada um dos vértices da Figura 35 e a linha neutra considerando momentos no centroide da seção $M_x = -200 \text{ kN.cm}$ à esquerda do eixo x. Considerou-se $E_{madeira} = 12 \text{ GPa}$ e $E_{aço} = 200 \text{ GPa}$.

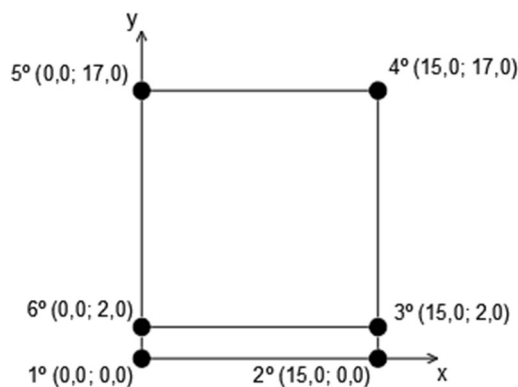
Figura 35 – Seção transversal para exemplo 1.



Fonte: Autoria própria.

Seguindo os exemplos do Capítulo 5, considerando todas as coordenadas contidas no primeiro quadrante do plano xy , a Figura 35 pode ser convertida na Figura 36, adotando-se uma ordem a ser seguida das coordenadas.

Figura 36 – Coordenadas do exemplo 1.



Fonte: Autoria própria.

Com as coordenadas decididas, no arquivo de entrada “.txt”, conforme apresentado no APÊNDICE B para o exemplo 2, deve ser informado o número de vértices da figura que seria “6”, número de arestas figura que seria “8”, visto que, como são dois materiais distintos, uma mesma aresta é considerada duas vezes, as coordenadas da figura na ordem escolhida e, por fim, a conectividade entre arestas, vértice inicial e vértice final de todos os lados da seção transversal, material para cada aresta (no caso dessa seção não homogênea, deve-se identificar o número de materiais como sendo 2, sendo um deles de referência, e o módulo de elasticidade), além dos esforços solicitantes e o número “0” de arcos, pela ausência de seções circulares na seção analisada.

Com as considerações preliminares feitas, os dados inseridos no programa computacional geram os valores das propriedades e tensões conforme o arquivo de saída “.txt”, presente no APÊNDICE C para o exemplo 1.

Os valores gerados pelo programa computacional do exemplo 1 podem ser mostrados pela Tabelas 7 e 8. No caso da Tabela 8, pôde-se comparar os valores das tensões com os valores presentes em Hibbeler (2010).

Conforme os resultados fornecidos para esse exemplo pelo programa computacional desenvolvido e pela planilha eletrônica, nota-se que não há diferença nas casas decimais dos resultados da tensão normal na flexão geral e a porcentagem de erro para valor real presente em Hibbeler (2010) para varia entre $-0,202\%$ e $0,064\%$. Para as tensões em cada uma das arestas analisadas, a precisão da vírgula é de duas a três casas decimais depois da vírgula. No entanto, apesar dos valores do programa computacional serem diferentes, isso pode ser justificado pelos arredondamentos feitos no exemplo do livro Hibbeler (2010).

Tabela 7 – Propriedades geométricas e linha neutra do exemplo 1.

Propriedades geométricas	Programa computacional
Área (cm²)	43,50000000
Momento estático em x (cm³)	158,25000000
Momento estático em y (cm³)	326,25000000
Centroide em x (cm)	7,50000000
Centroide em y (cm)	3,63793103
Momento de inércia em x (cm⁴)	1.511,50000000
Momento de inércia em x centroidal (cm⁴)	935,79741379
Momento de inércia em y (cm⁴)	3.262,50000000
Momento de inércia em y centroidal (cm⁴)	815,62500000
Produto de inércia (cm⁴)	1.186,87500000
Produto de inércia centroidal (cm⁴)	0,00000000
Raio de giração em x (cm)	5,89466932
Raio de giração em y (cm)	8,66025404
Coefficiente a	-0,21372147
Coefficiente b	0,00000000
Coefficiente c	0,00000000

Fonte: Autoria própria.

Tabela 8 – Tensão do exemplo 1.

Arestas	Tensões (kN/cm²)	Programa computacional	Hibbeler (2010)	Porcentagem de erro
1-2	Tensão 1	0,77750397	7,78000000	0,06375707%
6-3	Tensão 2	3,50061030	3,50000000	-0,01743714%
2-3	Tensão 3	0,21003660	0,21000000	-0,01742857%
5-4	Tensão 4	-1,71345660	-1,71000000	-0,20214035%

Fonte: Autoria própria.

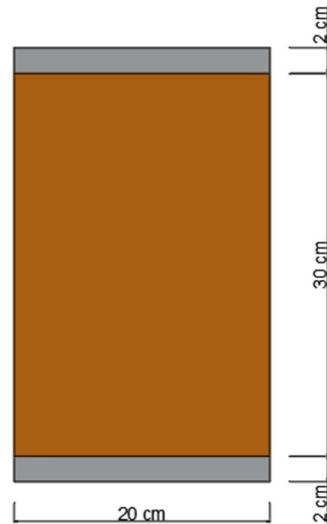
Além disso, as porcentagens de erros baixas no cálculo das tensões validam os valores gerados das propriedades geométricas da seção transversal. Vale ressaltar que o módulo de elasticidade de referência adotado foi o do aço, isso é, $E_{aço} = 200 \text{ GPa}$.

6.2. EXEMPLO 2

Para a seção transversal apresentada na Figura 37, deseja-se determinar as propriedades geométricas de área, momento estático de área, centroide, momento de inércia, produto de inércia e raio de giração. Além disso, deseja-se determinar tensões normais na flexão geral máximas no aço e na madeira da Figura 37 e a linha neutra considerando momentos no centroide

da seção $M_x = -500 \text{ kN.cm}$ à esquerda do eixo x . Considerou-se $E_{madeira} = 11 \text{ GPa}$ e $E_{aço} = 200 \text{ GPa}$.

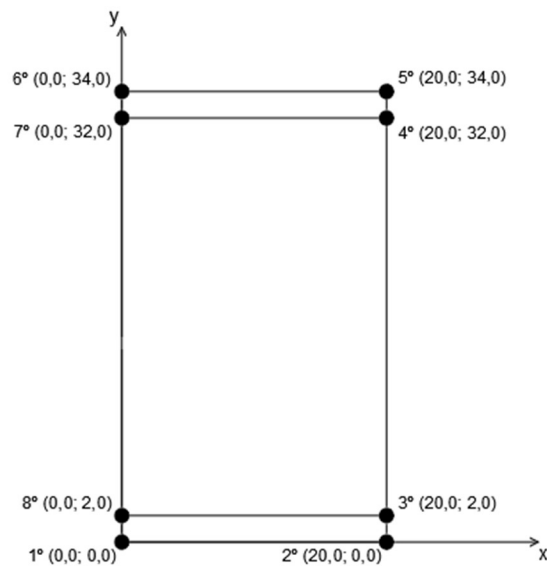
Figura 37 – Seção transversal para exemplo 2.



Fonte: Autoria própria.

Seguindo os exemplos do Capítulo 5, considerando todas as coordenadas contidas no primeiro quadrante do plano xy , a Figura 37 pode ser convertida na Figura 38, adotando-se uma ordem a ser seguida das coordenadas.

Figura 38 – Coordenadas do exemplo 2.



Fonte: Autoria própria.

Com as coordenadas decididas, no arquivo de entrada “.txt”, conforme apresentado no APÊNDICE B para o exemplo 2, o procedimento realizado é semelhante ao exemplo anterior. Com as considerações preliminares feitas, os dados inseridos no programa computacional geram os valores das propriedades e tensões conforme o arquivo de saída “.txt”, presente no APÊNDICE C para o exemplo 2.

Os valores gerados pelo programa computacional e pela planilha eletrônica do exemplo 2 podem ser mostrados pela Tabelas 9 e 10.

Tabela 9 – Propriedades geométricas e linha neutra do exemplo 2.

Propriedades geométricas	Programa computacional
Área (cm²)	113,00000000
Momento estático em x (cm³)	1921,00000000
Momento estático em y (cm³)	1.130,00000000
Centroide em x (cm)	10,00000000
Centroide em y (cm)	17,00000000
Momento de inércia em x (cm⁴)	55.638,66666667
Momento de inércia em x centroidal (cm⁴)	2.981,66666667
Momento de inércia em y (cm⁴)	15.066,66666667
Momento de inércia em y centroidal (cm⁴)	3.766,66666667
Produto de inércia (cm⁴)	19.210,00000000
Produto de inércia centroidal (cm⁴)	0,00000000
Raio de giração em x (cm)	22,18958272
Raio de giração em y (cm)	11,54700538
Coefficiente a	-0,02175647
Coefficiente b	0,00000000
Coefficiente c	0,00000000

Fonte: Autoria própria.

Tabela 10 – Tensão do exemplo 2.

Tensões (MPa)	Programa computacional	Hibbeler (2010)	Porcentagem de erro
Tensão máxima (aço)	3,69860030	3,70000000	0,03782973%
Tensão máxima (madeira)	0,17949090	0,17900000	-0,27424581%

Fonte: Autoria própria.

Conforme os resultados fornecidos para esse exemplo pelo programa computacional desenvolvido e pela planilha eletrônica, nota-se que não há diferença nas casas decimais dos resultados da tensão normal na flexão geral e a porcentagem de erro para valor real presente no livro para varia entre -0,274% e 0,038%. Para as tensões em cada uma das arestas analisadas, a precisão da vírgula é de duas a três casas decimais depois da vírgula. No entanto, apesar dos

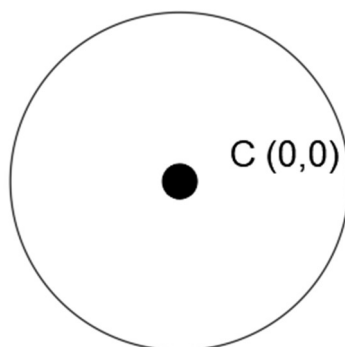
valores do programa computacional serem diferentes, isso pode ser justificado pelos arredondamentos feitos no exemplo do livro Hibbeler (2010).

Além disso, as porcentagens de erros baixas no cálculo das tensões validam os valores gerados das propriedades geométricas da seção transversal. Vale ressaltar que o módulo de elasticidade de referência adotado foi o do aço, isso é, $E_{aço} = 200 \text{ GPa}$.

6.3. EXEMPLO 3

Para a seção transversal circular cujo raio é de 1cm apresentada na Figura 39, deseja-se determinar as propriedades geométricas de área, momento estático de área, centroide, momento de inércia, produto de inércia e raio de giração. Além disso, deseja-se determinar a tensão máxima na flexão gera da Figura 39 e a linha neutra considerando momentos no centroide da seção $M_x = -30 \text{ kN.cm}$ à esquerda do eixo x.

Figura 39 – Seção transversal para exemplo 3.



Fonte: Autoria própria.

Com as coordenadas decididas, no arquivo de entrada “.txt”, conforme apresentado no APÊNDICE B para o exemplo 3, deve ser informado o número de vértices da figura que seria “1”, número de arestas figura que seria “0”, material para cada aresta (no caso dessa seção homogênea, coeficiente de homogeneização é 1), além dos esforços solicitantes e o número “4” de arcos, pela presença de seção circular na seção analisada.

Com as considerações preliminares feitas, os dados inseridos no programa computacional geram os valores das propriedades e tensões conforme o arquivo de saída “.txt”, presente no APÊNDICE C para o exemplo 3.

Os valores gerados pelo programa computacional e pela planilha eletrônica do exemplo 3 podem ser mostrados pela Tabelas 11 e 12.

Tabela 11 – Propriedades geométricas e linha neutra do exemplo 3.

Propriedades geométricas	Programa computacional
Área (cm²)	3,14146346
Momento estático em x (cm³)	0,00000000
Momento estático em y (cm³)	0,00000000
Centroide em x (cm)	0,00000000
Centroide em y (cm)	0,00000000
Momento de inércia em x (cm⁴)	0,78533357
Momento de inércia em x centroidal (cm⁴)	0,78533357
Momento de inércia em y (cm⁴)	0,78533357
Momento de inércia em y centroidal (cm⁴)	0,78533357
Produto de inércia (cm⁴)	0,00000000
Produto de inércia centroidal (cm⁴)	0,00000000
Raio de giração em x (cm)	0,49998972
Raio de giração em y (cm)	0,49998972
Coefficiente a	-38,20032808
Coefficiente b	0,00000000
Coefficiente c	0,00000000

Fonte: Autoria própria.

Tabela 12 – Tensão do exemplo 3.

Tensões (MPa)	Programa computacional	Hibbeler (2010)	Porcentagem de erro
Tensão máxima	-382,00328080	-381,97000000	-0,00871294%

Fonte: Autoria própria.

Conforme os resultados fornecidos para esse exemplo pelo programa computacional desenvolvido e pela planilha eletrônica, nota-se que não há diferença nas casas decimais dos resultados da tensão normal na flexão geral e a porcentagem de erro para valor real presente no livro é de -0,0087%. Para a tensão, a precisão da vírgula é de três casas decimais depois da vírgula. No entanto, apesar dos valores do programa computacional serem diferentes, isso pode ser justificado pelos arredondamentos feitos no exemplo do livro Hibbeler (2010).

Além disso, a porcentagem de erro de -0,0087% no cálculo das tensões validam os valores gerados das propriedades geométricas da seção transversal.

Conforme os resultados fornecidos para esses exemplos pelo programa computacional desenvolvido e pelo livro Hibbeler (2010), nota-se que praticamente não há diferença nos resultados devido a análise de porcentagem de erros. Logo, os exemplos demonstram que o programa está apto para resolver problemas comuns da Engenharia Civil e atende ao que foi proposto.

Dessa forma, conclui-se que o programa computacional está funcionando corretamente e pode ser aplicado para determinar as propriedades geométricas e para tensões normais na flexão geral para seções transversais não homogêneas e circulares. Por consequência, gerou-se dados corretos e precisos em relação aos dados obtidos a partir do método convencional do livro didático, o que aumenta o grau de confiança nessa ferramenta.

Além disso, o programa está adaptado a diferentes tipos de seções, tanto homogêneas como não homogêneas, tanto polifonias quanto circulares.

7. CONCLUSÕES

Neste trabalho, foi desenvolvido um programa computacional que, em primeiro momento, fosse capaz de determinar as propriedades geométricas de seções transversais diversas e, em último momento, calcular a tensão normal na flexão geral. Para esse objetivo, realizou-se uma pesquisa cuja finalidade era encontrar: as integrais de área que descreviam cada uma das propriedades geométricas, as fórmulas nas quais determinam a tensão normal na flexão geral e a resolução responsável por converter uma integral de área em uma integral de contorno.

Para que o programa computacional desenvolvido tivesse a capacidade de calcular as propriedades geométricas de seções transversais poligonais e circulares homogêneas ou não homogêneas, além do código computacional respeitar as condições preliminares do Teorema de Green, as formulações desenvolvidas deveriam depender de coordenadas bidimensionais e serem adaptadas a qualquer caso, seja ele simples ou complexo.

A metodologia utilizada neste trabalho não é mostrada na literatura comum. Em vários trabalhos voltados para análise e desenvolvimento de ferramentas para determinação de propriedades geométricas de seções de elementos estruturais comuns na engenharia civil, são utilizadas formulações específicas já apresentadas na literatura, o que limita essas ferramentas a casos em que a seção não é usual e possui mais de um material. Logo, o aspecto mais complexo do procedimento é encontrar formulações gerais dessas propriedades que atendam a qualquer caso. Dessa forma, o procedimento escolhido para o trabalho foi realizado de forma a evitar o dispêndio prévio do usuário do programa e, assim, evitar erros de cálculo.

A estratégia de converter integrais de área em integrais de contorno através do Teorema de Green não é comumente mostrada na literatura de livros de graduação do curso de Engenharia Civil, apesar do teorema estar presente em livros de Cálculo, como Stewart (2013). Logo, utilizando essas fontes, para desenvolver as formulações utilizadas neste trabalho, foi necessário seguir os conceitos preliminares de contorno de área no teorema, como: divergente de um campo vetorial, campo vetorial, ponto numa reta parametrizada e vetores unitários e diretores. Então, apesar da literatura voltada à análise estrutural não ser específica na dedução das fórmulas das propriedades geométricas, com as integrais de área e a resolução do Teorema de Green, foi possível desenvolver as formulações necessárias para o funcionamento do programa computacional.

Sobre as seções circulares, foi necessário consultar livros de Cálculo, como Stewart (2013), que disponibilizavam a parametrização da circunferência com a finalidade de

implementar as fórmulas. Através dessa parametrização, é possível descrever os arcos de uma circunferência no programa computacional e permitir com que seções circulares tenham suas propriedades e tensões normais na flexão geral calculadas. Para diversificar o material das seções, aplicou-se o coeficiente de homogeneização, no qual, permitiu o cálculo das propriedades e tensões citadas para seções não homogêneas.

Sobre os problemas resolvidos através do programa computacional, os exemplos de validação tiveram uma porcentagem de erro entre $-0,00000004$ e $0,00001325$ para propriedades geométricas e tensões normais na flexão geral em relação ao exemplo feito em planilha eletrônica. No caso dos exemplos de aplicação, a porcentagem de erro ficou entre $-0,0087\%$ e $0,064\%$ para tensões normais na flexão geral. Logo, as porcentagens baixas de erro comprovam a confiabilidade do programa.

Por fim, apesar do programa computacional conseguir calcular as propriedades geométricas e tensões normais na flexão geral para seções variadas, o programa apresenta limitações, visto que seções inclinadas não podem ser calculadas devido às formulações consideradas e à limitação da parametrização da circunferência.

O programa computacional foi desenvolvido de forma a dinamizar os cálculos das propriedades geométricas de seções. Logo, como mostrado no Capítulo 5 e 6 do trabalho, com o objetivo de determinar as propriedades geométricas e a tensão normal na flexão geral de seções transversais homogêneas e não homogêneas circulares e poligonais, o programa atendeu ao objetivo almejado e forneceu dados corretos e precisos em relação à metodologia de cálculo tradicional da literatura.

7.1. SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

- Adaptar o programa computacional para que possa calcular seções inclinadas;
- Desenvolver fórmulas de propriedades geométricas que permitam com que programa calcule seções semicirculares de diferentes ângulos;
- Adaptar o programa computacional para que possa calcular a tensão por cisalhamento.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**. Projeto de estruturas de concreto - Procedimento. Rio de Janeiro, 2023.

AHRENS, J.; GEVECI, B.; LAW, C. **ParaView: An End-User Tool for Large Data Visualization**. In Visualization Handbook. Elsevier, 2005.

BEER, F. P et al. **Mecânica dos Materiais**. 5 ed. Porto Alegre: AMGH, 2011.

BEER, F. P et al. **Mecânica vetorial para engenheiros: estática**. 9ed. Porto Alegre: AMGH, 2012.

CASTRO, C. A. C.; NOGUEIRA JUNIOR, C. A. **Estudo e desenvolvimento de um modelo computacional para avaliação de propriedades geométricas de figuras utilizadas em cálculos de projetos estruturais**. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE EDUCAÇÃO EM ENGENHARIA (COBENGE), 2009, Brasília. Anais [...]. Brasília: ABENGE, 2009. Disponível em: <<https://www.abenge.org.br/cobenge/legado/arquivos/9/artigos/479.pdf>>. Acesso em: 2 mar. 2025.

CODA, H. B. **Mecânica dos Sólidos: Volume I**. São Carlos: EESC-USP, 2017. Disponível em: <<https://www.livrosabertos.abcd.usp.br/portaldelivrosUSP/catalog/book/1275>>. Acesso em: 17 mar. 2025.

CODA, H. B. **Mecânica dos Sólidos: Volume II**. São Carlos: EESC-USP, 2017. Disponível em: <<https://www.livrosabertos.abcd.usp.br/portaldelivrosUSP/catalog/book/1276>>. Acesso em: 17 mar. 2025.

FONTES, F. F. **Análise estrutural de elementos lineares segundo a NBR 6118:2003**. 2005. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2005. Disponível em: <http://sistemas.set.eesc.usp.br/static/media/producao/2005ME_FernandoFernandesFontes.pdf>. Acesso em: 17 mar. 2025.

HIBBELER, R. C. **Análise das Estruturas**. 8 ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2013.

HIBBELER, R. C. **Resistência dos Materiais**. 7 ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

MELCONIAN, S. **Mecânica Técnica e Resistência dos Materiais**. 17ª edição. São Paulo: Editora Érica, 2009.

OLIVEIRA, A. C. **Desenvolvimento de programa para cálculo e análise de seções estruturais com geometria livre**. 2023. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2023. Disponível em: <https://riu.ufam.edu.br/bitstream/prefix/6625/6/TCC_AlexandreCastilhodeOliveira.pdf>. Acesso em: 20 mar. 2025.

OLIVEIRA, B. C. **Estudo comparativo de metodologias de dosagem de concreto para pavimentação: IPT, ABCP e IPT/Pro**. 2017. 55 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Civil) – Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2017. Disponível em: <<https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/123456789/24930/2/TCC%20-%20BRUNO%20CAVALCANTI%20DE%20OLIVEIRA.pdf>>. Acesso em: 20 mar. 2025.

ONOFRE, E. J. O. **Medidas de comprimento e de área: um estudo sobre unidades de medidas e sobre o cálculo de áreas de algumas figuras planas**. 2018. 48 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2018. Disponível em: <<https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/123456789/4193/1/EJOO14052018.pdf>>. Acesso em: 20 mar. 2025.

PACCOLA, R. R.; CODA, H. B. **AcadView**. Versão 1.0. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2005. Disponível em: <<http://www.set.eesc.usp.br/portal/pt/softwares>>. Acesso em: 17 mar. 2025.

SANTOS, A. L. B. et al. Automação da análise de tensão em vigas através de planilhas no software Excel®. In: **XLI Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering**. 2020. Disponível em: <<https://publicacoes.softaliza.com.br/cilamce2020/article/download/6745/5785>>. Acesso em: 17 mar. 2025.

STEWART, J. **Cálculo**. 7 ed., vol 2, São Paulo: Cengage Learning BR, 2013.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS. Grades Curriculares dos Cursos da UFAM. 2022. Disponível em: <<https://ecampus.ufam.edu.br/ecampus/gradesCurriculares>>. Acesso em: 17 mar. 2025.

APÊNDICE A – DEDUÇÃO DAS FORMULAÇÕES

Neste apêndice, apresenta-se a dedução completa das formulações das propriedades geométricas para seções homogêneas desenvolvidas no Capítulo 3.

I. ÁREA DE OUTRO CAMPO VETORIAL

$$\begin{aligned}
 A &= \int_S (0, y) \cdot \left(\frac{v_y}{d}, -\frac{v_x}{d} \right) \cdot d \cdot dt = \int_S - \left(\frac{y \cdot v_x}{d} \right) \cdot d \cdot dt = \\
 &= \int_0^1 -y \cdot v_x \cdot dt = - \int_0^1 y \cdot v_x \cdot dt = - \int_0^1 (y_i + v_y \cdot t) \cdot v_x \cdot dt = -v_x \cdot \int_0^1 (y_i + v_y \cdot t) \cdot dt = \\
 &= -v_x \cdot \left(y_i \cdot t + \frac{v_y \cdot t^2}{2} \right) \Big|_0^1 = -v_x \cdot \left(\frac{2 \cdot y_i \cdot t}{2} + \frac{v_y \cdot t^2}{2} \right) \Big|_0^1 = -\frac{v_x}{2} \cdot (2 \cdot y_i \cdot t + v_y \cdot t^2) \Big|_0^1 = \\
 &= \frac{-v_x \cdot (2 \cdot y_i + v_y)}{2} = \frac{-v_x \cdot (2 \cdot y_i + v_y)}{2} = \frac{-(x_{i+1} - x_i) \cdot (2 \cdot y_i + y_{i+1} - y_i)}{2} = \\
 &= \frac{(y_{i+1} + y_i) \cdot (-x_{i+1} + x_i)}{2} = \frac{(y_{i+1} + y_i) \cdot (x_i - x_{i+1})}{2} \Rightarrow \\
 \Leftrightarrow A &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (y_{i+1} + y_i) \cdot (x_i - x_{i+1})
 \end{aligned}$$

II. MOMENTO ESTÁTICO DE ÁREA EM X

$$\begin{aligned}
 Q_x &= \int_S \left(0, \frac{y^2}{2} \right) \cdot \left(\frac{v_y}{d}, -\frac{v_x}{d} \right) \cdot d \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot \int_S \left(-\frac{y^2 \cdot v_x}{d} \right) \cdot d \cdot dt = \\
 &= -\frac{1}{2} \cdot \int_S y^2 \cdot v_x \cdot dt = -\frac{1}{2} \cdot \int_0^1 y^2 \cdot v_x \cdot dt = -\frac{1}{2} \cdot \int_0^1 (y_i + v_y \cdot t)^2 \cdot v_x \cdot dt = \\
 &= -\frac{v_x}{2} \cdot \int_0^1 (y_i + v_y \cdot t)^2 \cdot dt = -\frac{v_x}{2} \cdot \int_0^1 (y_i^2 + 2 \cdot y_i \cdot v_y \cdot t + v_y^2 \cdot t^2) \cdot dt = \\
 &= -\frac{v_x}{2} \cdot \left(y_i^2 \cdot t + \frac{2 \cdot y_i \cdot v_y \cdot t^2}{2} + \frac{v_y^2 \cdot t^3}{3} \right) \Big|_0^1 = -\frac{v_x}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot (3 \cdot y_i^2 + 3 \cdot y_i \cdot v_y + v_y^2) = \\
 &= -\frac{v_x \cdot (3 \cdot y_i^2 + 3 \cdot y_i \cdot v_y + v_y^2)}{6} = -\frac{(x_{i+1} - x_i) \cdot (3 \cdot y_i^2 + 3 \cdot y_i \cdot (y_{i+1} - y_i) + (y_{i+1} - y_i)^2)}{6} \\
 &= \frac{(x_i - x_{i+1}) \cdot (3 \cdot y_i^2 + 3 \cdot y_i \cdot y_{i+1} - 3 \cdot y_i^2 + y_{i+1}^2 - 2 \cdot y_{i+1} \cdot y_i + y_i^2)}{6} =
 \end{aligned}$$

$$= \frac{(x_i - x_{i+1}) \cdot (y_i^2 + y_i \cdot y_{i+1} + y_{i+1}^2)}{6} = \frac{(x_i - x_{i+1}) \cdot (y_i^2 + y_i \cdot y_{i+1} + y_{i+1}^2)}{6} \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow Q_x = \frac{1}{6} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i+1}) \cdot (y_i^2 + y_i \cdot y_{i+1} + y_{i+1}^2)$$

III. MOMENTO ESTÁTICO DE ÁREA EM Y

$$Q_y = \int_s \left(\frac{x^2}{2}, 0 \right) \cdot \left(\frac{v_y}{d}, -\frac{v_x}{d} \right) \cdot d \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot \int_s \left(\frac{x^2 \cdot v_y}{d} \right) \cdot d \cdot dt =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int_s x^2 \cdot v_y \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 x^2 \cdot v_y \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 (x_i + v_x \cdot t)^2 \cdot v_y \cdot dt =$$

$$= \frac{v_y}{2} \cdot \int_0^1 (x_i + v_x \cdot t)^2 \cdot dt = \frac{v_y}{2} \cdot \int_0^1 (x_i^2 + 2 \cdot x_i \cdot v_x \cdot t + v_x^2 \cdot t^2) \cdot dt =$$

$$= \frac{v_y}{2} \cdot \left(x_i^2 \cdot t + \frac{2 \cdot x_i \cdot v_x \cdot t^2}{2} + \frac{v_x^2 \cdot t^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{v_y}{2} \cdot \frac{1}{3} (3 \cdot x_i^2 + 3 \cdot x_i \cdot v_x + v_x^2) \Big|_0^1 =$$

$$= \frac{v_y \cdot (3 \cdot x_i^2 + 3 \cdot x_i \cdot v_x + v_x^2)}{6} = \frac{(y_{i+1} - y_i) \cdot (3 \cdot x_i^2 + 3 \cdot x_i \cdot (x_{i+1} - x_i) + (x_{i+1} - x_i)^2)}{6} =$$

$$= \frac{(y_{i+1} - y_i) \cdot (3 \cdot x_i^2 + 3 \cdot x_i \cdot x_{i+1} - 3 \cdot x_i^2 + x_{i+1}^2 - 2 \cdot x_{i+1} \cdot x_i + x_i^2)}{6} =$$

$$= \frac{(y_{i+1} - y_i) \cdot (x_i^2 + x_i \cdot x_{i+1} + x_{i+1}^2)}{6} \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow Q_y = \frac{1}{6} \cdot \sum_{i=1}^n (y_{i+1} - y_i) \cdot (x_i^2 + x_i \cdot x_{i+1} + x_{i+1}^2)$$

IV. MOMENTO DE INÉRCIA EM X

$$I_x = \int_s \left(0, \frac{y^3}{3} \right) \cdot \left(\frac{v_y}{d}, -\frac{v_x}{d} \right) \cdot d \cdot dt = \frac{1}{3} \cdot \int_s - \left(\frac{y^3 \cdot v_x}{d} \right) \cdot d \cdot dt =$$

$$= -\frac{1}{3} \cdot \int_s y^3 \cdot v_x \cdot dt = -\frac{1}{3} \cdot \int_0^1 y^3 \cdot v_x \cdot dt = -\frac{1}{3} \cdot \int_0^1 (y_i + v_y \cdot t)^3 \cdot v_x \cdot dt =$$

$$= -\frac{v_x}{3} \cdot \int_0^1 (y_i + v_y \cdot t)^3 \cdot dt = -\frac{v_x}{3} \cdot \int_0^1 (y_i^3 + 3 \cdot y_i \cdot v_y^2 \cdot t^2 + 3 \cdot y_i^2 \cdot v_y \cdot t + v_y^3 \cdot t^3) \cdot dt =$$

$$= -\frac{v_x}{3} \cdot \left(y_i^3 \cdot t + \frac{3 \cdot y_i \cdot v_y^2 \cdot t^3}{3} + \frac{3 \cdot y_i^2 \cdot v_y \cdot t^2}{2} + \frac{v_y^3 \cdot t^4}{4} \right) \Big|_0^1 =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{v_x}{3} \cdot \frac{1}{4} (4 \cdot y_i^3 + 4 \cdot y_i \cdot v_y^2 + 6 \cdot y_i^2 \cdot v_y + v_y^3) = -\frac{v_x}{12} \cdot (4 \cdot y_i^3 + 4 \cdot y_i \cdot v_y^2 + 6 \cdot y_i^2 \cdot v_y + v_y^3) = \\
&= -\frac{v_x}{12} \cdot (v_y^2 \cdot (v_y + 4 \cdot y_i) + y_i^2 \cdot (6 \cdot v_y + 4 \cdot y_i)) = \\
&= -\frac{(x_{i+1} - x_i)}{12} \cdot ((y_{i+1} - y_i)^2 \cdot (y_{i+1} - y_i + 4 \cdot y_i) + y_i^2 \cdot (6 \cdot y_{i+1} - 6 \cdot y_i + 4 \cdot y_i)) = \\
&= \frac{(x_i - x_{i+1})}{12} \cdot (y_{i+1}^3 + 3 \cdot y_{i+1}^2 \cdot y_i - 2 \cdot y_{i+1} \cdot y_i^2 - 6 \cdot y_{i+1} \cdot y_i^2 + y_{i+1} \cdot y_i^2 + 3 \cdot y_i^3 + 6 \cdot y_{i+1} \cdot y_i^2 \\
&\quad - 2 \cdot y_i^3) = \\
&= \frac{(x_i - x_{i+1}) \cdot (y_{i+1}^3 + y_{i+1}^2 \cdot y_i + y_{i+1} \cdot y_i^2 + y_i^3)}{12} = \\
&= \frac{(x_i - x_{i+1}) \cdot [y_{i+1} \cdot (y_i^2 + y_{i+1}^2) + y_i \cdot (y_i^2 + y_{i+1}^2)]}{12} = \\
&= \frac{(x_i - x_{i+1}) \cdot (y_{i+1} + y_i) \cdot (y_i^2 + y_{i+1}^2)}{12} \Rightarrow \\
&\Leftrightarrow I_x = \frac{1}{12} \cdot \sum_{i=1}^n (y_i^2 + y_{i+1}^2) \cdot (x_i - x_{i+1}) \cdot (y_i + y_{i+1})
\end{aligned}$$

V. MOMENTO DE INÉRCIA EM Y

$$\begin{aligned}
I_y &= \int_S \left(\frac{x^3}{3}, 0 \right) \cdot \left(\frac{v_y}{d}, -\frac{v_x}{d} \right) \cdot d \cdot dt = \frac{1}{3} \cdot \int_S \left(\frac{x^3 \cdot v_y}{d} \right) \cdot d \cdot dt = \\
&= \frac{1}{3} \cdot \int_S x^3 \cdot v_y \cdot dt = \frac{1}{3} \cdot \int_0^1 x^3 \cdot v_y \cdot dt = \frac{1}{3} \cdot \int_0^1 (x_i + v_x \cdot t)^3 \cdot v_y \cdot dt = \\
&= \frac{v_y}{3} \cdot \int_0^1 (x_i + v_x \cdot t)^3 \cdot dt = \frac{v_y}{3} \cdot \int_0^1 (x_i^3 + 3 \cdot x_i \cdot v_x^2 \cdot t^2 + 3 \cdot x_i^2 \cdot v_x \cdot t + v_x^3 \cdot t^3) \cdot dt \\
&= \frac{v_y}{3} \cdot \left(x_i^3 \cdot t + \frac{3 \cdot x_i \cdot v_x^2 \cdot t^3}{3} + \frac{3 \cdot x_i^2 \cdot v_x \cdot t^2}{2} + \frac{v_x^3 \cdot t^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \\
&= \frac{v_y}{3} \cdot \frac{1}{4} (4 \cdot x_i^3 + 4 \cdot x_i \cdot v_x^2 + 6 \cdot x_i^2 \cdot v_x + v_x^3) = \frac{v_y}{12} \cdot (4 \cdot x_i^3 + 4 \cdot x_i \cdot v_x^2 + 6 \cdot x_i^2 \cdot v_x + v_x^3) = \\
&= \frac{v_y}{12} \cdot (v_x^2 \cdot (v_x + 4 \cdot x_i) + x_i^2 \cdot (6 \cdot v_x + 4 \cdot x_i)) = \\
&= \frac{(y_{i+1} - y_i)}{12} \cdot ((x_{i+1} - x_i)^2 \cdot (x_{i+1} - x_i + 4 \cdot x_i) + x_i^2 \cdot (6 \cdot x_{i+1} - 6 \cdot x_i + 4 \cdot x_i)) = \\
&= \frac{(y_{i+1} - y_i)}{12} \cdot (x_{i+1}^3 + 3 \cdot x_{i+1}^2 \cdot x_i - 2 \cdot x_{i+1} \cdot x_i^2 - 6 \cdot x_{i+1} \cdot x_i^2 + x_{i+1} \cdot x_i^2 + 3 \cdot x_i^3 + 6 \cdot x_{i+1} \cdot x_i^2 \\
&\quad - 2 \cdot x_i^3) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(y_{i+1} - y_i) \cdot (x_{i+1}^3 + x_{i+1}^2 \cdot x_i + x_{i+1} \cdot x_i^2 + x_i^3)}{12} = \\
&= \frac{(y_{i+1} - y_i) \cdot [x_{i+1} \cdot (x_i^2 + x_{i+1}^2) + x_i \cdot (x_i^2 + x_{i+1}^2)]}{12} = \\
&= \frac{(y_{i+1} - y_i) \cdot (x_{i+1} + x_i) \cdot (x_i^2 + x_{i+1}^2)}{12} \Rightarrow \\
\Leftrightarrow I_y &= \frac{1}{12} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i^2 + x_{i+1}^2) \cdot (x_i + x_{i+1}) \cdot (y_{i+1} - y_i)
\end{aligned}$$

VI. PRODUTO DE INÉRCIA

$$\begin{aligned}
I_{xy} &= \int_S \left(\frac{x^2 \cdot y}{2}, 0 \right) \cdot \left(\frac{v_y}{d}, -\frac{v_x}{d} \right) \cdot d \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot \int_S \left(\frac{x^2 \cdot y \cdot v_y}{d} \right) \cdot d \cdot dt \\
&= \frac{1}{2} \cdot \int_S x^2 \cdot y \cdot v_y \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 x^2 \cdot y \cdot v_y \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 (x_i + v_x \cdot t)^2 \cdot (y_i + v_y \cdot t) \cdot v_y \cdot dt = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 (x_i + v_x \cdot t)^2 \cdot (y_i + v_y \cdot t) \cdot dt = \frac{v_y}{2} \cdot \int_0^1 (x_i^2 + 2 \cdot x_i \cdot v_x \cdot t + v_x^2 \cdot t^2) \cdot (y_i + v_y \cdot t) \cdot dt = \\
&= \frac{v_y}{2} \cdot \int_0^1 (x_i^2 \cdot y_i + x_i^2 \cdot v_y \cdot t + 2 \cdot x_i \cdot y_i \cdot v_x \cdot t + 2 \cdot x_i \cdot v_x \cdot v_y \cdot t^2 + y_i \cdot v_x^2 \cdot t^2 + v_x^2 \cdot v_y \cdot t^3) \cdot dt = \\
&= \frac{v_y}{2} \cdot \left(x_i^2 \cdot y_i \cdot t + \frac{x_i^2 \cdot v_y \cdot t^2}{2} + \frac{2 \cdot x_i \cdot y_i \cdot v_x \cdot t^2}{2} + \frac{2 \cdot x_i \cdot v_x \cdot v_y \cdot t^3}{3} + \frac{y_i \cdot v_x^2 \cdot t^3}{3} + \frac{v_x^2 \cdot v_y \cdot t^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \\
&= \frac{v_y}{2} \cdot \frac{1}{12} \cdot (12 \cdot x_i^2 \cdot y_i + 6 \cdot x_i^2 \cdot v_y + 12 \cdot x_i \cdot y_i \cdot v_x + 8 \cdot x_i \cdot v_x \cdot v_y + 4 \cdot y_i \cdot v_x^2 + 3 \cdot v_x^2 \cdot v_y) = \\
&= \frac{(y_{i+1} - y_i)}{24} \cdot (12 \cdot x_i^2 \cdot y_i + 6 \cdot x_i^2 \cdot (y_{i+1} - y_i) + 12 \cdot x_i \cdot y_i \cdot (x_{i+1} - x_i) + 8 \cdot x_i \cdot (x_{i+1} \\
&\quad - x_i) \cdot (y_{i+1} - y_i) + 4 \cdot y_i \cdot (x_{i+1} - x_i)^2 + 3 \cdot (x_{i+1} - x_i)^2 \cdot (y_{i+1} - y_i)) = \\
&= \frac{(y_{i+1} - y_i)}{24} \cdot (9 \cdot x_i^2 \cdot y_{i+1} + 3 \cdot x_i^2 \cdot y_i + 2 \cdot x_i \cdot y_i \cdot x_{i+1} + 2 \cdot x_i \cdot x_{i+1} \cdot y_{i+1} + x_{i+1}^2 \cdot y_i \\
&\quad - 8 \cdot x_i^2 \cdot y_{i+1} + 3 \cdot x_{i+1}^2 \cdot y_{i+1}) = \\
&= \frac{(y_{i+1} - y_i) \cdot [(3 \cdot x_i^2 + 2 \cdot x_i \cdot x_{i+1} + x_{i+1}^2) \cdot y_i + (x_i^2 + 2 \cdot x_i \cdot x_{i+1} + 3 \cdot x_{i+1}^2) \cdot y_{i+1}]}{24} = \\
&= \frac{(3 \cdot x_i^2 + 2 \cdot x_i \cdot x_{i+1} + x_{i+1}^2) \cdot (y_i \cdot y_{i+1} - y_i^2)}{24} + \frac{(x_i^2 + 2 \cdot x_i \cdot x_{i+1} + 3 \cdot x_{i+1}^2) \cdot (y_{i+1}^2 - y_i \cdot y_{i+1})}{24} \\
\Leftrightarrow I_{xy} &= \frac{1}{24} \cdot \sum_{i=1}^n [(3 \cdot x_i^2 + 2 \cdot x_i \cdot x_{i+1} + x_{i+1}^2) \cdot (y_i \cdot y_{i+1} - y_i^2) \\
&\quad + (x_i^2 + 2 \cdot x_i \cdot x_{i+1} + 3 \cdot x_{i+1}^2) \cdot (y_{i+1}^2 - y_i \cdot y_{i+1})]
\end{aligned}$$

APÊNDICE B – FORMATO DO ARQUIVO DE ENTRADA

Neste apêndice, apresenta-se o formato dos arquivos de entrada “.txt” utilizados nos exemplos do Capítulo 5 e 6 que permitiram com que o programa computacional desenvolvido fosse capaz de ler corretamente as informações.

I. EXEMPLO 5.1

```

Número de arestas
12
Número de vértices
12
Coordenadas (índice do vértice; coordenada x; coordenada y)
1,0,0
2,12,0
3,12,0.5
4,6.25,0.5
5,6.25,12.5
6,12,12.5
7,12,13
8,0,13
9,0,12.5
10,5.75,12.5
11,5.75,0.5
12,0,0.5
Número de arestas
12
Conectividade (índice da aresta; vértice final; vértice final)
1,1,2
2,2,3
3,3,4
4,4,5
5,5,6
6,6,7
7,7,8
8,8,9
9,9,10
10,10,11
11,11,12
12,12,1
Número de materiais
1
Módulo de elasticidade de referência
3.0
Materiais (índice do material; módulo de elasticidade)
1,3.0
Associação dos materiais às arestas (índice da aresta; índice do material)
1,1
2,1
3,1
4,1
5,1
6,1
7,1
8,1
9,1
10,1
11,1
12,1
Número de arcos

```

0
 Arcos (índice do arco; centro; raio; quadrante; número de arestas; índice do material, sentido)
 Esforços (esforço normal; momento em x; momento em y)
 50.0,0.0,150.0

II. EXEMPLO 5.2

Número de vértices
 8
 Coordenadas (índice do vértice; coordenada x; coordenada y)
 1,25,0
 2,30,0
 3,30,20
 4,5,20
 5,5,35
 6,0,35
 7,0,15
 8,25,15
 Número de arestas
 8
 Conectividade (índice da aresta; vértice final; vértice final)
 1,1,2
 2,2,3
 3,3,4
 4,4,5
 5,5,6
 6,6,7
 7,7,8
 8,8,1
 Número de materiais
 1
 Módulo de elasticidade de referência
 3.0
 Materiais (índice do material; módulo de elasticidade)
 1,3.0
 Associação dos materiais às arestas (índice da aresta; índice do material)
 1,1
 2,1
 3,1
 4,1
 5,1
 6,1
 7,1
 8,1
 Número de arcos
 0
 Arcos (índice do arco; centro; raio; quadrante; número de arestas; índice do material, sentido)
 Esforços (esforço normal; momento em x; momento em y)
 50.0,-150.0,0.0

III. EXEMPLO 5.3

Número de vértices
 8
 Coordenadas (índice do vértice; coordenada x; coordenada y)
 1,12.5,0
 2,17.5,0
 3,17.5,20
 4,30,20
 5,30,25
 6,0,25
 7,0,20
 8,12.5,20
 Número de arestas
 8
 Conectividade (índice da aresta; vértice final; vértice final)
 1,1,2

2,2,3
 3,3,4
 4,4,5
 5,5,6
 6,6,7
 7,7,8
 8,8,1
 Número de materiais
 1
 Módulo de elasticidade de referência
 3.0
 Materiais (índice do material; módulo de elasticidade)
 1,3.0
 Associação dos materiais às arestas (índice da aresta; índice do material)
 1,1
 2,1
 3,1
 4,1
 5,1
 6,1
 7,1
 8,1
 Número de arcos
 0
 Arcos (índice do arco; centro; raio; quadrante; número de arestas; índice do material, sentido)
 Esforços (esforço normal; momento em x; momento em y)
 50.0,1300.0,750.0

IV. EXEMPLO 6.1

Número de vértices
 6
 Coordenadas (índice do vértice; coordenada x; coordenada y)
 1,0,0
 2,15,0
 3,15,2
 4,15,17
 5,0,17
 6,0,2
 Número de arestas
 8
 Conectividade (índice da aresta; vértice final; vértice final)
 1,1,2
 2,2,3
 3,3,6
 4,6,1
 5,3,4
 6,4,5
 7,5,6
 8,6,3
 Número de materiais
 2
 Módulo de elasticidade de referência
 200
 Materiais (índice do material; módulo de elasticidade)
 1,200
 2,12
 Associação dos materiais às arestas (índice da aresta; índice do material)
 1,1
 2,1
 3,1
 4,1
 5,2
 6,2
 7,2
 8,2
 Número de arcos
 0
 Arcos (índice do arco; centro; raio; quadrante; número de arestas; índice do material, sentido)
 Esforços (esforço normal; momento em x; momento em y)
 0.0,-200.0,0.0

V. EXEMPLO 6.2

Número de vértices
8
Coordenadas (índice do vértice; coordenada x; coordenada y)
1,0,0
2,20,0
3,20,2
4,20,32
5,20,34
6,0,34
7,0,32
8,0,2
Número de arestas
12
Conectividade (índice da aresta; vértice final; vértice final)
1,1,2
2,2,3
3,3,8
4,8,1
5,8,3
6,3,4
7,4,7
8,7,8
9,7,4
10,4,5
11,5,6
12,6,7
Número de materiais
2
Módulo de elasticidade de referência
200
Materiais (índice do material; módulo de elasticidade)
1,200
2,11
Associação dos materiais às arestas (índice da aresta; índice do material)
1,1
2,1
3,1
4,1
5,2
6,2
7,2
8,2
9,1
10,1
11,1
12,1
Número de arcos
0
Arcos (índice do arco; centro; raio; quadrante; número de arestas; índice do material, sentido)
Esforços (esforço normal; momento em x; momento em y)
0.0,-500.0,0.0

VI. EXEMPLO 6.3

Número de vértices
1
Coordenadas (índice do vértice; coordenada x; coordenada y)
1,0,0
Número de arestas
0
Conectividade (índice da aresta; vértice final; vértice final)
Número de materiais
1
Módulo de elasticidade de referência
200
Materiais (índice do material; módulo de elasticidade)
1,200
Associação dos materiais às arestas (índice da aresta; índice do material)
Número de arcos
4
Arcos (índice do arco; centro; raio; quadrante; número de arestas; índice do material, sentido)

```
1,1,1,1,100,1,"A"  
2,1,1,2,100,1,"A"  
3,1,1,3,100,1,"A"  
4,1,1,4,100,1,"A"  
Esforços (esforço normal; momento em x; momento em y)  
0.0,-30.0,0.0
```

Desses arquivos de entrada, vale ressaltar algumas características importantes que devem ser observadas pelo usuário:

- A numeração de quaisquer parâmetros, como vértices, coordenadas, arestas e conectividade, deve ser de 1 até a quantidade do respectivo parâmetro;
- O separador decimal dos números reais, por exigência da linguagem utilizada, deve ser o ponto “.”;
- A separação entre números que estão em uma mesma linha pode ser dada por espaços em vírgula;
- Para subtrair a área circular, basta usar “H”, que significa o sentido horário, e para somar, basta usar “A”;
- O programa não realiza nenhuma conversão de unidades. Portanto cabe ao usuário escolher as unidades dos dados de entrada em função das unidades que deseja receber nos arquivos de saída. Nos exemplos apresentados para arquivos de entrada, as coordenadas dos vértices estão em centímetros.

APÊNDICE C – FORMATO DO ARQUIVO DE SAÍDA

Neste apêndice, apresenta-se o formato dos arquivos de saída “.txt” gerado pelo programa desenvolvido nesse trabalho. Dessa forma, os resultados fornecidos aqui correspondem ao processamento dos arquivos de entrada apresentados no APÊNDICE B.

I. EXEMPLO 5.1

```

Propriedades geometricas
Area = 18.0000000000000
Momento estatico em x = 117.000000000000
Momento estatico em y = 108.000000000000
Momento de inercia em x = 1301.50000000000
Momento de inercia em y = 792.125000000000
Produto de inercia = 702.000000000000
Centroide em x = 6.00000000000000
Centroide em y = 6.50000000000000
Momento de inercia em xcg = 541.000000000000
Momento de inercia em ycg = 144.125000000000
Produto de inercia cg = 0.00000000000000E+000
Raio de Giracao em x = 8.50326734588273
Raio de Giracao em y = 6.63377301725379
Coeficiente a = 0.00000000000000E+000
Coeficiente b = -1.04076322636600
Coeficiente c = 2.77777777777778

```

Tensoes normais na flexao geral								
Aresta	Material	Vertice	x	y	Tensao_Normal	Tensao_Flexao	Tensao_Total	
1	1	1	0.00000000	0.00000000	2.77777778	6.24457936	9.02235714	
1	1	2	12.00000000	0.00000000	2.77777778	-6.24457936	-3.46680158	
2	1	2	12.00000000	0.00000000	2.77777778	-6.24457936	-3.46680158	
2	1	3	12.00000000	0.50000000	2.77777778	-6.24457936	-3.46680158	
3	1	3	12.00000000	0.50000000	2.77777778	-6.24457936	-3.46680158	
3	1	4	6.25000000	0.50000000	2.77777778	-0.26019081	2.51758697	
4	1	4	6.25000000	0.50000000	2.77777778	-0.26019081	2.51758697	
4	1	5	6.25000000	12.50000000	2.77777778	-0.26019081	2.51758697	
5	1	5	6.25000000	12.50000000	2.77777778	-0.26019081	2.51758697	
5	1	6	12.00000000	12.50000000	2.77777778	-6.24457936	-3.46680158	
6	1	6	12.00000000	12.50000000	2.77777778	-6.24457936	-3.46680158	
6	1	7	12.00000000	13.00000000	2.77777778	-6.24457936	-3.46680158	
7	1	7	12.00000000	13.00000000	2.77777778	-6.24457936	-3.46680158	
7	1	8	0.00000000	13.00000000	2.77777778	6.24457936	9.02235714	

8	1	8	0.00000000	13.00000000	2.77777778	6.24457936	9.02235714
8	1	9	0.00000000	12.50000000	2.77777778	6.24457936	9.02235714
9	1	9	0.00000000	12.50000000	2.77777778	6.24457936	9.02235714
9	1	10	5.75000000	12.50000000	2.77777778	0.26019081	3.03796858
10	1	10	5.75000000	12.50000000	2.77777778	0.26019081	3.03796858
10	1	11	5.75000000	0.50000000	2.77777778	0.26019081	3.03796858
11	1	11	5.75000000	0.50000000	2.77777778	0.26019081	3.03796858
11	1	12	0.00000000	0.50000000	2.77777778	6.24457936	9.02235714
12	1	12	0.00000000	0.50000000	2.77777778	6.24457936	9.02235714
12	1	1	0.00000000	0.00000000	2.77777778	6.24457936	9.02235714

II. EXEMPLO 5.2

Propriedades geométricas
 Propriedades geometricas
 Area = 300.000000000000
 Momento estatico em x = 5250.0000000000
 Momento estatico em y = 4500.0000000000
 Momento de inercia em x = 110000.0000000000
 Momento de inercia em y = 102500.0000000000
 Produto de inercia = 60000.0000000000
 Centroide em x = 15.000000000000
 Centroide em y = 17.500000000000
 Momento de inercia em xcg = 18125.0000000000
 Momento de inercia em ycg = 35000.0000000000
 Produto de inercia cg = -18750.0000000000
 Raio de Giracao em x = 19.1485421551268
 Raio de Giracao em y = 18.4842275106824
 Coeficiente a = -1.856353591160221E-002
 Coeficiente b = -9.944751381215469E-003
 Coeficiente c = 0.166666666666667

Tensoes normais na flexao geral

Aresta	Material	Vertice	x	y	Tensao_Normal	Tensao_Flexao	Tensao_Total
1	1	1	25.00000000	0.00000000	0.16666667	0.22541436	0.39208103
1	1	2	30.00000000	0.00000000	0.16666667	0.17569061	0.34235727
2	1	2	30.00000000	0.00000000	0.16666667	0.17569061	0.34235727
2	1	3	30.00000000	20.00000000	0.16666667	-0.19558011	-0.02891344
3	1	3	30.00000000	20.00000000	0.16666667	-0.19558011	-0.02891344
3	1	4	5.00000000	20.00000000	0.16666667	0.05303867	0.21970534
4	1	4	5.00000000	20.00000000	0.16666667	0.05303867	0.21970534
4	1	5	5.00000000	35.00000000	0.16666667	-0.22541436	-0.05874770

5	1	5	5.00000000	35.00000000	0.16666667	-0.22541436	-0.05874770
5	1	6	0.00000000	35.00000000	0.16666667	-0.17569061	-0.00902394
6	1	6	0.00000000	35.00000000	0.16666667	-0.17569061	-0.00902394
6	1	7	0.00000000	15.00000000	0.16666667	0.19558011	0.36224678
7	1	7	0.00000000	15.00000000	0.16666667	0.19558011	0.36224678
7	1	8	25.00000000	15.00000000	0.16666667	-0.05303867	0.11362799
8	1	8	25.00000000	15.00000000	0.16666667	-0.05303867	0.11362799
8	1	1	25.00000000	0.00000000	0.16666667	0.22541436	0.39208103

III. EXEMPLO 5.3

Propriedades geometricas

Area = 250.000000000000
Momento estatico em x = 4375.000000000000
Momento estatico em y = 3750.000000000000
Momento de inercia em x = 89583.3333333333
Momento de inercia em y = 67708.3333333333
Produto de inercia = 65625.000000000000
Centroide em x = 15.00000000000000
Centroide em y = 17.50000000000000
Momento de inercia em xcg = 13020.8333333333
Momento de inercia em ycg = 11458.3333333333
Produto de inercia cg = 0.00000000000000E+000
Raio de Giracao em x = 18.9296944860009
Raio de Giracao em y = 16.4570147151096
Coeficiente a = 9.98400000000014E-002
Coeficiente b = -6.545454545454547E-002
Coeficiente c = 0.2000000000000000

Tensoes normais na flexao geral

Aresta	Material	Vertice	x	y	Tensao_Normal	Tensao_Flexao	Tensao_Total
1	1	1	12.50000000	0.00000000	0.20000000	-1.58356364	-1.38356364
1	1	2	17.50000000	0.00000000	0.20000000	-1.91083636	-1.71083636
2	1	2	17.50000000	0.00000000	0.20000000	-1.91083636	-1.71083636
2	1	3	17.50000000	20.00000000	0.20000000	0.08596364	0.28596364
3	1	3	17.50000000	20.00000000	0.20000000	0.08596364	0.28596364
3	1	4	30.00000000	20.00000000	0.20000000	-0.73221818	-0.53221818
4	1	4	30.00000000	20.00000000	0.20000000	-0.73221818	-0.53221818
4	1	5	30.00000000	25.00000000	0.20000000	-0.23301818	-0.03301818
5	1	5	30.00000000	25.00000000	0.20000000	-0.23301818	-0.03301818
5	1	6	0.00000000	25.00000000	0.20000000	1.73061818	1.93061818

6	1	6	0.00000000	25.00000000	0.20000000	1.73061818	1.93061818
6	1	7	0.00000000	20.00000000	0.20000000	1.23141818	1.43141818
7	1	7	0.00000000	20.00000000	0.20000000	1.23141818	1.43141818
7	1	8	12.50000000	20.00000000	0.20000000	0.41323636	0.61323636
8	1	8	12.50000000	20.00000000	0.20000000	0.41323636	0.61323636
8	1	1	12.50000000	0.00000000	0.20000000	-1.58356364	-1.38356364

IV. EXEMPLO 6.1

Propriedades geometricas

Area = 43.50000000000000

Momento estatico em x = 158.250000000000

Momento estatico em y = 326.250000000000

Momento de inercia em x = 1511.500000000000

Momento de inercia em y = 3262.500000000000

Produto de inercia = 1186.875000000000

Centroide em x = 7.50000000000000

Centroide em y = 3.63793103448276

Momento de inercia em xcg = 935.797413793103

Momento de inercia em ycg = 815.625000000000

Produto de inercia cg = 2.273736754432321E-013

Raio de Giracao em x = 5.89466932378582

Raio de Giracao em y = 8.66025403784439

Coefficiente a = -0.213721471177541

Coefficiente b = 5.957963086316904E-017

Coefficiente c = 0.00000000000000E+000

Tensoes normais na flexao geral

Aresta	Material	Vertice	x	y	Tensao_Normal	Tensao_Flexao	Tensao_Total
1	1	1	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.77750397	0.77750397
1	1	2	15.00000000	0.00000000	0.00000000	0.77750397	0.77750397
2	1	2	15.00000000	0.00000000	0.00000000	0.77750397	0.77750397
2	1	3	15.00000000	2.00000000	0.00000000	0.35006103	0.35006103
3	1	3	15.00000000	2.00000000	0.00000000	0.35006103	0.35006103
3	1	6	0.00000000	2.00000000	0.00000000	0.35006103	0.35006103
4	1	6	0.00000000	2.00000000	0.00000000	0.35006103	0.35006103
4	1	1	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.77750397	0.77750397
5	2	3	15.00000000	2.00000000	0.00000000	0.02100366	0.02100366
5	2	4	15.00000000	17.00000000	0.00000000	-0.17134566	-0.17134566
6	2	4	15.00000000	17.00000000	0.00000000	-0.17134566	-0.17134566
6	2	5	0.00000000	17.00000000	0.00000000	-0.17134566	-0.17134566
7	2	5	0.00000000	17.00000000	0.00000000	-0.17134566	-0.17134566
7	2	6	0.00000000	2.00000000	0.00000000	0.02100366	0.02100366

8	2	6	0.00000000	2.00000000	0.00000000	0.02100366	0.02100366
8	2	3	15.00000000	2.00000000	0.00000000	0.02100366	0.02100366

V. EXEMPLO 6.2

Propriedades geometricas

Area = 113.000000000000

Momento estatico em x = 1921.000000000000

Momento estatico em y = 1130.000000000000

Momento de inercia em x = 55638.6666666667

Momento de inercia em y = 15066.6666666667

Produto de inercia = 19210.0000000000

Centroide em x = 10.000000000000

Centroide em y = 17.000000000000

Momento de inercia em xcg = 22981.6666666667

Momento de inercia em ycg = 3766.6666666666

Produto de inercia cg = 0.000000000000E+000

Raio de Giracao em x = 22.1895827162420

Raio de Giracao em y = 11.5470053837925

Coefficiente a = -2.175647255058378E-002

Coefficiente b = 0.000000000000E+000

Coefficiente c = 0.000000000000E+000

Tensoes normais na flexao geral

Aresta	Material	Vertice	x	y	Tensao_Normal	Tensao_Flexao	Tensao_Total
1	1	1	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.36986003	0.36986003
1	1	2	20.00000000	0.00000000	0.00000000	0.36986003	0.36986003
2	1	2	20.00000000	0.00000000	0.00000000	0.36986003	0.36986003
2	1	3	20.00000000	2.00000000	0.00000000	0.32634709	0.32634709
3	1	3	20.00000000	2.00000000	0.00000000	0.32634709	0.32634709
3	1	8	0.00000000	2.00000000	0.00000000	0.32634709	0.32634709
4	1	8	0.00000000	2.00000000	0.00000000	0.32634709	0.32634709
4	1	1	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.36986003	0.36986003
5	2	8	0.00000000	2.00000000	0.00000000	0.01794909	0.01794909
5	2	3	20.00000000	2.00000000	0.00000000	0.01794909	0.01794909
6	2	3	20.00000000	2.00000000	0.00000000	0.01794909	0.01794909
6	2	4	20.00000000	32.00000000	0.00000000	-0.01794909	-0.01794909
7	2	4	20.00000000	32.00000000	0.00000000	-0.01794909	-0.01794909
7	2	7	0.00000000	32.00000000	0.00000000	-0.01794909	-0.01794909
8	2	7	0.00000000	32.00000000	0.00000000	-0.01794909	-0.01794909
8	2	8	0.00000000	2.00000000	0.00000000	0.01794909	0.01794909
9	1	7	0.00000000	32.00000000	0.00000000	-0.32634709	-0.32634709
9	1	4	20.00000000	32.00000000	0.00000000	-0.32634709	-0.32634709
10	1	4	20.00000000	32.00000000	0.00000000	-0.32634709	-0.32634709
10	1	5	20.00000000	34.00000000	0.00000000	-0.36986003	-0.36986003
11	1	5	20.00000000	34.00000000	0.00000000	-0.36986003	-0.36986003
11	1	6	0.00000000	34.00000000	0.00000000	-0.36986003	-0.36986003

12	1	6	0.00000000	34.00000000	0.00000000	-0.36986003	-0.36986003
12	1	7	0.00000000	32.00000000	0.00000000	-0.32634709	-0.32634709

12	1	6	0.00000000	34.00000000	0.00000000	-0.36986003	-0.36986003
12	1	7	0.00000000	32.00000000	0.00000000	-0.32634709	-0.32634709

VI. EXEMPLO 6.3

Propriedades geometricas

Area = 3.14146346236414

Momento estatico em x = 1.860361912624986E-016

Momento estatico em y = 1.301042606982605E-016

Momento de inercia em x = 0.785333569378425

Momento de inercia em y = 0.785333569378424

Produto de inercia = -2.447586404386026E-017

Centroide em x = 4.141517552470575E-017

Centroide em y = 5.921959414498343E-017

Momento de inercia em xcg = 0.785333569378425

Momento de inercia em ycg = 0.785333569378424

Produto de inercia cg = -2.447586404386027E-017

Raio de Giracao em x = 0.499989719267778

Raio de Giracao em y = 0.499989719267778

Coefficiente a = -38.2003280768252

Coefficiente b = -1.190559111307638E-015

Coefficiente c = 0.000000000000000E+000

100	1	100	0.01570732	0.99987663	0.00000000	-38.19561540	-38.19561540
100	1	101	-0.00000000	1.00000000	0.00000000	-38.20032808	-38.20032808

APÊNDICE D – CÓDIGO COMPUTACIONAL

Neste apêndice, apresenta-se o formato de parte do código do programa computacional descrito no Capítulo 4.

I. LEITURA DOS DADOS DE ENTRADA

```
! !Leitura do arquivo de entrada
open(unit=1,file="ENTRADA.txt")
read(1,*) !Número de vértices
read(1,*) nvert
read(1,*) !Coordenadas do vértice
allocate(coord(nvert,2))
do i=1, nvert
    read(1,*) j, coord(j,1), coord(j,2)
    write(*,*) j, coord(j,1), coord(j,2)
end do
read(1,*) !Número de arestas
read(1,*) narest
read(1,*) !Conectividade
allocate(conec(narest,2))
do i=1, narest
    read(1,*) j, conec(j,1), conec(j,2)
    write(*,*) j, conec(j,1), conec(j,2)
end do
read(1,*) !Número de materiais
read(1,*) nmat
read(1,*) !Módulo de elasticidade
read(1,*) Eref
read(1,*) !Materiais
allocate(mat(nmat))
do i=1, nmat
    read(1,*) j, mat(j)
```

```

    write(*,*) j, mat(j)
end do

read(1,*) !Associação dos materiais à aresta
allocate(assmat(narest))

do i=1, narest
    read(1,*) j, assmat(j)
    write(*,*) j, assmat(j)
end do

read(1,*) !Número de arcos
read(1,*) narc
read(1,*) !Arcos
allocate(arcos(narc))
nvert_arc=0
narest_arc=0

do i=1, narc
    read(1,*) j, arcos(j)%centro, arcos(j)%raio, arcos(j)%quadrante, arcos(j)%narest, arcos(j)%indmat,
    arcos(j)%sentido

    write(*,*) j, arcos(j)%centro, arcos(j)%raio, arcos(j)%quadrante, arcos(j)%narest, arcos(j)%indmat,
    arcos(j)%sentido

    nvert_arc=nvert_arc+arcos(j)%narest+1
    narest_arc=narest_arc+arcos(j)%narest
end do

read(1,*) !Esforço solicitantes
read(1,*) N, Mx, My
allocate(tensao_normal(2*(narest_arc+narest)))
allocate(tensao_flexao(2*(narest_arc+narest)))
allocate(tensao_total(2*(narest_arc+narest)))

```

II. CÁLCULO DAS PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS

```

!Cálculos das propriedades geométricas
area=0.0d0
Ix=0.0d0
Iy=0.0d0

```

```

Ixy=0.0d0

Qx=0.0d0

Qy=0.0d0

do i=1, narest
  alfa=mat(assmat(i))/Eref

  x1 = coord(conec(i,1),1)
  x2 = coord(conec(i,2),1)
  y1 = coord(conec(i,1),2)
  y2 = coord(conec(i,2),2)

  area = area+0.5alfa(x2+x1)(y2-y1)

  Ix = Ix+alfa(1.0d0/12.0d0)(y1y1+y2y2)(x1-x2)(y2+y1)
  Iy = Iy+alfa(1.0d0/12.0d0)(x2x2+x1x1)(x2+x1)(y2-y1)

  Ixy = Ixy+alfa(1.0d0/24.0d0)((3.0d0x1x1+2.0d0x1x2+x2x2)(y1y2-y1y1)+(x1x1+2.0d0x1x2+3.0d0x2x2)(y2y2-y1y2))

  Qx = Qx+alfa(1.0d0/6.0d0)(y1y1+y1y2+y2y2)(x1-x2)
  Qy = Qy+alfa(1.0d0/6.0d0)(x1x1+x1x2+x2x2)*(y2-y1)

  end do

do i=1, narest_arc
  alfa=mat(assmat_arc(i))/Eref

  x1 = coord_arc(conec_arc(i,1),1)
  x2 = coord_arc(conec_arc(i,2),1)
  y1 = coord_arc(conec_arc(i,1),2)
  y2 = coord_arc(conec_arc(i,2),2)

  area = area+0.5alfa(x2+x1)(y2-y1)

  Ix = Ix+alfa(1.0d0/12.0d0)(y1y1+y2y2)(x1-x2)(y2+y1)
  Iy = Iy+alfa(1.0d0/12.0d0)(x2x2+x1x1)(x2+x1)(y2-y1)

  Ixy = Ixy+alfa(1.0d0/24.0d0)((3.0d0x1x1+2.0d0x1x2+x2x2)(y1y2-y1y1)+(x1x1+2.0d0x1x2+3.0d0x2x2)(y2y2-y1y2))

  Qx = Qx+alfa(1.0d0/6.0d0)(y1y1+y1y2+y2y2)(x1-x2)
  Qy = Qy+alfa(1.0d0/6.0d0)(x1x1+x1x2+x2x2)*(y2-y1)

  end do

x=Qy/area

y=Qx/area

Ixcg = Ix - areayy

```

```
Iycg = Iy - areaxx
```

```
Ixycg = Ixy - areaxy
```

```
kx=SQRT(Ix/area)
```

```
ky=SQRT(Iy/area)
```

III. CÁLCULO DAS TENSÕES

```
!Tensão normal (mesma para todos os pontos)
```

```
do i = 1, narest
```

```
  alfa=mat(assmat(i))/Eref
```

```
  xv1 = coord(conec(i,1),1)-x
```

```
  xv2 = coord(conec(i,2),1)-x
```

```
  yv1 = coord(conec(i,1),2)-y
```

```
  yv2 = coord(conec(i,2),2)-y
```

```
  ! Tensão normal axial
```

```
  tensao_normal(2*i-1) = alfa*(N/area)
```

```
  tensao_normal(2*i) = alfa*(N/area)
```

```
  !Tensão devido à flexão geral
```

```
  tensao_flexao(2*i-1) =alfa*(((Mx*Iycg+My*Ixycg)*(yv1)) - ((My*Ixcg+Mx*Ixycg)*(xv1)))/(Ixcg*Iycg-Ixycg*Ixycg)
```

```
  tensao_flexao(2*i) =alfa*(((Mx*Iycg+My*Ixycg)*(yv2)) - ((My*Ixcg+Mx*Ixycg)*(xv2)))/(Ixcg*Iycg-Ixycg*Ixycg)
```

```
end do
```

```
do i = 1, narest_arc
```

```
  alfa=mat(assmat_arc(i))/Eref
```

```
  xv1 = coord_arc(conec_arc(i,1),1)-x
```

```
  xv2 = coord_arc(conec_arc(i,2),1)-x
```

```
  yv1 = coord_arc(conec_arc(i,1),2)-y
```

```
  yv2 = coord_arc(conec_arc(i,2),2)-y
```

```
  ! Tensão normal axial
```

```
  tensao_normal(2*narest+2*i-1) = alfa*(N/area)
```

```
  tensao_normal(2*narest+2*i) = alfa*(N/area)
```

```
  !Tensão devido à flexão geral
```

```
    tensao_flexao(2*narest+2*i-1)      =      alfa*(((Mx*Iycg+My*Ixycg)*(yv1))      -
((My*Ixcg+Mx*Ixycg)*(xv1)))/(Ixcg*Iycg-Ixycg*Ixycg)

    tensao_flexao(2*narest+2*i)      =      alfa*(((Mx*Iycg+My*Ixycg)*(yv2))      -
((My*Ixcg+Mx*Ixycg)*(xv2)))/(Ixcg*Iycg-Ixycg*Ixycg)

end do

tensao_total = tensao_normal + tensao_flexao

a = ((Mx*Iycg+My*Ixycg)/(Ixcg*Iycg-Ixycg*Ixycg))
b = - ((My*Ixcg+Mx*Ixycg)/(Ixcg*Iycg-Ixycg*Ixycg))
c = N/area
```