

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
FACULDADE DE TECNOLOGIA
CURSO DE ENGENHARIA CIVIL

JESSICA SOUZA SOPRANO

DESENVOLVIMENTO DE UMA FERRAMENTA COMPUTACIONAL
PARA ANÁLISE DE ESTABILIDADE DE PÓRTICOS TRIDIMENSIONAIS

MANAUS

2025

JESSICA SOUZA SOPRANO

DESENVOLVIMENTO DE UMA FERRAMENTA COMPUTACIONAL
PARA ANÁLISE DE ESTABILIDADE DE PÓRTICOS TRIDIMENSIONAIS

Monografia apresentada à disciplina FTC068 –
Projeto Final de Engenharia Civil II como parte
dos requisitos necessários para a obtenção do título
de bacharel em engenharia civil.

Orientador: Prof. Dr. Henrique Barbosa Soares

MANAUS

2025

Ficha Catalográfica

Elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

S712d

Soprano, Jessica Souza

Desenvolvimento de uma ferramenta computacional para análise de estabilidade de pórticos tridimensionais / Jessica Souza Soprano. - 2025.
72 f. : il., color. ; 31 cm.

Orientador(a): Henrique Barbosa Soares.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) - Universidade Federal do Amazonas, Faculdade de Tecnologia, Curso de Engenharia Civil, Manaus (AM), 2025.

1. Análise linear de estabilidade. 2. Ferramenta computacional. 3. Método dos Elementos Finitos. 4. Pórtico tridimensional. I. Soares, Henrique Barbosa. II. Universidade Federal do Amazonas. Faculdade de Tecnologia. Curso de Engenharia Civil. III. Título

RESUMO

SOPRANO, J. S. **Desenvolvimento de uma ferramenta computacional para análise de estabilidade de pórticos tridimensionais.** 2025. Trabalho de Conclusão de Curso - Faculdade de Tecnologia, Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2025.

Com os avanços na tecnologia dos materiais e dos processos construtivos, os engenheiros são agora capazes de projetar obras de grandes dimensões que ocupam menos espaço, são mais leves e consomem menos materiais. Contudo, essas estruturas se tornam esbeltas e mais suscetíveis a problemas de estabilidade estrutural. Por esse motivo, os programas computacionais comumente usados na engenharia civil precisam ser atualizados para fornecer dados numéricos alinhados com a realidade dos projetos. Este trabalho tem como objetivo elaborar um programa computacional que permita realizar a análise linear de estabilidade de estruturas modeladas com elementos de pórtico, com aplicações em projetos de edificações. O programa foi implementado em linguagem Fortran, utilizando o Método dos Elementos Finitos em sua formulação baseada no Método Energético. A ferramenta é capaz de calcular deslocamentos, fator de cargas críticas e modos de instabilidade em pórticos tridimensionais. Para a validação, foram realizados alguns exemplos, cujos resultados foram comparados com os obtidos pelo *software* de análise estrutural MASTAN2. Analisou-se estruturas cuja complexidade dificulta a resolução com cálculos manuais, com o objetivo de avaliar o desempenho e a aplicabilidade prática do programa desenvolvido.

Palavras-chaves: *análise linear de estabilidade; ferramenta computacional; Método dos Elementos Finitos; pórtico tridimensional.*

ABSTRACT

SOPRANO, J. S. **Development of a computational tool for stability analysis of three-dimensional frames.** 2025. Graduation work - College of Engineering, Federal University of Amazonas, Manaus, 2025.

With advancements in materials technology and construction processes, engineers are now able to design large-scale structures that occupy less space, are lighter, and consume fewer materials. However, these structures become slender and more susceptible to structural stability problems. For this reason, the computer programs commonly used in civil engineering need to be updated to provide numerical data aligned with the reality of the projects. This work aims to develop a computer program that allows for the linear stability analysis of structures modeled with frame elements, with applications in building design. The program was implemented in Fortran, using the Finite Element Method in its formulation based on the Energy Method. The tool is capable of calculating displacements, critical loads, and instability modes in three-dimensional frames. For validation, some examples were performed, and the results were compared with those obtained by the MASTAN2 structural analysis software. Structures whose complexity makes resolution difficult with manual calculations were analyzed, with the aim of evaluating the performance and practical applicability of the developed program.

Keywords: *linear stability analysis; computational tool; Finite Element Method; three-dimensional portico*

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Aplicação dos materiais e seções nos elementos do Exemplo 1	50
Tabela 2– Deslocamentos nodais fornecidos pelo programa desenvolvido para o Exemplo 1	51
Tabela 3 – Deslocamentos nodais fornecidos pelo MASTAN2 para o Exemplo 1	51
Tabela 4 – Comparação dos fatores de carga crítica do Exemplo 1	52
Tabela 5 – Deslocamentos nodais fornecidos pelo programa desenvolvido para o Exemplo 2	55
Tabela 6 – Deslocamentos nodais fornecidos pelo MASTAN2 do Exemplo 2	55
Tabela 7 – Comparação dos fatores de carga crítica do Exemplo 2.....	56
Tabela 8 - Aplicação dos materiais e seções nos elementos do Exemplo 02	59
Tabela 9 – Deslocamentos nodais fornecidos pelo programa desenvolvido para o Exemplo 3	59
Tabela 10 – Deslocamentos nodais fornecidos pelo MASTAN2 do Exemplo 3	60
Tabela 11 – Comparação dos fatores de carga crítica do Exemplo 3.....	60
Tabela 12 – Deslocamentos nodais fornecidos pelo programa desenvolvido para o Exemplo 4	64
Tabela 13 – Deslocamentos nodais fornecidos pelo MASTAN2 do Exemplo 4	65
Tabela 14 – Comparação dos fatores de carga crítica do Exemplo 4.....	65

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Fases de um projeto estrutural.....	16
Figura 2 – Estrutura real e o modelo simplificado	17
Figura 3 – Graus de liberdade de rotação e deslocamento de um elemento de pórtico.....	22
Figura 4 – Mudança de configuração do elemento de barra.....	24
Figura 5 – Vetores unitários nas direções locais e globais	34
Figura 6 – Orientação da barra m no plano xy'	35
Figura 7 – Orientação real da barra m	35
Figura 8 – Orientação vertical com o eixo paralelo z' ao eixo Z	38
Figura 9 – Orientação vertical da barra	39
Figura 10 – Distribuição das contribuições das matrizes de rigidez locais na formação da matriz de rigidez global no exemplo com três barras	42
Figura 11 – Montagem da matriz de rigidez global para um pórtico	43
Figura 12 – Configuração do arquivo de entrada em .txt	46
Figura 13 – Funcionamento do programa computacional	47
Figura 14 – Pórtico para o Exemplo 1 de validação.....	51
Figura 15 – Modo de instabilidade no programa MASTAN2 associado ao menor fator carga crítica do Exemplo 1.....	53
Figura 16 – Modo de instabilidade do software Paraview associado ao menor fator carga crítica do Exemplo 1.....	53
Figura 17 – Pórtico para o Exemplo 2 de validação.....	54
Figura 18 – Modo de instabilidade no programa MASTAN2 associado ao menor fator carga crítica do Exemplo 2.....	57
Figura 19 – Modo de instabilidade do software Paraview associado ao menor fator carga crítica do Exemplo 2.....	57

Figura 20 – Pórtico para o Exemplo 3 de validação.....	58
Figura 21 – Modo de instabilidade no programa MASTAN2 associado ao menor fator carga crítica do Exemplo 3.....	61
Figura 22 – Modo de instabilidade do software Paraview associado ao menor fator carga crítica do Exemplo 3.....	62
Figura 23 – Pórtico para o Exemplo 4 de validação.....	63
Figura 24 – Modo de instabilidade no programa MASTAN2 associado ao menor fator carga crítica do Exemplo 4.....	66
Figura 25 – Modo de instabilidade do software Paraview associado ao menor fator carga crítica do Exemplo 4.....	67

SUMÁRIO

1.	INTRODUÇÃO	11
1.1.	CONSIDERAÇÕES GERAIS	11
1.2.	OBJETIVOS	12
1.2.1.	OBJETIVO GERAL	12
1.2.2.	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	12
1.3.	JUSTIFICATIVA	12
1.4.	METODOLOGIA	13
2.	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	15
2.1.	ANÁLISE ESTRUTURAL	15
2.2.	ANÁLISE DE ESTABILIDADE	18
3.	CRITÉRIO ENERGÉTICO DE ESTABILIDADE	20
3.1.	PRINCÍPIO DA MÍNIMA ENERGIA POTENCIAL TOTAL E O TEOREMA DE LAGRANGE-DIRICHLET	21
3.2.	ENERGIA INTERNA DE DEFORMAÇÃO.	22
3.3.	TÉCNICA DOS ELEMENTOS FINITOS – INTERPOLAÇÃO DOS PARAMETROS NODAIS.....	27
3.4.	MATRIZ DE RIGIDEZ ELÁSTICA LOCAL	28
3.5.	MATRIZ DE RIGIDEZ GEOMÉTRICA LOCAL	30
3.6.	MATRIZ DE ROTAÇÃO TRIDIMENSIONAL	33
3.6.1.	MATRIZ DE ROTAÇÃO PARA ELEMENTOS NA VERTICAL	38
3.7.	MATRIZ DA RIGIDEZ GLOBAL	40
3.8.	AUTOVETOR E AUTOVALOR.....	44
4.	PROGRAMA COMPUTACIONAL.....	46
4.1.	CONSIDERAÇÕES GERAIS	46
4.2.	LÓGICA DO FUNCIONAMENTO DO PROGRAMA	47
4.3.	SOFTWARE MASTAN2 USADO PARA A VALIDAÇÃO DOS RESULTADOS DO PROGRAMA DESENVOLVIDO.	48
5.	EXEMPLO DE VALIDAÇÃO.....	50
5.1.	EXEMPLO 1.....	50

5.2.	EXEMPLO 2.....	54
5.3.	EXEMPLO 3.....	58
5.4.	EXEMPLO 4.....	62
6.	CONCLUSÃO.....	68
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	69
	APÊNDICE A – ARQUIVO DE ENTRADA.....	71

1. INTRODUÇÃO

1.1. CONSIDERAÇÕES GERAIS

A estabilidade estrutural é um conceito fundamental na engenharia civil, especialmente no que se refere à análise e ao dimensionamento de estruturas esbeltas e com múltiplos graus de liberdade, como os pórticos tridimensionais. Conforme descreve Hibbeler (2013), uma estrutura é considerada estável quando é capaz de suportar as cargas aplicadas sem apresentar flambagem ou deslocamentos excessivos, garantindo assim a segurança e a integridade do sistema estrutural. Dessa forma, a análise de estabilidade assume papel fundamental nos projetos estruturais, uma vez que assegura o comportamento adequado da estrutura ao longo de sua vida útil.

Dentre os elementos estruturais amplamente utilizados em obras civis, destacam-se os pórticos, que são compostos por um conjunto de barras interligadas por conexões rígidas, semirrígidas ou flexíveis. Em análises computacionais, os pórticos bidimensionais costumam apresentar limitações, pois não são analisados os efeitos de torção, por exemplo. Já os modelos tridimensionais oferecem maior compatibilidade com a realidade, permitindo a análise simultânea de flambagem, deslocamentos e torção (Kummer, 2014). Com os avanços tecnológicos e o desenvolvimento de materiais mais leves e resistentes, tornou-se cada vez mais necessário realizar análises mais precisas, sendo a modelagem tridimensional uma abordagem vantajosa.

A utilização de ferramentas computacionais na engenharia civil vem se consolidando como uma importante aliada na otimização de tempo e na obtenção de resultados mais confiáveis. Apesar de os computadores realizarem cálculos extensos de forma eficiente, é essencial que o engenheiro compreenda os métodos utilizados para interpretar os resultados de maneira crítica (Santos, 2024). Nesse sentido, o conhecimento dos métodos usados na análise de estabilidade, como o Método das Forças, o Método dos Deslocamentos e o Método Energético, torna-se um diferencial técnico relevante.

Assim, diante da complexidade crescente das estruturas modernas e da demanda por análises cada vez mais precisas, torna-se evidente a importância da integração entre conhecimento teórico, domínio dos métodos numéricos e o uso de ferramentas computacionais. A compreensão dos fundamentos estruturais e sua aplicação prática, por meio de ferramentas

computacionais, representa uma contribuição relevante para o aprimoramento da segurança, eficiência e confiabilidade em projetos estruturais.

Este trabalho concentra-se no desenvolvimento de uma ferramenta computacional baseada no Método dos Elementos Finitos e no Método Energético. Essa abordagem permite a automatização do processo de verificação da estabilidade estrutural, por meio do cálculo dos modos de instabilidade e dos fatores de cargas críticas de forma precisa e eficiente.

1.2. OBJETIVOS

1.2.1. OBJETIVO GERAL

Desenvolver um programa computacional para análise linear de estabilidade em estruturas modeladas com elementos de pórtico tridimensional.

1.2.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- 1) Estudar formulações e metodologias referentes a elementos de pórtico tridimensional e análise linear de estabilidade que constam nas bibliografias clássicas referentes a esses tópicos;
- 2) Desenvolver e implementar algoritmo para a geração de um programa computacional de cálculo de elementos de pórtico tridimensional;
- 3) Desenvolver e implementar algoritmo para cálculo dos fatores de cargas críticas e modos de instabilidade com base na teoria da análise linear de estabilidade;
- 4) Avaliar exemplos numéricos de validação e de aplicação da formulação proposta.

1.3. JUSTIFICATIVA

As ferramentas computacionais estão atualmente integradas de forma intensiva aos cálculos automatizados em projetos estruturais. Paralelamente, as técnicas construtivas têm incorporado novas tecnologias, tanto em materiais quanto em métodos executivos, tornando comum o projeto de estruturas robustas, com grandes dimensões, utilizando materiais leves e com melhor aproveitamento do espaço. Nesse contexto, é fundamental que as ferramentas computacionais acompanhem essa evolução, oferecendo maior precisão nos cálculos estruturais, como é o foco deste trabalho, voltado à análise de pórticos tridimensionais. Por esse

motivo, estudos utilizando bases teóricas já bem consolidadas devem ser conciliados com algoritmos, para evitar exaustivos cálculos de forma manual, com maior possibilidade de erros.

Diante disso, o desenvolvimento de uma ferramenta computacional própria torna-se justificável, tanto pelo aspecto acadêmico quanto prático. No âmbito acadêmico, tal ferramenta permite a aplicação direta dos conhecimentos teóricos adquiridos durante a formação, especialmente do Método Energético. Já no campo prático, a criação de um programa capaz de realizar a análise linear de estabilidade de pórticos tridimensionais oferece uma alternativa acessível e adaptável, que pode ser empregada tanto em estudos quanto em projetos reais.

Além disso, ao comparar os resultados obtidos com os de *softwares* consolidados no mercado, busca-se validar a precisão e a confiabilidade do algoritmo implementado, contribuindo para a formação de profissionais capazes de desenvolver soluções próprias e inovadoras na área de engenharia estrutural.

Outros trabalhos foram desenvolvidos com o intuito de criar ferramentas computacionais voltadas à análise de estabilidade de pórticos tridimensionais como o de Santos (2024) e Soares (2017). Esses estudos reforçam a relevância do tema para aplicações acadêmicas e computacionais.

1.4. METODOLOGIA

Inicialmente, foi realizado um levantamento bibliográfico a fim de reunir trabalhos relacionados à análise matricial de estruturas e à estabilidade estrutural. No que se refere à análise matricial, foi estudada a formulação dos elementos de pórtico voltada para a implementação computacional em algoritmo Fortran. Quanto à estabilidade estrutural, foram analisadas formulações derivadas de Métodos de Energia, que fundamentam a teoria da análise linear de estabilidade. As buscas foram realizadas no Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Amazonas (SISTEBIB/UFAM), com consulta ao acervo da Biblioteca Setorial de Ciências Exatas e Engenharias, além de um banco de teses e dissertações e das bases de dados do Portal de Periódicos da CAPES.

A partir desse embasamento teórico, iniciou-se o desenvolvimento de um algoritmo voltado ao cálculo automatizado de estruturas de pórtico tridimensional, permitindo a realização da análise linear de estabilidade. As implementações foram realizadas na linguagem Fortran, utilizando o ambiente de desenvolvimento Visual Studio em conjunto com o compilador Intel Fortran Compiler (versão gratuita disponibilizada pela Intel) e a biblioteca matemática Intel OneAPI MKL, compatível com o sistema operacional Windows.

A estrutura do código foi organizada em uma rotina principal, módulos e sub-rotinas. A rotina principal é responsável por acionar os módulos na ordem correta dos cálculos. Foram utilizados quatro módulos: declaração de variáveis, entrada de dados, cálculos e saída dos resultados. Neles estão incluídas sub-rotinas que realizam: leitura dos dados de entrada, cálculo da matriz de rigidez elástica local, matriz de rotação, matriz de rigidez elástica global, determinação dos deslocamentos, exportação de resultados para visualização no software ParaView, cálculo da matriz de rigidez geométrica local, nova matriz de rotação, matriz de rigidez geométrica global e, por fim, obtenção dos autovalores e autovetores correspondentes aos fatores de cargas críticas e modos de instabilidade. Dessa forma, o programa realiza automaticamente os cálculos necessários para a análise linear de estabilidade.

Para a validação da ferramenta computacional, foram desenvolvidos exemplos contemplando diferentes situações de análise de estabilidade em pórticos tridimensionais. O programa MASTAN2 foi utilizado como referência devido à sua ampla aceitação na literatura, sendo empregado em estudos como os de Balz (2019) e Michelini (2021) para validar programas semelhantes. Essa escolha permite assegurar a confiabilidade do algoritmo implementado, especialmente na determinação dos fatores de carga crítica e na identificação dos modos de instabilidade.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

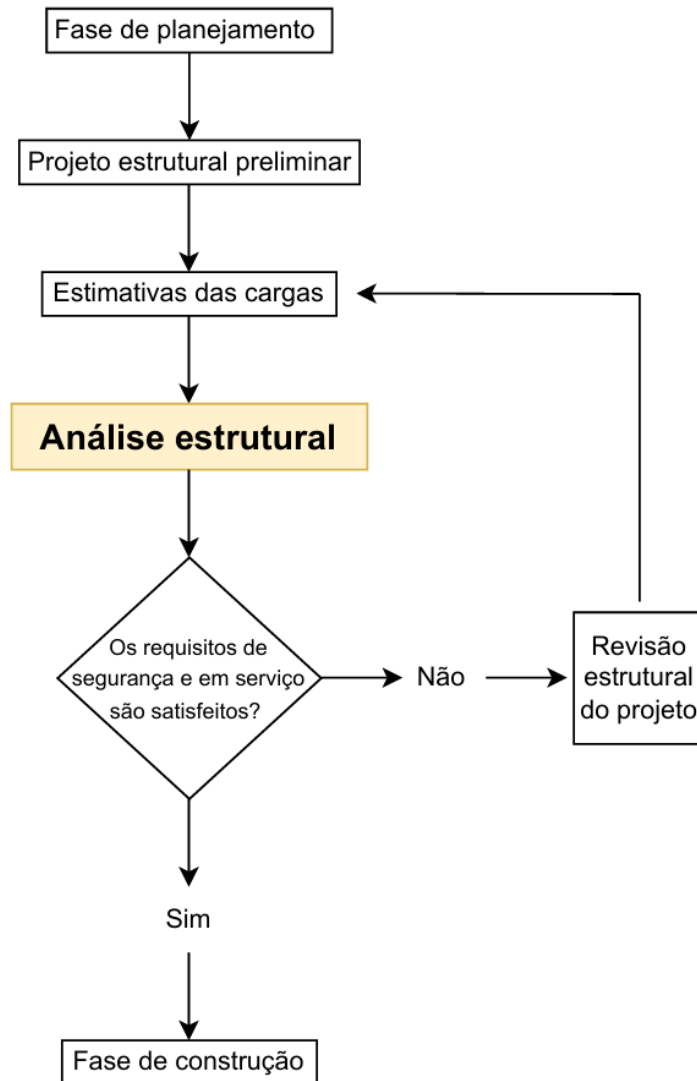
Neste capítulo será apresentada a base teórica que fundamenta os métodos empregados neste trabalho. Inicialmente, será abordada a análise estrutural, com ênfase nos conceitos essenciais como o Método Energético na análise linear de estabilidade, o qual se fundamenta no Princípio da Energia Potencial Total Mínima para determinar a condição de instabilidade em estruturas. Em complemento, será realizada uma revisão dos estudos já desenvolvidos na área de estabilidade estrutural, destacando as principais contribuições e avanços alcançados até o presente momento.

2.1. ANÁLISE ESTRUTURAL

A análise estrutural é um processo essencial no desenvolvimento de projetos de engenharia, pois visa prever o comportamento de uma estrutura diante de diferentes condições, como arranjo dos elementos, tipos de materiais, cargas aplicadas e geometria das peças, garantindo sua resistência, estabilidade e funcionalidade. Esse processo permite identificar pontos críticos, otimizar o uso de materiais e dimensionar corretamente os elementos, visando garantir a segurança e a durabilidade da construção. Além disso, a análise estrutural contribui para a eficiência econômica do projeto, evitando desperdícios e custos excessivos, ao mesmo tempo em que assegura que a estrutura será capaz de suportar as forças externas ao longo de sua vida útil, sem comprometer sua integridade (Hibbeler, 2013). Dessa forma garantindo a estabilidade tanto local (um elemento específico) quanto global (na estrutura como um todo).

No projeto estrutural de uma edificação, a análise estrutural é uma das etapas cruciais, pois permite verificar a relação entre as cargas aplicadas e a resistência das estruturas. As fases do projeto são organizadas de acordo com o fluxograma da Figura 1, no qual a análise estrutural é uma das últimas etapas, realizada após a estimativa das cargas e o desenvolvimento do projeto preliminar. Essa etapa é fundamental para garantir que a estrutura seja dimensionada de forma adequada, assegurando sua segurança, funcionalidade e eficiência ao longo de sua vida útil (Kassimali, 2016).

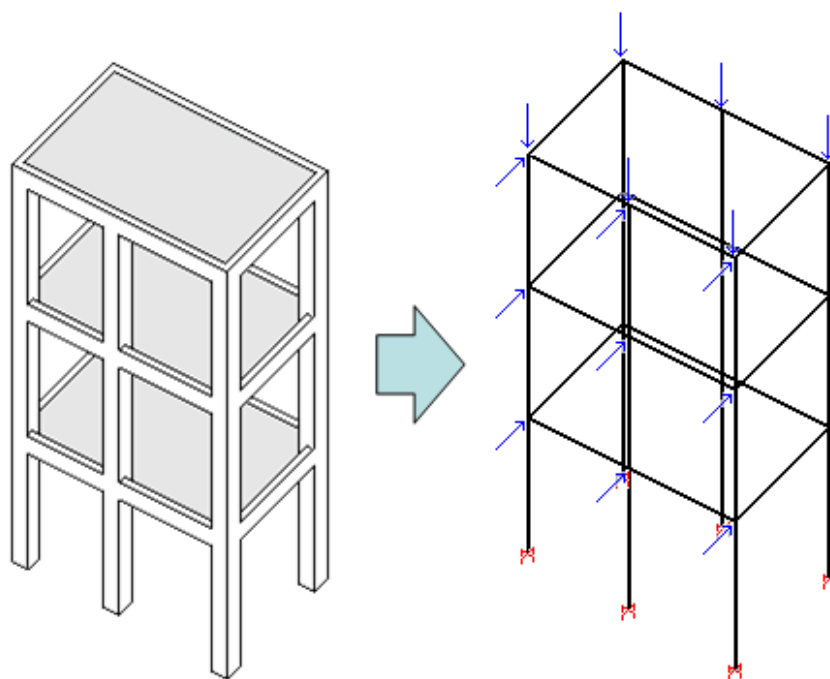
Figura 1 – Fases de um projeto estrutural



Fonte: Adaptado de Kassimali (2016)

Uma das etapas cruciais dentro da análise estrutural é a concepção do modelo estrutural, no qual o projetista traduz a estrutura real de forma simplificada ou idealizada, a fim de facilitar a análise estrutural. Esse modelo serve como uma representação matemática e gráfica da estrutura, permitindo que o comportamento dos elementos seja estudado de maneira mais prática e eficiente. No modelo estrutural, os elementos da edificação, como vigas, pilares e lajes, são representados por linhas ou retas, enquanto os apoios são representados por símbolos específicos que indicam o gênero (Martha, 2010). As cargas, por sua vez, são aplicadas sobre os elementos de acordo com as especificações do projeto. A Figura 2 ilustra a estrutura real e o modelo estrutural simplificado desenvolvido para a análise, evidenciando a correspondência entre os elementos reais e as suas representações em linhas no modelo.

Figura 2 – Estrutura real e o modelo simplificado



Fonte: TQS (2025)

Após a fase preliminar do projeto, é realizada a análise estrutural, onde se aplicam os métodos de análise para determinar o comportamento da estrutura diante das ações aplicadas. Nos casos de estruturas reticuladas, os métodos clássicos utilizados são o Método dos Deslocamentos e o Método das Forças. A principal diferença entre o Método dos Deslocamentos e o Método das Forças reside na abordagem adotada para o cálculo: no Método das Forças, a estrutura hiperestática é transformada em uma isostática equivalente, enquanto no Método dos Deslocamentos, os deslocamentos da estrutura são as variáveis principais, e todas as movimentações são inicialmente restringidas para garantir a compatibilidade (Soriano; Lima, 2006).

O Método das forças é utilizado para resolver estruturas hiperestáticas, onde há mais incógnitas do que o número de equações de equilíbrio disponíveis. Nesse método, o ponto de partida é o cálculo das forças internas (como momentos e forças de reação). Para resolver essas incógnitas, o método recorre à transformação da estrutura hiperestática em uma isostática equivalente e resolvendo a estrutura resultante, que pode ser tratada com as equações de equilíbrio estático. Após resolver a estrutura isostática, os apoios hiperestáticos são restaurados utilizando as equações de compatibilidade, que garantem que os deslocamentos da estrutura original sejam compatíveis com as forças internas calculadas (Soriano; Lima, 2006).

Por outro lado, o Método dos Deslocamentos foca no cálculo dos deslocamentos da estrutura como as incógnitas principais. Nesse método, ao invés de começar pelas forças internas, deve-se determinar como a estrutura se deforma sob a aplicação de cargas. Durante o processo, todos os deslocamentos nos nós da estrutura são inicialmente restritos, e as equações de equilíbrio são usadas para garantir que essas deformações se ajustem de maneira consistente com a geometria e as condições de apoio da estrutura (Soriano; Lima, 2006).

Outra abordagem para a análise estrutural decorre da utilização de Métodos Energéticos que, em vez de trabalhar diretamente com forças ou deslocamentos, baseia-se nos princípios da energia para determinar as respostas da estrutura. Ele se fundamenta em conceitos como o Princípio da Mínima Energia Potencial Total e o Teorema de Lagrange-Dirichlet. Em particular, no presente trabalho será utilizado o Método dos Elementos Finitos (MEF). Esse método se torna o mais adequado para a análise de estabilidade por possibilitar a inclusão de efeitos de não-linearidade, em especial a geométrica. Uma análise simplificada que pode ser desenvolvida a partir deste método é a análise linear de estabilidade, que se baseia na obtenção de cargas críticas e modos de instabilidade de uma estrutura. Ele é bastante eficiente para estruturas complexas, pois permite uma análise mais simplificada, particularmente em casos onde os deslocamentos desempenham um papel crítico, como em estruturas de grandes dimensões (Reis; Camotim, 2001).

2.2. ANÁLISE DE ESTABILIDADE

O estudo da estabilidade estrutural teve início com Euler (1744), ao investigar a estabilidade elástica de colunas. Sua abordagem era linear, focando apenas na determinação da carga crítica e nos modos de instabilidade de colunas esbeltas, restrita à análise de flambagem.

Buscando aprimorar essa abordagem, Navier desenvolveu a teoria geral da flexão, que considera que “as seções planas de uma viga, tomadas normalmente ao seu eixo, permanecem planas após a viga ser submetida à flexão”. Essa formulação foi um avanço importante para a análise de estruturas flexionadas, mas ainda apresentava limitações quando aplicada a colunas mais robustas em uma direção.

Para superar essas restrições, Timoshenko (1921), introduziu uma teoria mais refinada, incluindo o efeito da distorção por cisalhamento. Em sua formulação, o cisalhamento é tratado como uma rotação adicional da seção transversal, o que torna sua teoria aplicável a elementos estruturais de menor esbeltez, como vigas espessas ou colunas curtas (Martha; Burgos, 2014).

O estudo da estabilidade estrutural continuou a evoluir com importantes contribuições de diversos pesquisadores, como de Bryan (1888), Lyapunov (1982), Southwell (1913), dentre outros, os quais ampliaram a compreensão dos mecanismos de instabilidade.

Uma das maiores inovações que ampliou significativamente o escopo da análise de estabilidade foi o surgimento do Método dos Elementos Finitos (MEF). Esse método revolucionou a engenharia estrutural ao permitir a discretização da estrutura em elementos finitos, eliminando as limitações impostas pelas abordagens clássicas, que eram fortemente restritas a geometrias simples, como colunas retilíneas. O MEF possibilita a análise de estruturas complexas, com diferentes formas, tamanhos e condições de contorno, além de possibilitar incorporar não linearidades como a física e geométrica (Reis; Camotim, 2001).

Sua versatilidade e robustez fizeram com que o MEF se tornasse a principal ferramenta para a análise numérica de estabilidade estrutural, principalmente por sua integração com softwares computacionais, o que facilita a modelagem, simulação e interpretação de resultados em sistemas estruturais reais (Reis; Camotim, 2001).

3. CRITÉRIO ENERGÉTICO DE ESTABILIDADE

O critério energético de estabilidade estabelece que uma estrutura permanece estável enquanto sua configuração de equilíbrio corresponder a um ponto de mínimo da energia potencial total. Quando esse ponto deixa de ser um mínimo, ou seja, quando pequenas perturbações não resultam em retorno ao estado original, mas sim em um novo equilíbrio, ocorre a perda de estabilidade estrutural (Santos; Silva, 2018). A partir desse critério pode-se desenvolver a chamada análise linear de estabilidade, que permite avaliar as situações de perda de estabilidade de forma simplificada.

Na análise linear de estabilidade é desenvolvida a matriz de rigidez que nela existe tanto a contribuição da matriz de rigidez elástica quanto a geométrica. Essas matrizes dependem de propriedades do material e da forma da estrutura.

A formulação da matriz de rigidez é realizada pela determinação da energia potencial do sistema, que está em função da trajetória fundamental de equilíbrio e do parâmetro de carga. Segundo Burgos (2005), para verificar se o sistema é estável ou instável, é preciso avaliar se a energia na posição é um ponto máximo ou mínimo. Em sistemas estruturais elásticos e sob ação de cargas conservativas, a energia potencial total é definida como:

$$V = U + P \quad (3.1)$$

onde U é a energia interna de deformação elástica e P é o potencial das forças externas conservativas.

Quando um material é deformado por uma carga externa, tende a armazenar energia internamente em todo o seu volume. Dessa forma, a energia interna de deformação elástica é definida como mostra a equação (3.2):

$$U = \int_V u_e dV \quad (3.2)$$

onde u_e é o módulo de resiliência que é equivalente à área triangular sombreada sob o diagrama de tensão deformação somado a energia de uma barra circular sujeita a torção pura. Em termos físicos, a resiliência de um material u_e representa sua capacidade de absorver energia sem sofrer qualquer dano permanente. Logo:

$$u_e = \frac{1}{2} \cdot \sigma \cdot \varepsilon + \frac{1}{2} \cdot \tau \cdot \gamma \quad (3.3)$$

em que σ representa a tensão normal, ε a deformação, τ a tensão de cisalhamento e γ o ângulo de deformação.

A tensão é definida por:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (3.4)$$

onde E representa o módulo de elasticidade.

Substituindo a equação (3.4) na equação (3.3) obtém-se:

$$u_e = \frac{1}{2} \cdot E \cdot \varepsilon^2 + \frac{1}{2} \cdot \tau \cdot \gamma \quad (3.5)$$

Substituindo a equação (3.5) na equação (3.2):

$$U = \int_V \frac{1}{2} \cdot E \cdot \varepsilon^2 dV + \int_V \frac{1}{2} \cdot \tau \cdot \gamma dV \quad (3.6)$$

A parcela de P é dada pelo trabalho realizado pelas forças externas (F) na direção dos deslocamentos da estrutura (Δ), sendo ele sempre negativo (Burgos, 2005):

$$P = -F \cdot \Delta \quad (3.7)$$

Logo, substituindo a equação (3.6) e a equação (3.7) na equação da energia potencial total (3.1), obtém-se:

$$V = \int_V \frac{1}{2} \cdot E \cdot \varepsilon^2 dV + \int_V \frac{1}{2} \cdot \tau \cdot \gamma dV - F \cdot \Delta \quad (3.8)$$

3.1. PRINCÍPIO DA MÍNIMA ENERGIA POTENCIAL TOTAL E O TEOREMA DE LAGRANGE-DIRICHLET

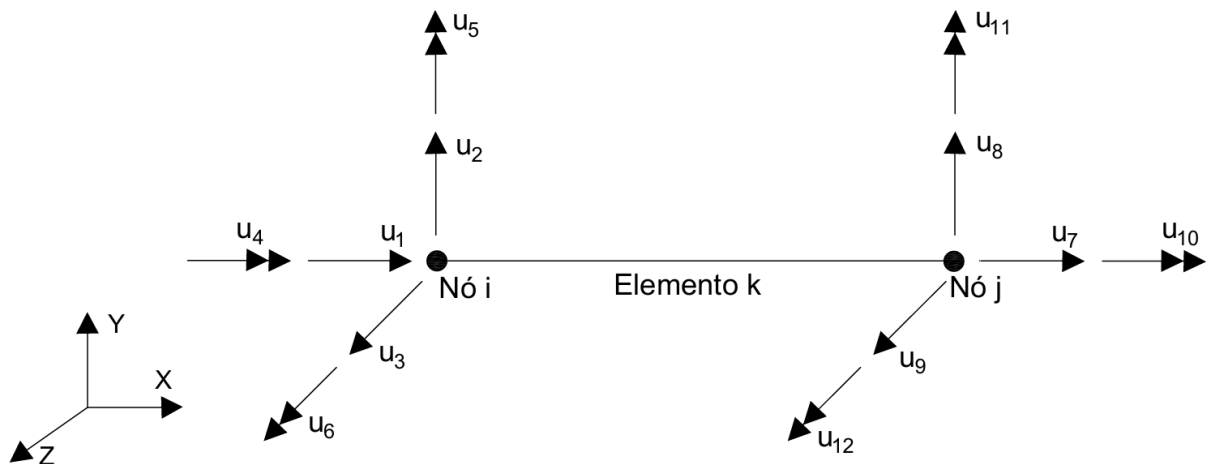
Na análise das estruturas, o Princípio da Mínima Energia Potencial Total afirma que, quando a primeira variação do funcional de energia potencial é nula, tem-se uma condição de equilíbrio estático. Isso corresponde à afirmação do Princípio da Energia Potencial Total Estacionária.

Considerando o elemento de pórtico ilustrado na Figura 3, o Princípio da Mínima Energia Potencial Total permite obter as seguintes equações de equilíbrio:

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (3.9)$$

sendo n o número de equações de equilíbrio.

Figura 3 – Graus de liberdade de rotação e deslocamento de um elemento de pórtico.



Fonte: Autor.

O Teorema de Lagrange-Dirichlet afirma que, considerando que a energia potencial do sistema é contínua, o equilíbrio de um sistema que contém apenas forças conservativas e dissipativas é estável se a energia potencial apresenta um ponto de mínimo local. Em outras palavras, isso significa que a segunda variação da energia potencial deve ser positiva. Logo a matriz $[K]$ deve ser positiva definida (Bazant; Cedolin, 2010), sendo as componentes de $[K]$ obtidas como:

$$K_{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, n \quad (3.10)$$

3.2. ENERGIA INTERNA DE DEFORMAÇÃO.

Para a análise estrutural pelo MEF, o principal objetivo é obter a solução para distribuição de tensões e deformações em todo o domínio da estrutura. O campo de deslocamento é descrito apenas pelos deslocamentos dos nós dos elementos. Neste caso faz-se necessário relacionar os valores nodais do campo com os valores no interior do elemento, chamada de função de forma. E a relação entre o campo de deslocamento e o campo de forças em um elemento é obtida através de uma matriz, a matriz de rigidez, sendo seus elementos

obtidos a partir do Princípio da Energia Potencial Estacionária (Burgos, 2005). Para a análise de estabilidade, a matriz de rigidez é descrita da seguinte forma:

$$[K] = [K_E] + \lambda \cdot [K_G] \quad (3.11)$$

em que $[K]$ é a matriz de rigidez total, $[K_E]$ é a matriz de rigidez elástica, λ o fator de carga e $[K_G]$ a matriz de rigidez geométrica.

Na Equação (3.6), a deformação ε presente na expressão pode ser decomposta em parcelas linear ε_L e não-linear ε_N :

$$\varepsilon = \varepsilon_L + \varepsilon_N \quad (3.12)$$

Logo, substituindo na Equação (3.6), que é a parcela da energia interna de deformação, a energia interna fica expressa como:

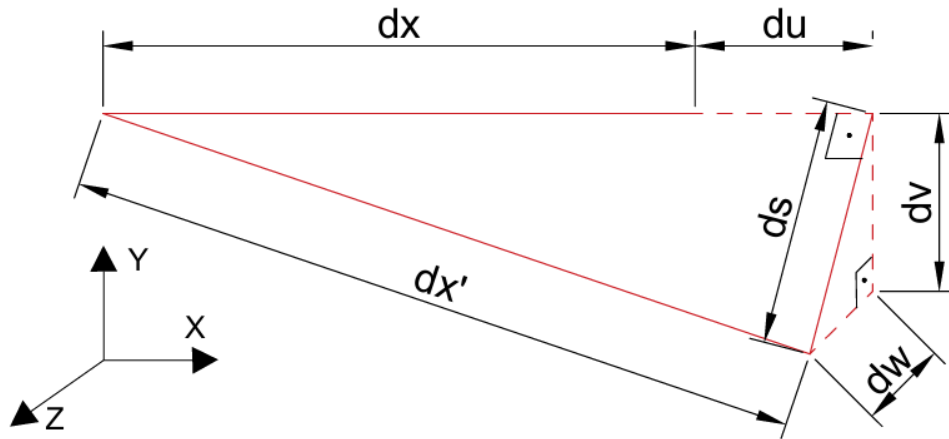
$$U = \int_V \frac{1}{2} \cdot E \cdot \varepsilon_L^2 dV + \int_V E \cdot \varepsilon_L \cdot \varepsilon_N dV + \int_V \frac{1}{2} \cdot E \cdot \varepsilon_N^2 dV + \int_V \frac{1}{2} \cdot \tau \cdot \gamma dV \quad (3.13)$$

sendo a primeira parcela definida como parcela elástica U_E , a segunda parcela é a geométrica U_G , a terceira parcela é a não-linear U_N e a quarta parcela é a contribuição da torção. Para a análise linear de estabilidade, a parcela não-linear U_N será desprezada.

Em um pórtico tridimensional, os elementos estruturais estão sujeitos à atuação de cargas em diferentes direções do espaço. Conseqüentemente, as deformações desses elementos apresentam contribuições provenientes de três principais formas: axial, flexão e torção. A deformação axial ocorre devido à presença de forças normais ao longo do eixo do elemento, provocando seu alongamento ou encurtamento. Já as deformações por flexão são causadas por momentos fletores, que induzem curvaturas nos planos principais da estrutura. Por fim, as deformações por torção surgem da ação de momentos torcionais aplicados ao redor do eixo longitudinal dos elementos, resultando em rotações angulares (Hibbeler, 2010). Esses três tipos de deformação ocorrem de forma simultânea nos elementos do pórtico, sendo essencial considerá-los na análise estrutural, especialmente em sistemas tridimensionais, onde a interação entre os diferentes modos de deformação é mais complexa e influencia diretamente no comportamento global da estrutura.

Para determinar a deformação puramente axial, utiliza-se como base o elemento representado na Figura 4, que apresenta deslocamentos nas direções de x (du), de y (dv) e de z (dw).

Figura 4 – Mudança de configuração do elemento de barra



Fonte: Autor

Será aplicada a medida de deformação de Green-Lagrange, que corresponde a uma medida não-linear de deformação e é definida como:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left(\frac{dx'^2 - dx^2}{dx^2} \right) \quad (3.14)$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras na Figura 4, tem-se:

$$dx'^2 = (dx + du)^2 + ds^2$$

sendo

$$ds^2 = dv^2 + dw^2$$

Assim, tem-se:

$$\begin{aligned} dx'^2 &= (dx + du)^2 + dv^2 + dw^2 \\ dx'^2 &= dx^2 + 2 \cdot dx \cdot du + du^2 + dv^2 + dw^2 \\ dx'^2 - dx^2 &= 2 \cdot dx \cdot du + du^2 + dv^2 + dw^2 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Deste modo, a parcela axial, aqui denotada por ε_A fica expressa como:

$$\begin{aligned}\varepsilon_A &= \frac{1}{2} \left(\frac{dx'^2 - dx^2}{dx^2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{2 \cdot dx \cdot du + du^2 + dv^2 + dw^2}{dx^2} \right) \\ \varepsilon_A &= \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \\ \varepsilon_A &= u'(x) + \frac{1}{2} [u'(x)]^2 + \frac{1}{2} [v'(x)]^2 + \frac{1}{2} [w'(x)]^2\end{aligned}\quad (3.16)$$

Para o elemento de pórtico outra contribuição que existe é da deformação causada pela flexão:

$$\varepsilon_F = -\frac{y}{\rho_y} - \frac{z}{\rho_z} = -y \frac{d^2v}{dx^2} - z \frac{d^2w}{dx^2} = -yv''(x) - zw''(x) \quad (3.17)$$

em que ρ_y é o raio de curvatura do eixo da barra no eixo y e ρ_z no eixo z .

Para o pórtico em três dimensões, além da deformação puramente axial e de flexão existe a contribuição da torção. Aplicando a Lei de Hooke na parcela da integral da energia interna de deformação elástica que tem a contribuição da tensão de cisalhamento, tem-se:

$$\begin{aligned}U &= \int_V \frac{1}{2} \cdot \tau \cdot \gamma dV \\ U &= \int_V \frac{1}{2} \cdot G \cdot \gamma^2 dV\end{aligned}$$

sendo G o módulo de cisalhamento.

A deformação γ para o caso de torção é descrita, de acordo com Hibbeler (2010), da seguinte forma:

$$\gamma = \frac{\rho}{L} \cdot \varphi(x)$$

sendo

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) \cdot u_4 + \varphi_2(x) \cdot u_{10}$$

L o comprimento do elemento e ρ o raio da seção transversal.

Dessa forma,

$$U = \int_V \frac{1}{2} \cdot G \cdot \frac{\rho^2}{L^2} \cdot \varphi^2 dV$$

$$U = \frac{G}{2L^2} \cdot \int_L \varphi^2 \cdot \int_A \rho^2 \cdot dAdX$$

Sendo o momento polar de inércia dado por:

$$J = \int_A \rho^2 \cdot dA$$

Tem-se a contribuição da torção na energia interna de deformação elástica:

$$U = \frac{G \cdot J}{2 \cdot L^2} \cdot \int_L \varphi^2 dX \quad (3.18)$$

Das Equações (3.16) e (3.17), identificam-se as parcelas linear e não-linear da deformação, expressas como:

$$\varepsilon_L = u'(x) - yv''(x) - zw''(x) \quad (3.19)$$

$$\varepsilon_N = \frac{1}{2} [u'(x)]^2 + \frac{1}{2} [v'(x)]^2 \quad (3.20)$$

Para a análise somente dos deslocamentos, considera-se apenas a parcela elástica U_E e a contribuição da torção. Dessa forma, a contribuição não-linear será somente necessária para a determinação da parcela geométrica. A parcela de energia de deformação elástica que inclui a contribuição da torção pode então ser escritas como:

$$U_E = \int_V \frac{1}{2} \cdot E \cdot \varepsilon_L^2 dV$$

$$= \int_V \frac{1}{2} \cdot E \cdot [u'(x) - yv''(x) - zw''(x)]^2 dV + \frac{G \cdot J}{2L^2} \cdot \int_V \varphi^2 dX \quad (3.21)$$

Para compor a matriz de rigidez total da estrutura, que integra a parcela elástica e a parcela geométrica $[K] = [K_E] + \lambda \cdot [K_G]$, e possibilitar a análise linear de estabilidade, com determinação do fator de carga crítica e do modo de instabilidade, desenvolve-se agora a matriz de rigidez geométrica $[K_G]$, uma vez que a matriz de rigidez elástica $[K_E]$, já foi previamente determinada. Para isso, utiliza-se a parcela geométrica da equação (3.13). Substituindo as equações (3.19) e (3.20) na expressão de U_G da equação (3.13), obtém-se:

$$U_G = \int_V (E) \cdot (u'(x) - yv''(x) - zw''(x)) \cdot \left(\frac{1}{2} [u'(x)]^2 + \frac{1}{2} [v'(x)]^2 \right) dV \quad (3.22)$$

Diferentemente da equação (3.21), que serve de base para a matriz de rigidez elástica, a equação (3.22), utilizada para a matriz de rigidez geométrica, não inclui a parcela correspondente ao efeito de torção.

3.3. TÉCNICA DOS ELEMENTOS FINITOS – INTERPOLAÇÃO DOS PARAMETROS NODAIS

O Método dos Elementos Finitos (MEF) permite a discretização de uma estrutura contínua em um conjunto de elementos finitos, possibilitando a formulação e solução do problema estrutural por meio de um sistema de equações algébricas. A partir dessa discretização, torna-se viável aplicar a interpolação dos parâmetros nodais para estimar os campos de deslocamento, deformação e tensão em qualquer ponto da estrutura, com base nos valores obtidos nos nós (Azevedo, 2003).

Os parâmetros nodais são as grandezas físicas conhecidas nos nós da malha, como deslocamentos e rotações. Para estimar os valores internos a cada elemento, utilizam-se as chamadas funções de interpolação, que descrevem como essas variáveis se distribuem ao longo do elemento. Essas funções são formuladas de modo que reproduzam com fidelidade os valores nos nós e garantam a continuidade e a compatibilidade entre os elementos (Ribeiro, 2004).

No contexto do MEF, as funções $u(x)$, $v(x)$, $w(x)$ e $\varphi(x)$ são escritas por meio de interpolação de valores nodais e são expressas como:

$$u(x) = \phi_1(x)u_1 + \phi_2(x)u_7 \quad (3.23)$$

$$v(x) = \psi_1(x)u_2 + \psi_2(x)u_6 + \psi_3(x)u_8 + \psi_4(x)u_{12} \quad (3.24)$$

$$w(x) = \psi_1(x)u_3 + \psi_2(x)u_5 + \psi_3(x)u_9 + \psi_4(x)u_{11} \quad (3.25)$$

$$\varphi(x) = \phi_1(x)u_4 + \phi_2(x)u_{10} \quad (3.26)$$

em que as funções de forma são definidas de modo a ter valor unitário no nó em que estão atreladas e valor zero nos demais nós, resultando em:

$$\phi_1 = 1 - \frac{x}{L} \quad (3.27)$$

$$\phi_2 = \frac{x}{L} \quad (3.28)$$

$$\psi_1 = 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 1 \quad (3.29)$$

$$\psi_2 = L \left[\left(\frac{x}{L} \right)^3 - 2 \left(\frac{x}{L} \right)^2 + \frac{x}{L} \right] \quad (3.30)$$

$$\psi_3 = -2 \left(\frac{x}{L} \right)^3 + 3 \left(\frac{x}{L} \right)^2 \quad (3.31)$$

$$\psi_4 = L \left[\left(\frac{x}{L} \right)^3 - 2 \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right] \quad (3.32)$$

3.4. MATRIZ DE RIGIDEZ ELÁSTICA LOCAL

A matriz de rigidez elástica local descreve através dos elementos da matriz o comportamento elástico de cada elemento da estrutura com a contribuição das deformações axial, de flexão e de torção.

Substituindo as Equações (3.23), (3.24), (3.25) e (3.26) na (3.21) e calculando as derivadas segundas da Equação (3.21) em relação aos parâmetros nodais, obtém-se as componentes da matriz de rigidez elástica:

$$[K_E]_{ij} = \frac{\partial^2 U_E}{\partial q_i \partial q_j} \quad (3.33)$$

onde q_i é um vetor que engloba os parâmetros nodais $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{11}, u_{12}$.

Por exemplo, o elemento K_{E11} é obtido considerando-se o efeito axial apresentado na equação (3.21), resultando em:

$$U_{E(axial)} = \int_V \frac{1}{2} \cdot E \cdot (u'(x))^2 dV \quad (3.34)$$

em que E é o módulo de elasticidade e $u(x)$ o deslocamento axial.

As derivadas das funções de forma axiais (3.27) e (3.28) são:

$$\phi'_1 = -\frac{1}{L}$$

$$\phi'_2 = \frac{1}{L}$$

Substituindo na equação (3.23)

$$u'(x) = -\frac{1}{L} \cdot u_1 + \frac{1}{L} \cdot u_7 = \frac{u_7 - u_1}{L} \quad (3.35)$$

Assim,

$$(u'(x))^2 = \left(\frac{u_1^2 - 2u_7u_1 + u_7^2}{L^2} \right) \quad (3.36)$$

Integrando no comprimento L:

$$\int_V \frac{1}{2} \cdot E \cdot (u'(x))^2 dV = \int_0^L \frac{1}{2} \cdot E \cdot A \cdot (u'(x))^2 dx$$

em que A é a área da seção transversal do elemento.

Logo,

$$\int_0^L \frac{1}{2} \cdot E \cdot A \cdot (u'(x))^2 dx = \frac{E \cdot A}{2} \cdot \left(\frac{u_1^2 - 2u_7u_1 + u_7^2}{L} \right) \quad (3.37)$$

O elemento K_{E11} da matriz de rigidez axial é obtido derivando a equação (3.37) duas vezes:

$$K_{E11} = \frac{\partial^2 U_E}{\partial u_1 \partial u_1} = \frac{EA}{L} \quad (3.38)$$

Os demais elementos K_{Eij} resultam de derivadas da energia de deformação, incluindo os demais efeitos, com relação os outros graus de liberdade.

A matriz de rigidez elástica ao se calcular todos os elementos, é expressa como:

$$[K_E] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

sendo

I_x o momento de torção;

I_y, I_z os momentos de inércia em relação aos eixos y e z , respectivamente;

A a área da seção transversal da barra;

E o Módulo de Elasticidade Longitudinal do material empregado;

G o Módulo de Elasticidade Transversal do material empregado;

L o comprimento da barra.

3.5. MATRIZ DE RIGIDEZ GEOMÉTRICA LOCAL

Diferentemente da matriz de rigidez elástica, que considera os efeitos de flexão, torção e esforço axial, a matriz de rigidez geométrica empregada neste trabalho não leva em conta o efeito de torção, conforme indicado na equação (3.22).

O cálculo dos elementos da matriz de rigidez geométrica é realizado por meio da derivada parcial da equação (3.22). Substituindo as equações (3.23), (3.24), (3.25) e (3.26) na equação (3.22) e, em seguida, calculando as derivadas segundas em relação aos parâmetros nodais, obtêm-se as componentes da matriz de rigidez geométrica:

$$K_{ij} = \frac{\partial^2 U_G}{\partial q_i \partial q_j} \quad (3.40)$$

onde q_i é um vetor que engloba os parâmetros nodais $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{11}, u_{12}$.

Por exemplo, o elemento K_{G22} é calculado considerando-se, por ser proveniente do efeito de flexão, a seguinte parcela da energia de deformação geométrica apresentada na equação (3.22):

$$U_{G(Flexão)} = \frac{1}{2} \int_0^L (v'(x))^2 dx \quad (3.41)$$

onde é $v(x)$ o deslocamento transversal na direção y associada a flexão no plano x - y e $v'(x)$ sua derivada em relação a x .

As derivadas das funções de forma $\Psi_i(x)$ equação (3.29), (3.30), (3.31) e (3.32) são:

$$\Psi_1' = \frac{1}{L} \cdot \left(\frac{6x^2}{L^2} - \frac{6x}{L} \right)$$

$$\Psi_2' = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{4x}{L} + 1$$

$$\Psi'_3 = \frac{-6x^3}{L^3} + \frac{6x}{L^2}$$

$$\Psi'_4 = \frac{3x}{L} - 2$$

O campo de deslocamento transversal na direção y , equação (3.24), associada a flexão no plano x - y é escrito em termos dos graus de liberdade u_2, u_6, u_8 e u_{12}

$$v'(x) = \left[\frac{1}{L} \cdot \left(\frac{6x^2}{L^2} - \frac{6x}{L} \right) \right] \cdot u_2 + \left[\frac{3x^2}{L^2} - \frac{4x}{L} + 1 \right] \cdot u_6 + \left[\frac{-6x^3}{L^3} + \frac{6x}{L^2} \right] \cdot u_8 + \left[\frac{3x}{L} - 2 \right] \cdot u_{12} \quad (3.42)$$

Elevando ao quadrado:

$$\begin{aligned} (v'(x))^2 &= \left[\frac{36}{L} \cdot \left(\frac{x^4}{L} - 2 \left(\frac{x}{L} \right)^3 + \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right) \right] \cdot u_2^2 \\ &+ \left[9 \cdot \left(\frac{x}{L} \right)^4 - 24 \cdot \left(\frac{x}{L} \right)^3 + 22 \cdot \left(\frac{x}{L} \right)^2 - 8 \cdot \left(\frac{x}{L} \right) + 1 \right] \cdot u_6^2 \\ &+ \left[\frac{36}{L^2} \cdot \left(\left(\frac{x}{L} \right)^4 - 2 \cdot \left(\frac{x}{L} \right)^3 + \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right) \right] \cdot u_8^2 \\ &+ \left[9 \cdot \left(\frac{x}{L} \right)^4 - 12 \cdot \left(\frac{x}{L} \right)^3 + 4 \cdot \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right] \cdot u_{12}^2 \\ &+ \left[\frac{36}{L} \cdot \left(\frac{x}{L} \right)^4 - \frac{84}{L} \cdot \left(\frac{x}{L} \right)^3 + \frac{60}{L} \cdot \left(\frac{x}{L} \right)^2 - \frac{12}{L} \cdot \left(\frac{x}{L} \right) \right] \cdot u_2 u_6 \\ &+ \left[-\frac{72}{L^2} \cdot \left(\frac{x}{L} \right)^4 + \frac{144}{L^2} \cdot \left(\frac{x}{L} \right)^3 - \frac{72}{L^2} \cdot \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right] \cdot u_2 u_8 \\ &+ \left[\frac{36}{L} \cdot \left(\frac{x}{L} \right)^4 - \frac{60}{L} \cdot \left(\frac{x}{L} \right)^3 + \frac{24}{L} \cdot \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right] \cdot u_2 u_{12} \\ &+ \left[-\frac{36}{L} \cdot \left(\frac{x}{L} \right)^4 + \frac{84}{L} \cdot \left(\frac{x}{L} \right)^3 - \frac{60}{L} \cdot \left(\frac{x}{L} \right)^2 + \frac{12}{L} \cdot \left(\frac{x}{L} \right) \right] \cdot u_6 u_8 \\ &+ \left[18 \cdot \left(\frac{x}{L} \right)^4 - 36 \cdot \left(\frac{x}{L} \right)^3 + 22 \cdot \left(\frac{x}{L} \right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{x}{L} \right) \right] \cdot u_6 u_{12} \\ &+ \left[-\frac{36}{L} \cdot \left(\frac{x}{L} \right)^4 + \frac{60}{L} \cdot \left(\frac{x}{L} \right)^3 - \frac{24}{L} \cdot \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right] \cdot u_8 u_{12} \end{aligned}$$

Integra-se de 0 a L:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^L (v'(x))^2 dx &= \frac{3}{5L} \cdot u_2^2 + \frac{L}{15} \cdot u_6^2 + \frac{3}{5L} \cdot u_8^2 + \frac{L}{15} \cdot u_{12}^2 + \frac{1}{10} \cdot u_2 u_6 \\ &\quad - \frac{6}{5L} \cdot u_2 u_8 + \frac{1}{10} \cdot u_2 u_{12} - \frac{1}{10} \cdot u_6 u_8 - \frac{1}{30} \cdot u_6 u_{12} - \frac{1}{10} \cdot u_8 u_{12} \end{aligned} \quad (3.43)$$

Esse resultado representa a energia de deformação em função dos graus de liberdade.

O elemento da matriz de rigidez geométrica é obtido pela segunda derivada de U_G em relação aos graus de liberdade. Por exemplo, para o grau de liberdade u_2 :

$$K_{G22} = \frac{\partial^2 U_G}{\partial u_2 \partial u_2} = \frac{6}{5L} \quad (3.44)$$

O mesmo procedimento é aplicado para encontrar os demais elementos da matriz de rigidez geométrica, de acordo com o par de graus de liberdade considerado e o efeito.

A matriz de rigidez geométrica ao se calcular todos os elementos, é expressa como:

$$[K_G] = P \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5L} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 & -\frac{6}{5L} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & \frac{6}{5L} & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6}{5L} & 0 & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & \frac{2L}{15} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 & -\frac{L}{30} & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & \frac{2L}{15} & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & -\frac{L}{30} \\ -\frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5L} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & \frac{6}{5L} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{10} \\ 0 & 0 & -\frac{6}{5L} & 0 & \frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & \frac{6}{5L} & 0 & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & -\frac{L}{30} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 & \frac{2L}{15} & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & -\frac{L}{30} & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & \frac{2L}{15} \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

sendo

P o esforço normal atuante na barra;

L o comprimento da barra.

3.6. MATRIZ DE ROTAÇÃO TRIDIMENSIONAL

Para que os elementos do pórtico, calculados individualmente, possam compor uma estrutura integrada, é necessário que todos estejam referenciados em um mesmo sistema de coordenadas. Para isso, realiza-se a rotação dos elementos, de modo a transformar suas matrizes de rigidez local em uma matriz de rigidez global. Essa transformação é feita por meio da matriz de rotação.

Para um pórtico tridimensional a matriz de rotação é representada como mostra a Equação (3.46) sendo essa matriz composta por submatrizes. As submatrizes são de tamanho 3×3 realizando a transformação em três graus de liberdade. Dessa forma, a matriz de rotação tem o tamanho 12×12 .

$$[R] = \begin{bmatrix} \bar{R} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{R} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{R} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{R} \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

Na matriz $[R]$ os zeros representam matrizes 3×3 nulas e \bar{R} é dado por

$$[\bar{R}] = \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} & C_{xz} \\ C_{yx} & C_{yy} & C_{yz} \\ C_{zx} & C_{zy} & C_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

em que C_{ij} é o cosseno diretor do eixo local i com relação ao eixo global j .

A estratégia adotada neste trabalho para a construção da matriz de rotação segue abordagem semelhante à apresentada por Santos (2024). Essa metodologia baseia-se, inicialmente, no cálculo do cosseno diretor ao longo do eixo local x , e, a partir dele, determinam-se os cossenos diretores dos eixos y e z por meio de um processo em duas etapas.

Para facilitar os cálculos, são definidos vetores unitários nas direções dos eixos locais e globais. Com isso, é possível empregar a álgebra vetorial na determinação dos cossenos diretores correspondentes a cada eixo.

O comprimento do elemento é calculado utilizando as coordenadas dos nós de extremidade, conforme apresentado na Equação (3.48).

$$L = \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2 + (Z_j - Z_i)^2} \quad (3.48)$$

Os cossenos diretores do eixo x local pode ser calculado através da trigonometria usando as coordenadas globais das duas articulações em que a barra é fixada. Dessa forma se tem as Equações (3.49), (3.50) e (3.51).

$$C_{xx} = \frac{X_f - X_i}{L} \quad (3.49)$$

$$C_{xy} = \frac{Y_f - Y_i}{L} \quad (3.50)$$

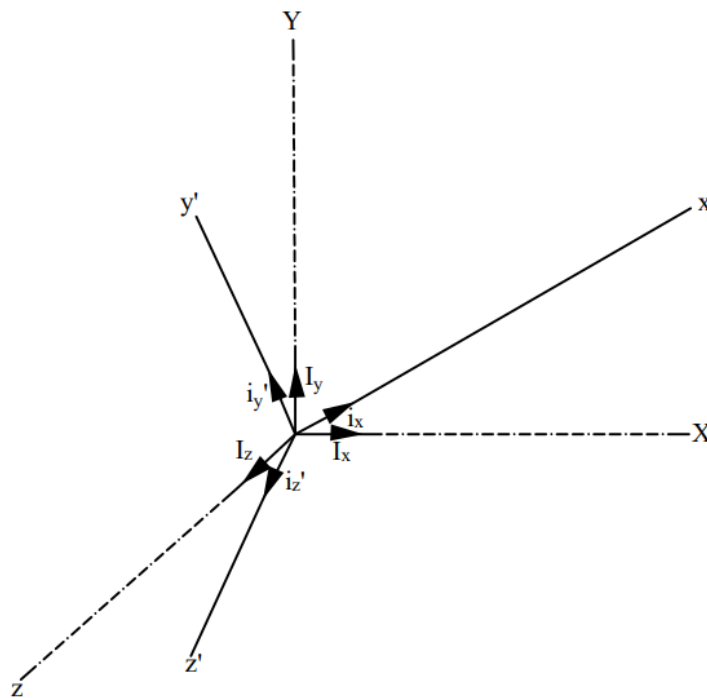
$$C_{xz} = \frac{Z_f - Z_i}{L} \quad (3.51)$$

Após a definição dos cossenos diretores ao longo do eixo local x , é necessário determinar os cossenos diretores correspondentes aos eixos y e z , completando assim a matriz de rotação. A Figura 5 ilustra os vetores unitários locais i_x, i_y e i_z , bem como os vetores unitários dos eixos globais I_x, I_y e I_z .

A relação entre os vetores locais e globais é estabelecida por meio da matriz de rotação, conforme expressa na Equação (3.52).

$$\begin{bmatrix} i_x \\ i_y \\ i_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} & C_{xz} \\ C_{yx} & C_{yy} & C_{yz} \\ C_{zx} & C_{zy} & C_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_x \\ I_y \\ I_z \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

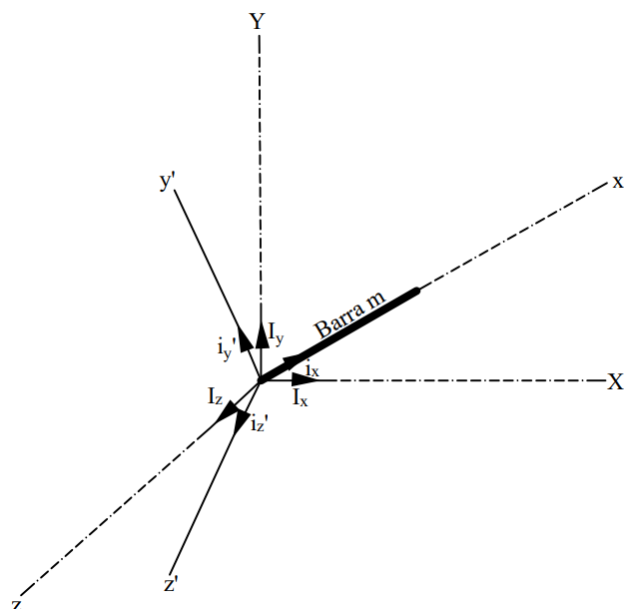
Figura 5 – Vetores unitários na direções locais e globais



Fonte: Santos (2024)

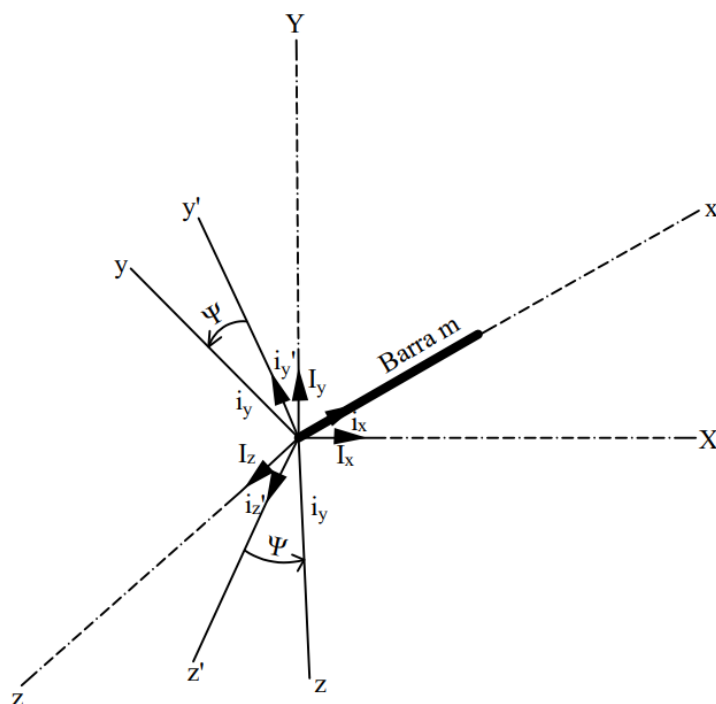
Após definir os cossenos diretores do eixo local x , os cossenos diretores dos eixos y e z são determinados com base em um ângulo de rotação, denominado ψ . Esse processo é realizado em duas etapas. A primeira consiste na construção de um sistema de coordenadas auxiliares, e a segunda transforma esse sistema auxiliar no sistema de coordenadas reais por meio do ângulo ψ . As Figuras 6 e 7 ilustram essas etapas, respectivamente.

Figura 6 – Orientação da barra m no plano xy'



Fonte: Santos (2024)

Figura 7 – Orientação real da barra m



Fonte: Santos (2024)

Na primeira etapa, o sistema auxiliar é definido pelos vetores i'_y e i'_z . O eixo x já está orientado corretamente na direção da barra, obtido previamente pelas coordenadas globais de suas extremidades. Os eixos y' e z' são então definidos de forma que o plano xy seja vertical e o eixo z esteja na direção horizontal. A Figura 6 representa essa configuração, onde os vetores y' e z' indicam direções provisórias dos eixos reais.

Não é calculado na direção do eixo x por no cálculo do cosseno diretor já ser feito mediante as coordenadas globais com as extremidades da barra. Dessa forma, como o eixo z' é perpendicular ao plano vertical xy' , o vetor z' pode ser determinado pelo produto vetorial i_x com o vetor unitário I_y . Assim, resultando na Equação 3.54.

$$z' = i_x \times I_y = \det \begin{vmatrix} I_x & I_y & I_z \\ C_{xx} & C_{xy} & C_{xz} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (3.53)$$

$$z' = -C_{xz} \cdot I_x + C_{xx} \cdot I_z \quad (3.54)$$

Para obter o vetor unitário i'_z ao longo do eixo local, basta dividir o vetor z' por $\sqrt{C_{xz}^2 + C_{xx}^2}$. Dessa forma resultando na Equação (3.55).

$$i'_z = -\frac{C_{xz}}{\sqrt{C_{xz}^2 + C_{xx}^2}} \cdot I_x + \frac{C_{xx}}{\sqrt{C_{xz}^2 + C_{xx}^2}} \cdot I_z \quad (3.55)$$

O produto vetorial entre i'_z e i_x , resulta no vetor unitário $i'_{y'}$, como mostra a Equação (3.57).

$$i'_{y'} = i'_z \times i_x = \det \begin{vmatrix} I_x & I_y & I_z \\ -\frac{C_{xz}}{\sqrt{C_{xz}^2 + C_{xx}^2}} & 0 & \frac{C_{xx}}{\sqrt{C_{xz}^2 + C_{xx}^2}} \\ C_{xx} & C_{xy} & C_{xz} \end{vmatrix} \quad (3.56)$$

$$i'_{y'} = -\left(\frac{C_{xx} \cdot C_{xy}}{\sqrt{C_{xz}^2 + C_{xx}^2}}\right) \cdot I_x + \left(\sqrt{C_{xz}^2 + C_{xx}^2}\right) \cdot I_y - \left(\frac{C_{xy} \cdot C_{xz}}{\sqrt{C_{xz}^2 + C_{xx}^2}}\right) \cdot I_z \quad (3.57)$$

Conclui-se, assim, a primeira etapa, resultando no sistema de coordenadas auxiliares locais representados na Equação (3.58).

$$\begin{bmatrix} i_x \\ i_{y'} \\ i_{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} & C_{xz} \\ -\frac{C_{xz} \cdot C_{xy}}{\sqrt{C_{xx}^2 + C_{xz}^2}} & \sqrt{C_{xx}^2 + C_{xz}^2} & -\frac{C_{xy} \cdot C_{xz}}{\sqrt{C_{xx}^2 + C_{xz}^2}} \\ \frac{C_{xz}}{-\sqrt{C_{xx}^2 + C_{xz}^2}} & 0 & -\frac{C_{xx}}{\sqrt{C_{xx}^2 + C_{xz}^2}} \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

A segunda etapa consiste em rotacionar o sistema de coordenadas auxiliares locais em torno do eixo x , no sentido anti-horário, utilizando o ângulo de rotação ψ , até que os eixos principais da barra assumam a orientação final desejada. Essa rotação é ilustrada na Figura 7, onde o ângulo ψ ajusta os vetores y e z a partir de suas posições auxiliares para as direções reais no espaço. Utilizando a Equação (3.59) e (3.60) é possível montar a matriz para orientar os eixos no sentido real.

$$i_y = \cos \psi \cdot i_{y'} + \sin \psi \cdot i_{z'} \quad (3.59)$$

$$i_z = -\sin \psi \cdot i_{y'} + \cos \psi \cdot i_{z'} \quad (3.60)$$

Assim a relação de transformação entre os termos $xy'z'$ para o sistema de coordenadas reais, assim encontrando os cossenos diretores é feito com a Equação (3.61).

$$\begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} & C_{xz} \\ C_{yx} & C_{yy} & C_{yz} \\ C_{zx} & C_{zy} & C_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & \sin \psi \\ 0 & -\sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} i_{x'} \\ i_{y'} \\ i_{z'} \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

Dessa forma, a relação entre o sistema de coordenadas locais e globais pode ser representada como mostra a Equação (3.62).

$$\begin{bmatrix} i_x \\ i_y \\ i_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} & C_{xz} \\ -\frac{C_{xz} \cdot C_{xy} \cdot \cos \psi - C_{xz} \cdot \sin \psi}{\sqrt{C_{xx}^2 + C_{xz}^2}} & \sqrt{C_{xx}^2 + C_{xz}^2} \cdot \cos \psi & -\frac{C_{xy} \cdot C_{xz} \cdot \cos \psi - C_{xx} \cdot \sin \psi}{\sqrt{C_{xx}^2 + C_{xz}^2}} \\ \frac{C_{xx} \cdot C_{xy} \cdot \sin \psi - C_{xz} \cdot \cos \psi}{\sqrt{C_{xx}^2 + C_{xz}^2}} & -\sqrt{C_{xx}^2 + C_{xz}^2} \cdot \sin \psi & \frac{C_{xx} \cdot C_{xy} \cdot \sin \psi + C_{xz} \cdot \cos \psi}{\sqrt{C_{xx}^2 + C_{xz}^2}} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_x \\ I_y \\ I_z \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

Por fim, a matriz de rotação para elementos que não estejam na vertical é descrita como mostra a Equação (3.63).

$$[\bar{R}] = \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} & C_{xz} \\ \frac{C_{xz} \cdot C_{xy} \cdot \cos \psi - C_{xz} \cdot \sin \psi}{\sqrt{C_{xx}^2 + C_{xz}^2}} & \sqrt{C_{xx}^2 + C_{xz}^2} \cdot \cos \psi & -\frac{C_{xy} \cdot C_{xz} \cdot \cos \psi - C_{xx} \cdot \sin \psi}{\sqrt{C_{xx}^2 + C_{xz}^2}} \\ \frac{C_{xx} \cdot C_{xy} \cdot \sin \psi - C_{xz} \cdot \cos \psi}{\sqrt{C_{xx}^2 + C_{xz}^2}} & -\sqrt{C_{xx}^2 + C_{xz}^2} \cdot \sin \psi & \frac{C_{xx} \cdot C_{xy} \cdot \sin \psi + C_{xz} \cdot \cos \psi}{\sqrt{C_{xx}^2 + C_{xz}^2}} \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

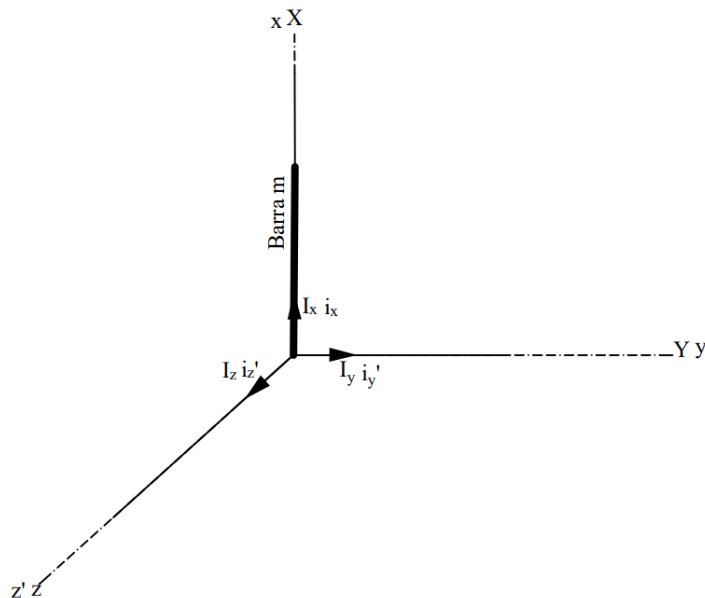
3.6.1. MATRIZ DE ROTAÇÃO PARA ELEMENTOS NA VERTICAL

A matriz de rotação da Equação (3.63) pode ser utilizada para barras orientadas em qualquer direção, exceto na vertical. Isso ocorre porque, nesse caso, os coeficientes C_{xx} e C_{xz} se anulam, o que torna inviável o cálculo de alguns elementos da matriz. Para contornar essa limitação, é necessário definir um ângulo de rotação específico para barras verticais.

Nessa configuração, o eixo local x deve ser orientado paralelamente ao eixo global Y . Com isso, é possível definir um ângulo de rotação, que é medido no sentido horário positivo quando observado na direção negativa do eixo x local. Dessa forma, o sistema de coordenadas locais xyz é rotacionado em torno do eixo x até que o eixo local z fique paralelo e na mesma direção do eixo global Z .

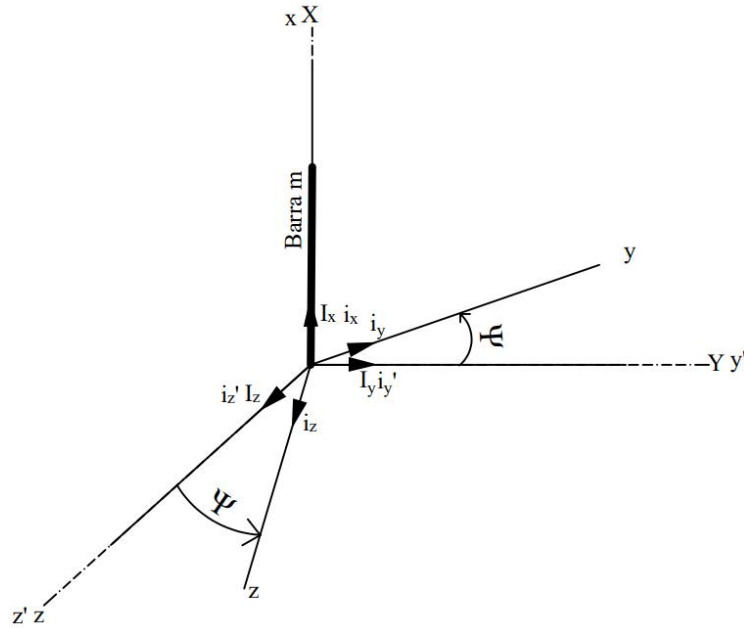
A matriz de rotação $[\bar{R}]$ para barras com orientação vertical pode ser obtida por um processo semelhante ao utilizado para barras com direções diferentes da vertical. Com base nas Figuras 8 e 9, observa-se que a orientação espacial real de um membro vertical pode ser construída em duas etapas.

Figura 8 – Orientação vertical com o eixo paralelo z' ao eixo Z



Fonte: Santos (2024)

Figura 9 – Orientação vertical da barra



Fonte: Santos (2024)

Na primeira etapa, como mostrado na Figura 8, considera-se o eixo local x da barra orientado ao longo da sua direção vertical na direção do eixo Y global, enquanto o eixo z' local é paralelos ao eixo global Z . Nessa configuração intermediária, os eixos locais y e z são representados como y' e z' , pois ainda não estão na orientação final desejada.

Dessa forma, o eixo local x é representado como um vetor unitário.

$$i_x = C_{xy} \cdot I_y \tag{3.64}$$

Já para a direção do eixo z' é dado pelo vetor unitário.

$$i_{z'} = I_z \tag{3.65}$$

Por fim, o vetor unitário $i_{y'}$ é o produto vetorial entre $i_{z'}$ e i_x como mostra a Equação (3.67).

$$i_{y'} = i_{z'} \times i_x = \det \begin{vmatrix} I_x & I_y & I_z \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & C_{xy} & 0 \end{vmatrix} \tag{3.66}$$

$$i_{y'} = -C_{xy} \cdot I_x \tag{3.67}$$

Dessa forma finaliza a primeira etapa com o sistema de coordenadas auxiliares locais para barras na vertical da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} i_x \\ i_{y'} \\ i_{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & C_{xy} & 0 \\ -C_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

Para a segunda etapa também é utilizado o ângulo de rotação ψ girando o sistema em torno do eixo x no sentido anti-horário até que os eixos esteja, na orientação real. Essa etapa é ilustrada na Figura 9.

Para passar o sistema de coordenadas locais auxiliares para as coordenadas reais são utilizadas as mesmas equações da matriz anterior (3.59), (3.60) e (3.61). Dessa forma, obtém-se a equação (3.69):

$$\begin{bmatrix} i_x \\ i_y \\ i_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & C_{xy} & 0 \\ -C_{xy} \cdot \cos \psi & 0 & \sin \psi \\ C_{xy} \cdot \sin \psi & 0 & \cos \psi \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_x \\ I_y \\ I_z \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

Assim, a matriz de rotação para elementos verticais é a seguinte

$$[\bar{R}] = \begin{bmatrix} 0 & C_{xy} & 0 \\ -C_{xy} \cdot \cos \psi & 0 & \sin \psi \\ C_{xy} \cdot \sin \psi & 0 & \cos \psi \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

3.7. MATRIZ DA RIGIDEZ GLOBAL

A matriz de rigidez global reúne todas as matrizes locais para análise da estrutura. A partir das matrizes locais é necessário aplicar a matriz de rotação para que seja possível montar a matriz de rigidez global.

De forma compacta, isso pode ser escrito como:

$$\{u_L\} = [R] \cdot \{u_G\} \quad (3.71)$$

sendo $[R]$ a matriz de rotação do elemento do sistema global para o local, $\{u_G\}$ vetor de deslocamentos nodais do elemento no sistema global, $\{u_L\}$ vetor de deslocamentos nodais do elemento no sistema local.

Para a obtenção da matriz local rotacionada, faz-se o seguinte procedimento:

$$[K_L] \cdot \{u_L\} = [K_L] \cdot [R] \cdot \{u_G\}$$

$$[R]^T \cdot [K_L] \cdot \{u_L\} = [R]^T \cdot [K_L] \cdot [R] \cdot \{u_G\}$$

$$[R]^T \cdot \{F_L\} = [R]^T \cdot [K_L] \cdot [R] \cdot \{u_G\}$$

$$\{F_G\} = [R]^T \cdot [K_L] \cdot [R] \cdot \{u_G\} \quad (3.72)$$

em que $\{F_L\}$ e $\{F_G\}$ são os vetores de forças nodais do elemento nos sistemas local e global, respectivamente, e $[K_L]$ é a matriz de rigidez do elemento no sistema local.

Sabendo que o sistema de equações no sistema de coordenadas global deve ser $\{F_G\} = [K_{LG}] \cdot \{u_G\}$, sendo $[K_{LG}]$ a matriz de rigidez local escrita em relação ao sistema de coordenadas global, conclui-se a partir da Equação (3.72) que:

$$[K_{LG}] = [R]^T \cdot [K_L] \cdot [R] \quad (3.73)$$

Após os cálculos das matrizes locais, devem ser realizadas as contribuições de cada elemento na matriz global. Dessa forma, é feita uma correlação entre as coordenadas locais e globais para se ter a garantia de satisfação das condições de compatibilidade internas.

Para a contribuição da matriz local para a global, segundo Martha (2018), cada barra da estrutura tem sua própria matriz de rigidez local $[K_{LG}]$, e os valores dessa matriz afetam apenas os termos da matriz de rigidez global $[K]$ que correspondem às posições dos seus dois extremos: o nó inicial e o nó final. Na Figura 10, o sistema de coordenadas locais de cada elemento está representado de forma isolada, com seus nós inicial e final possuindo três graus de liberdade independentes. Já no sistema de coordenadas globais, há uma interligação entre os graus de liberdade dos diferentes elementos, evidenciando a continuidade estrutural do pórtico. Com essa organização os coeficientes da matriz de rigidez local são realocados para a matriz global por meio de um vetor de espalhamento. Esse vetor depende da numeração das coordenadas generalizadas globais, a qual é arbitrária e definida conforme a convenção adotada no modelo. Nos pórticos planos, esse vetor de espalhamento é calculado da seguinte forma:

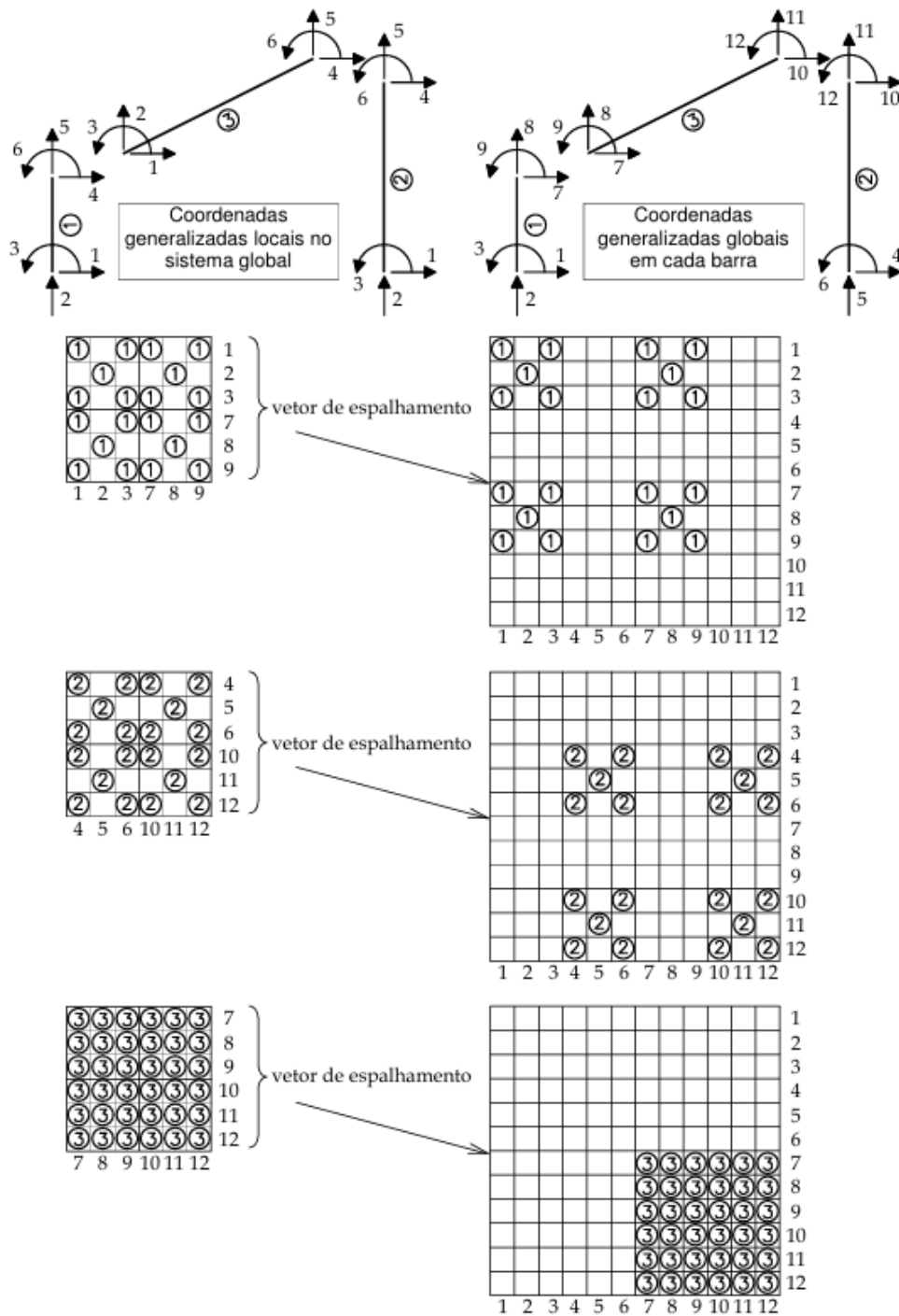
$$\{e\}^T = \{3i - 2, 3i - 1, 3i, 3j - 2, 3j - 1, 3j\} \quad (3.74)$$

Nos pórticos espaciais (tridimensionais), o princípio permanece o mesmo, porém cada nó possui seis graus de liberdade. Dessa forma, cada elemento possui 12 graus de liberdade, sendo 6 no nó inicial e 6 no nó final. Assim, o vetor de espalhamento para um elemento que conecta os nós i e j é definido por:

$$\{e\}^T = \{6i - 5, 6i - 4, 6i - 3, 6i - 2, 6i - 1, 6i, 6j - 5, 6j - 4, 6j - 3, 6j - 2, 6j - 1, 6j\} \quad (3.75)$$

Essa fórmula garante o mapeamento correto dos graus de liberdade locais do elemento para as posições correspondentes na matriz de rigidez global, respeitando a ordem da numeração global dos nós.

Figura 10 – Distribuição das contribuições das matrizes de rigidez locais na formação da matriz de rigidez global no exemplo com três barras



Fonte: Martha (2018)

No programa computacional, para automatizar esse processo, a regra de correspondência associa cada grau de liberdade local ao respectivo grau de liberdade global. Isso é feito com base no número dos nós e na posição do grau de liberdade no nó. As equações a seguir expressam esse mapeamento:

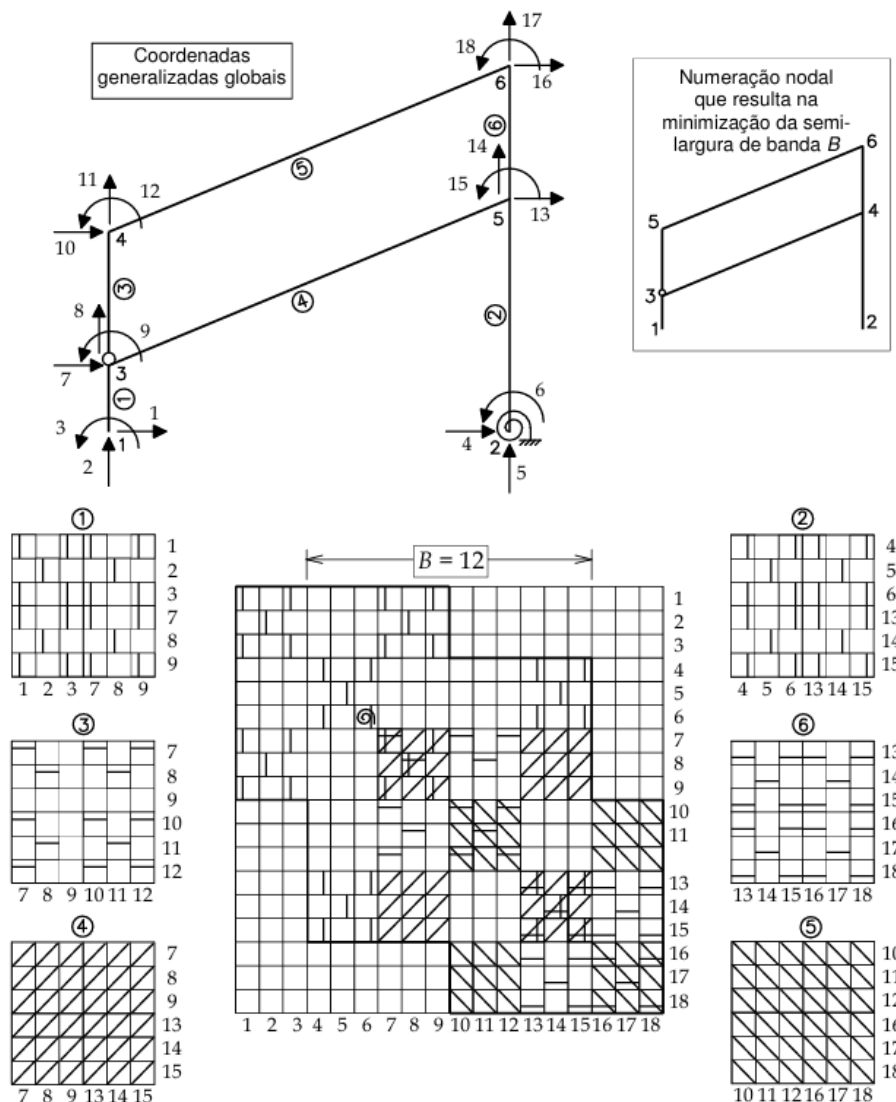
$$p = 6 \cdot (i - 1) + m \tag{3.76}$$

$$q = 6 \cdot (j - 1) + n \tag{3.77}$$

onde p e q são os índices globais na matriz de rigidez global $[K]$, representando a posição da linha e da coluna, respectivamente, i e j são os índices globais dos nós do elemento, e m e n são os graus de liberdade locais dos nós i e j , respectivamente.

Assim a Figura 11 exemplifica a construção da matriz global para um pórtico bidimensional, sendo que para o tridimensional a lógica é a mesma. A utilização de símbolos distintos para os coeficientes de rigidez locais permite identificar claramente em quais posições da matriz de rigidez global cada coeficiente atua. Isso também facilita a visualização das regiões onde há sobreposição das contribuições das diferentes barras.

Figura 11– Montagem da matriz de rigidez global para um pórtico



Fonte: Martha (2018)

Essa contribuição pode ser exemplificada ao observar o momento fletor associado ao grau de liberdade 12, no nó 4. Esse momento está presente tanto no elemento 3 quanto no elemento 5. Dessa forma, o vetor de espalhamento organiza corretamente as contribuições desses elementos na matriz de rigidez global, alocando os termos nas posições correspondentes utilizando os dados dos nós inicial e final de acordo com a equação (3.74) para pórticos bidimensionais e (3.75) para pórticos tridimensionais. Nessa etapa, podem ocorrer sobreposições de contribuições, como no caso da linha 12, coluna 12, em que diferentes elementos influenciam a mesma posição da matriz. Essa lógica se repete para os demais elementos, considerando os graus de liberdade de seus respectivos nós, resultando na montagem completa da matriz de rigidez global tanto elástica quanto a geométrica.

Em seguida, aplicam-se as condições de contorno utilizando a técnica dos zeros e um, que consiste em zerar as linhas e colunas correspondentes aos graus de liberdade restritos, deixando apenas o valor 1 na diagonal principal dessas posições. Além disso, a linha correspondente no vetor de forças $[F]$ é zerada.

Com essas condições de contorno incorporadas, o sistema $[K_E] \cdot \{u\} = [F]$, neste trabalho, foi solucionado pelo método de Gauss, possibilitando a obtenção do vetor de deslocamentos $\{u\}$.

3.8. AUTOVETOR E AUTOVALOR

Após a determinação dos deslocamentos utilizando apenas a matriz de rigidez elástica, procede-se ao cálculo dos autovalores e autovetores da matriz de rigidez total da estrutura, composta pela contribuição elástica e geométrica ($[K] = [K_E] + \lambda \cdot [K_G]$). Os autovalores obtidos correspondem às cargas críticas, enquanto os autovetores associados representam os modos de instabilidade da estrutura.

Segundo o Teorema de Lagrange-Dirichlet, um sistema estrutural é considerado estável se, e somente se, a segunda variação da energia potencial total for positiva:

$$\delta V^2 > 0 \quad \forall \quad \delta q \neq 0$$

Em termos práticos, essa condição implica que todos os autovalores da matriz de rigidez global do sistema devem ser positivos. Quando isso ocorre, a estrutura encontra-se em um estado de equilíbrio estável. Por outro lado, caso algum autovalor seja negativo o sistema é considerado instável. No limite da estabilidade, o menor autovalor tende a zero, indicando a iminência da perda de estabilidade.

Considerando que uma matriz de rigidez é simétrica, ela pode ser diagonalizada. O determinante da matriz $[K]$ pode então ser expresso como o produto de seus autovalores:

$$\det[K] = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \dots \lambda_n \quad (3.78)$$

em que representam os autovalores associados a $[K]$.

No limite da estabilidade estrutural, tem-se que:

$$\det[K] = \det([K_E] + \lambda[K_G]) = 0 \quad (3.79)$$

sendo $[K_E]$ a matriz de rigidez elástica, $[K_G]$ a matriz de rigidez geométrica e λ um fator de carga escalar.

Essa formulação conduz ao seguinte problema generalizado de autovalor:

$$([K_E] + \lambda[K_G]) \cdot \{y\} = \{0\} \quad (3.80)$$

no qual:

λ - Corresponde aos fatores de carga crítica (autovalores), que representam os multiplicadores escalares associados à carga aplicada e definem o ponto em que a estrutura perde estabilidade;

$\{y\}$ - Representa os modos críticos de instabilidade (autovetores), ou seja, os deslocamentos relativos assumidos pela estrutura no momento do colapso por flambagem.

O problema generalizado de autovalor descrito pela Equação (3.80) foi resolvido no presente trabalho por meio de uma rotina numérica proveniente da biblioteca Intel Math Kernel Library (Intel MKL). Para fins de interpretação e visualização dos modos de instabilidade obtidos, utilizou-se o software ParaView, que permitiu representar graficamente os deslocamentos associados aos autovetores.

4. PROGRAMA COMPUTACIONAL

4.1. CONSIDERAÇÕES GERAIS

O programa desenvolvido foi escrito na linguagem Fortran com o objetivo de automatizar os cálculos estruturais com base no critério energético apresentado no Capítulo 03. A formulação teórica foi interpretada e adaptada para permitir sua implementação computacional, viabilizando a análise numérica de estruturas a partir da leitura de dados inseridos em um arquivo no formato “.txt”, o qual deve seguir a configuração apresentada no Anexo A, sendo exemplificado na Figura 12. Para garantir a coerência dos resultados, é essencial que todas as informações de entrada estejam expressas na mesma unidade de medida considerada pelo usuário.

Figura 12 – Configuração do arquivo de entrada em .txt

```

Número de nós (n):
5
Coordenadas dos nós:
Nó          x          y          z
1           0.0        0.0        0.0
2           0.0        3.0        0.0
3           3.0        3.0        0.0
4           6.0        3.0        0.0
5           9.0        0.0        3.0
-----
Número de elementos de barras:
4
Vinculação das barras:
Elemento     nó i     nó j
1            1        2
2            2        3
3            3        4
4            4        5
-----
Quantidade de materiais:
1
Características dos materiais:
Material     E          v
1           200.0E+6  0.25

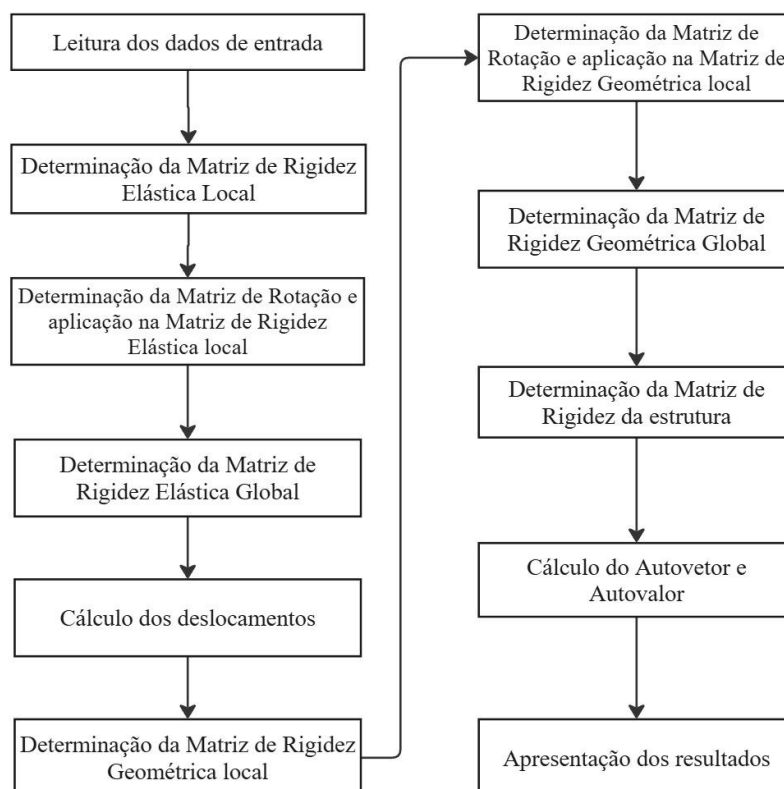
```

Uma vez carregados os dados da estrutura, o programa realiza inicialmente o cálculo dos deslocamentos nodais. Em seguida, são determinadas a carga crítica e o respectivo modo de instabilidade. Os resultados de deslocamentos são apresentados em uma janela do próprio ambiente do programa, indicando as translações (D_x , D_y , D_z) e rotações (R_x , R_y , R_z) para cada nó, com as unidades correspondentes aos dados de entrada. O valor do fator de carga crítica também é exibido nessa mesma interface. Já a visualização dos modos de instabilidade é obtida a partir de um arquivo de saída em formato *.vtk*, gerado automaticamente pelo programa, o qual deve ser inserido no software ParaView para a análise gráfica correspondente ao fator de carga crítica do pórtico tridimensional.

4.2. LÓGICA DO FUNCIONAMENTO DO PROGRAMA

O cálculo dos deslocamentos nodais, fator de carga crítica e modos de instabilidade para a análise linear de estabilidade, no programa, segue o fluxo esquematizado apresentado na Figura 13, que ilustra a sequência de etapas executadas pelo algoritmo para a obtenção dos resultados.

Figura 13 – Funcionamento do programa computacional



Fonte: Autor

A estrutura do código foi organizada em uma rotina principal, módulos e sub-rotinas. A rotina principal é responsável por acionar os módulos na ordem correta dos cálculos. Foram utilizados quatro módulos: declaração de variáveis, entrada de dados, cálculos e saída dos resultados. Neles estão incluídas sub-rotinas que executam as seguintes etapas.

O programa inicia com a leitura do arquivo de entrada, que contém os dados necessários à análise estrutural, tais como coordenadas nodais, conectividade entre elementos, propriedades geométricas e mecânicas e condições de apoio. Em seguida, é realizado o cálculo da matriz de rigidez elástica local de cada elemento, definida no sistema de coordenadas do próprio elemento. Posteriormente, essa matriz é transformada para o sistema global por meio de uma matriz de rotação, originando a matriz de rigidez local rotacionada. Com todas as matrizes transformadas, procede-se à montagem da matriz de rigidez elástica global.

Um procedimento semelhante é aplicado à matriz de rigidez geométrica, que é inicialmente obtida em coordenadas locais, transformada para o sistema global com a matriz de rotação e, por fim, montada a matriz global da estrutura. Após essa etapa, são aplicadas as condições de contorno, de acordo com os apoios e restrições definidos no modelo. Por último, é executada a rotina responsável pelo cálculo dos autovalores e autovetores, a partir da qual são determinados os fatores de carga crítica e o modo de instabilidade do pórtico tridimensional.

4.3. SOFTWARE MASTAN2 USADO PARA A VALIDAÇÃO DOS RESULTADOS DO PROGRAMA DESENVOLVIDO.

O MASTAN2 é um programa computacional gratuito, com interface gráfica interativa, desenvolvido para a análise estrutural de pórticos e treliças em duas e três dimensões. O *software* permite a realização de análises lineares e não lineares de estabilidade, possibilitando a determinação da carga crítica elástica e inelástica, dos deslocamentos nodais, entre outros parâmetros. Foi implementado em MATLAB pelos professores Ronald Ziemian (Bucknell University), William McGuire (Cornell University, emérito) e Siwer Liu (The Hong Kong Polytechnic University), tendo como base teórica as formulações apresentadas no livro *Matrix Structural Analysis* (McGuire; Gallagher; Ziemian, 2000).

Na análise linear, o MASTAN2 adota o Método da Rigidez Direta, que também é conhecido como Método dos Deslocamentos, consolidado na teoria da engenharia estrutural e amplamente utilizado em programas computacionais de estabilidade. Além de sua fundamentação teórica consistente, o *software* se destaca pelo caráter didático, oferecendo recursos de visualização gráfica que facilitam a interpretação de deformadas, diagramas de

esforços e deslocamentos. Embora não possua fins comerciais, trata-se de uma ferramenta que favorece a aplicação no ambiente acadêmico, sendo útil tanto para o ensino quanto para a validação de modelos estruturais.

A escolha do MASTAN2 como software de referência neste trabalho se deve à sua ampla aceitação na literatura. Pesquisadores como Balz (2019) e Michelini (2021), já utilizaram esse programa como base para validar ferramentas computacionais próprias de análise estrutural, especialmente em estudos voltados à determinação de cargas críticas e modos de instabilidade.

5. EXEMPLO DE VALIDAÇÃO

Neste capítulo são apresentados os exemplos de validação do programa desenvolvido, com o objetivo de verificar a confiabilidade dos resultados obtidos. Para essa verificação, foram comparados os deslocamentos nodais, os fatores de carga crítica e o modo de instabilidade calculados em pórticos tridimensionais, tendo como referência o programa MASTAN2.

Os exemplos possuem diferentes configurações estruturais, de modo a avaliar a capacidade do programa em reproduzir situações variadas de cálculo.

Cabe destacar que, no programa desenvolvido, para esses exemplos de validação, os resultados são fornecidos originalmente em metros (m) para deslocamentos e em radianos (rad) para rotações. Entretanto, para fins de clareza e melhor interpretação dos valores, nas tabelas deste trabalho optou-se por expressar os deslocamentos em milímetros (mm) $1 \cdot 10^{-3}$ m, e as rotações em miliradianos (mrad), correspondendo a $1 \cdot 10^{-3}$ rad. Essa conversão foi realizada com o objetivo de evitar a notação científica com números muito pequenos, o que poderia tornar a leitura das tabelas excessivamente poluída e de difícil comparação entre resultados.

5.1. EXEMPLO 1

Para o Exemplo 1, a Figura 14 consiste em um pórtico tridimensional submetido a um esforço na direção y. A estrutura combina elementos nas diagonais e apoios de segundo gênero.

Para a estrutura, foram determinados os deslocamentos nodais, os fatores de carga crítica e os modos de instabilidade, considerando que as seções não estão rotacionadas.

Dados:

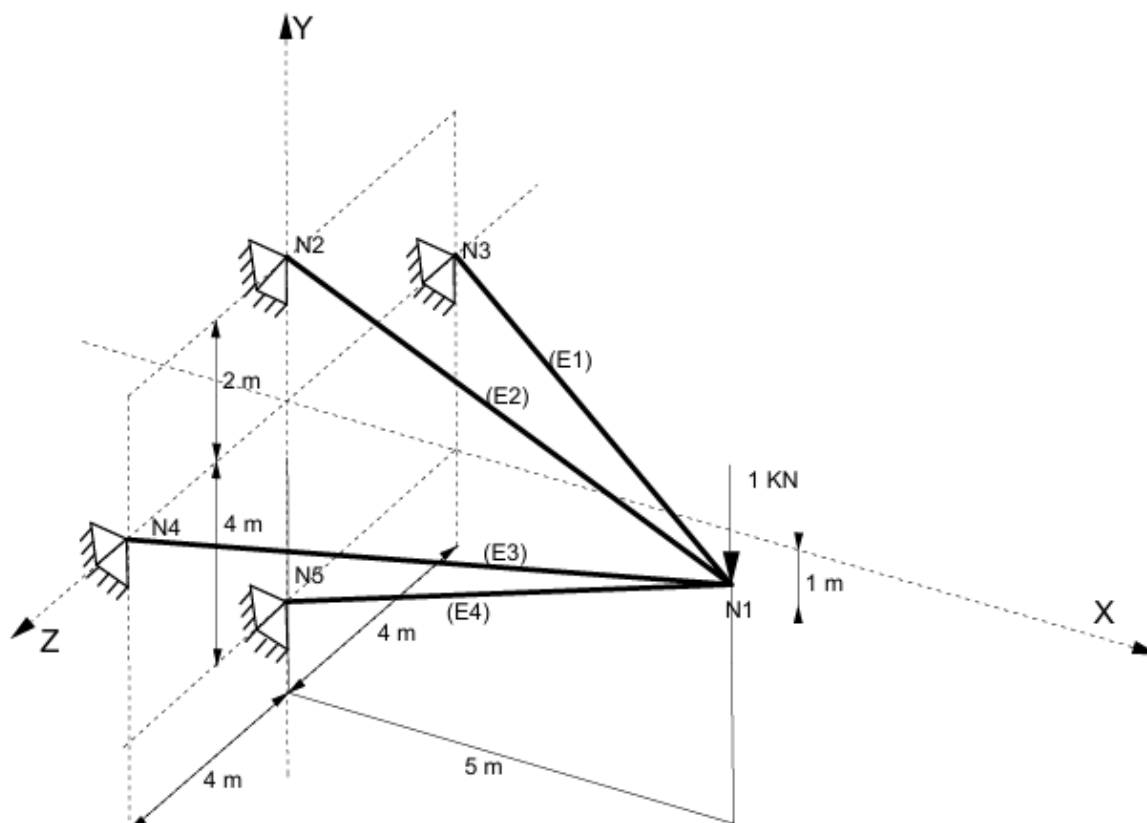
$$E_1 = E_2 = 200 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2, \quad A_1 = 0,002 \text{ m}^2, \quad A_2 = 0,0002 \text{ m}^2, \quad I_{x1} = 6 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4, \\ I_{x2} = 3 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4, \quad I_{y1} = 3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4, \quad I_{y2} = 3 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4, \quad I_{z1} = 3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4, \quad I_{z2} = 3 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4 \text{ e } \nu = 0,3.$$

Tabela 1 - Aplicação dos materiais e seções nos elementos do Exemplo 01

Elemento	Seção	Material
1	1	1
2	1	1
3	1	1
4	2	2

Fonte: Autor

Figura 14 - Pórtico para o Exemplo 1 de validação



Fonte: Autor

Tabela 2 – Deslocamentos nodais fornecidos pelo programa desenvolvido para o Exemplo 1

Nó	Dx (mm)	Dy (mm)	Dz (mm)	Rx (mrad)	Ry (mrad)	Rz (mrad)
1	-0,035	-0,108	0,000	0,000	0,000	-0,020
2	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	-0,018
3	0,000	0,000	0,000	0,001	-0,002	-0,022
4	0,000	0,000	0,000	-0,001	0,002	-0,022
5	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	-0,009

Fonte: Autor

Os resultados fornecidos pelo programa MASTAN2 estão apresentados na Tabela 2.

Tabela 3 – Deslocamentos nodais fornecidos pelo MASTAN2 para o Exemplo 1

Nó	Dx (mm)	Dy (mm)	Dz (mm)	Rx (mrad)	Ry (mrad)	Rz (mrad)
1	-0,035	-0,108	0,000	0,000	0,000	-0,020
2	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	-0,018
3	0,000	0,000	0,000	0,001	-0,002	-0,022
4	0,000	0,000	0,000	-0,001	0,002	-0,022
5	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	-0,009

Fonte: MASTAN2

Os deslocamentos nodais obtidos com o programa desenvolvido coincidem exatamente com aqueles apresentados pelo programa MASTAN2, conforme mostrado nas Tabelas 2 e 3, mesmo o programa MASTAN2 utilizando o Método dos Deslocamentos e o programa desenvolvido empregar o Método Energético. Essa equivalência entre os resultados confirma a correta formulação matemática e a adequada implementação computacional do método empregado no desenvolvimento do programa.

Além disso, a repetição dos valores nulos nas translações dos nós 2, 3, 4 e 5 demonstra que as condições de contorno foram corretamente aplicadas, e que o sistema reagiu conforme esperado às restrições impostas. Alguns deslocamentos tiveram o valor nulo por serem pequenos.

Portanto, os resultados obtidos permitem concluir, para esse exemplo, que o programa desenvolvido é confiável para o cálculo dos deslocamentos, reproduzindo com precisão os resultados.

Já os fatores de carga crítica do programa MASTAN2 e do programa desenvolvido estão na Tabela 4 com as respectivas porcentagens de divergência.

Tabela 4 – Comparação dos fatores de carga crítica do Exemplo 1

Fator de Carga Crítica	01	02	03	04
MASTAN2	82,1	87,4	243,4	507,7
Programa Próprio	82,1	87,4	243,4	507,7
Diferença (%)	0,0	0,0	0,0	0,0

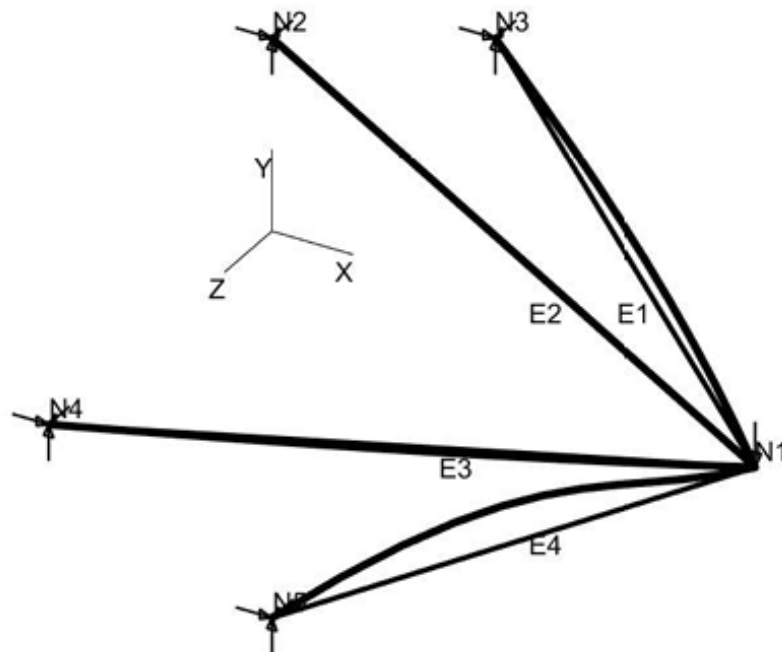
Fonte: Autor

Os fatores de carga crítica apresentados na Tabela 4 não apresentaram valores discrepantes entre os resultados obtidos no MASTAN2 e no programa desenvolvido neste trabalho. Isso mostra que mesmo com métodos diferentes, para esse exemplo, os resultados dos fatores de carga crítica não tiveram diferenças.

Conjuntamente com o fator de carga crítica é calculado o modo de instabilidade. O primeiro modo de instabilidade está representado nas Figuras 15 e 16, sendo extraídos do software MASTAN2 e do programa desenvolvido, respectivamente. Para a visualização do modo obtido no programa desenvolvido, foi utilizado *software* Paraview. Esse modo de instabilidade correspondente ao menor fator de carga crítica e evidenciou, nas duas plotagens, uma flambagem global da estrutura, com deslocamentos concentrados no nó 1.

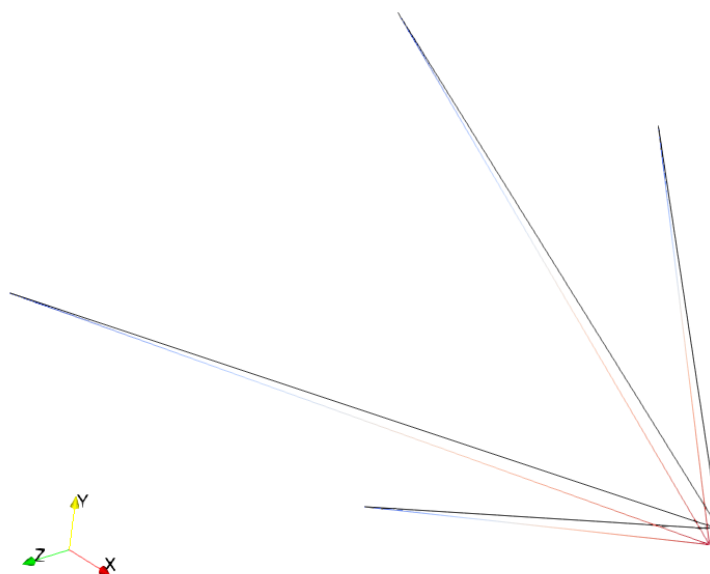
Figura 15 – Modo de instabilidade no programa MASTAN2 correspondente ao menor fator de carga crítica do Exemplo 1

Deflected Shape: Elastic Critical Load, Mode # 1, Applied Load Ratio = 82.1263



Fonte: MASTAN2

Figura 16 – Modo de instabilidade obtido no programa desenvolvido correspondente ao menor fator de carga crítica do Exemplo 1



Fonte: Autor

5.2. EXEMPLO 2

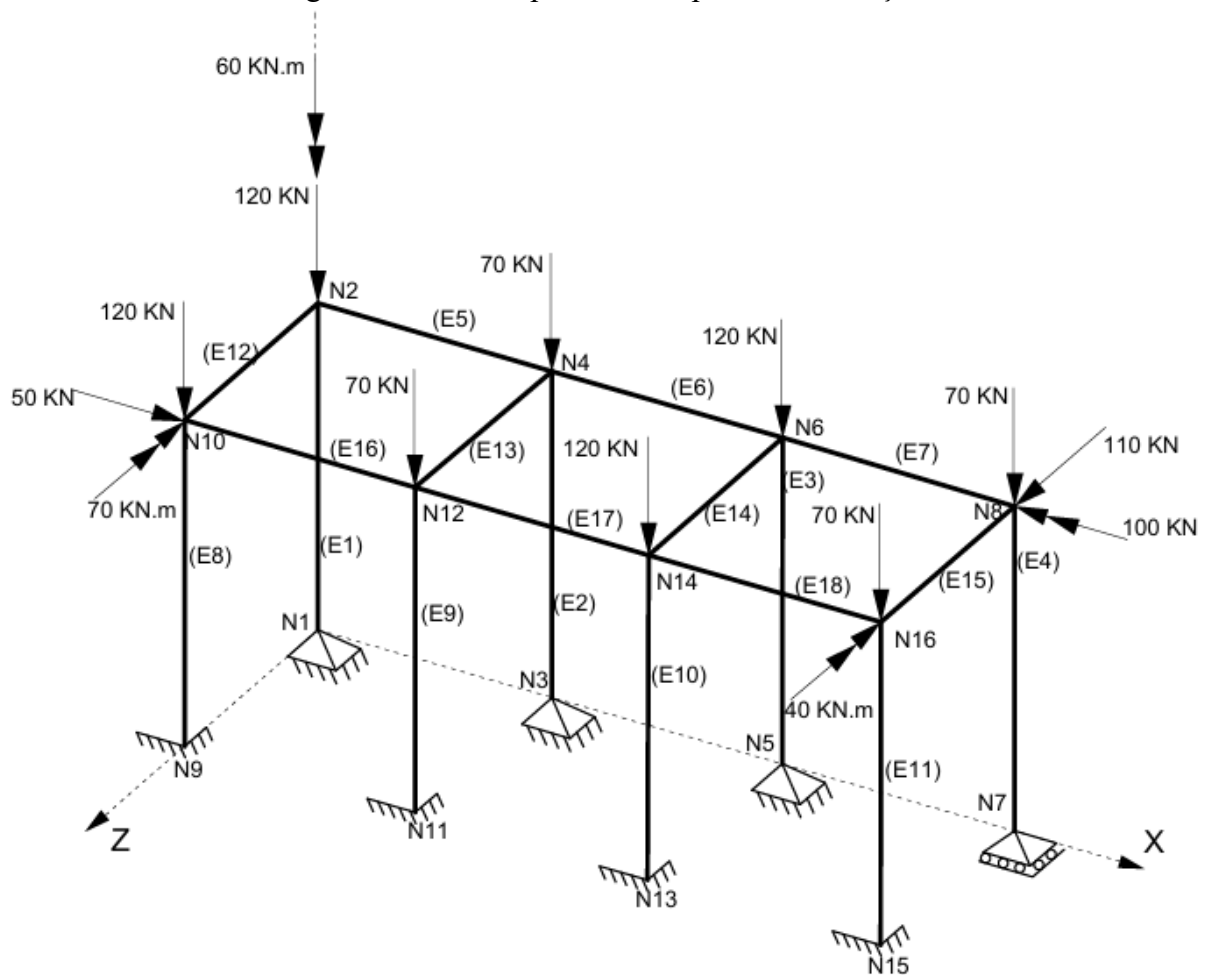
Neste exemplo, analisa-se um pórtico tridimensional de maior porte (Figura 17), com configuração semelhante a um galpão, submetido a esforços aplicados nas direções x, y e z. Os elementos estruturais foram considerados como perfis W 360 × 64, cujas propriedades foram obtidas no catálogo da Gerdau (Gerdau,2018). A estrutura é composta por barras verticais de 7 m e barras horizontais de 5 m, vinculadas por apoios de terceiro, segundo e primeiro gênero, o que permite avaliar o desempenho do programa em diferentes dimensões estruturais.

Foram calculados os deslocamentos dos nós, os fatores de carga crítica e os modos de instabilidade, mantendo as seções sem rotação.

Dados:

$E = 200 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2$, $A = 0,00817 \text{ m}^2$, $I_x = 1,789 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$, $I_y = 1,885 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$, $I_z = 4,457 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4$ e $\nu = 0,3$.

Figura 17 - Pórtico para o Exemplo 2 de validação



Fonte: Autor

Tabela 5 – Deslocamentos nodais fornecidos pelo programa desenvolvido para o Exemplo 2

Nó	Dx (mm)	Dy (mm)	Dz (mm)	Rx (mrad)	Ry (mrad)	Rz (mrad)
1	0,000	0,000	0,000	9,519	-47,323	-840,270
2	5460,300	-0,448	47,429	1,289	-47,323	-659,580
3	0,000	0,000	0,000	45,349	-33,200	-1153,200
4	5460,300	-0,322	208,120	-1,502	-33,200	-33,743
5	0,000	0,000	0,000	96,906	-44,987	-981,730
6	5460,400	-0,634	400,770	-22,053	-44,987	-376,700
7	-1716,100	-5860,000	984,020	0,000	-48,443	-1025,200
8	5460,400	-5860,000	673,040	-88,851	-48,443	-1025,200
9	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
10	5276,100	-0,452	47,478	30,636	-24,223	-675,440
11	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
12	5276,000	-0,333	208,100	47,462	-31,091	-38,557
13	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
14	5275,900	-0,429	400,780	67,745	-38,074	-358,800
15	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
16	5275,800	-0,639	672,780	75,302	-35,337	-1011,100

Fonte: Autor

Os resultados fornecidos pelo programa MASTAN2 estão apresentados na Tabela 6.

Tabela 6 – Deslocamentos nodais fornecidos pelo MASTAN2 do Exemplo 2

Nó	Dx (mm)	Dy (mm)	Dz (mm)	Rx (mrad)	Ry (mrad)	Rz (mrad)
1	0,000	0,000	0,000	9,519	-47,323	-840,270
2	5460,300	-0,448	47,429	1,289	-47,323	-659,580
3	0,000	0,000	0,000	45,349	-33,200	-1153,200
4	5460,300	-0,322	208,120	-1,502	-33,200	-33,743
5	0,000	0,000	0,000	96,906	-44,987	-981,730
6	5460,400	-0,634	400,770	-22,053	-44,987	-376,700
7	-1716,100	-5860,000	984,020	0,000	-48,443	-1025,200
8	5460,400	-5860,000	673,040	-88,851	-48,443	-1025,200
9	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
10	5276,100	-0,452	47,478	30,636	-24,223	-675,440
11	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
12	5276,000	-0,333	208,100	47,462	-31,091	-38,557
13	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
14	5275,900	-0,429	400,780	67,745	-38,074	-358,800
15	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
16	5275,800	-0,639	672,780	75,302	-35,337	-1011,100

Fonte: MASTAN2

Os deslocamentos nodais obtidos pelo programa desenvolvido coincidem exatamente com aqueles fornecidos pelo MASTAN2, conforme mostrado nas Tabelas 5 e 6. Os nós 9, 11, 13 e 15, que possuem restrições impostas pelos apoios de terceiro gênero (engaste), apresentaram deslocamentos nulos, confirmando a correta aplicação das condições de contorno. Os nós 1, 3 e 5, por sua vez, apresenta deslocamentos translacionais nulos e apenas rotações, o que é compatível com o apoio de segundo gênero, comportamento igualmente reproduzido nos dois programas. O nó 7, por ser um apoio de primeiro gênero possui todas as translações e rotações com exceção na direção z. Nos nós livres 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 e 16, os deslocamentos calculados foram idênticos nos dois conjuntos de resultados, refletindo a resposta da estrutura às cargas aplicadas. Esse resultado evidencia o correto cálculo do programa desenvolvido para o cálculo dos deslocamentos.

Já os fatores de carga crítica do programa MASTAN2 e do programa desenvolvido estão na Tabela 7 com as respectivas porcentagens de divergência.

Tabela 7 – Comparação dos resultados dos fatores de carga crítica do Exemplo 2

Fator Carga Crítica	01	02	03	04
MASTAN2	0,098	0,330	0,421	0,546
Programa Próprio	0,098	0,330	0,421	0,632
Diferença (%)	0,0	0,0	0,0	15,6

Fonte: Autor

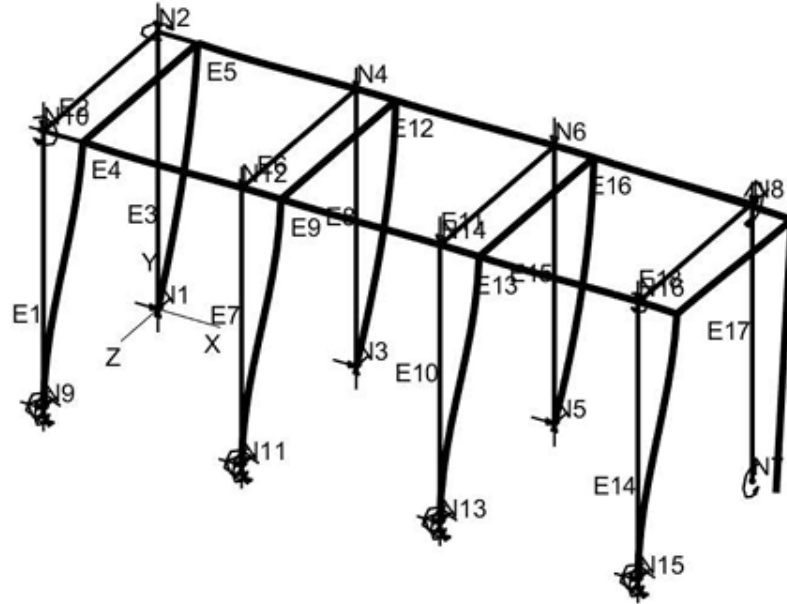
Os primeiros fatores de carga crítica não apresentaram diferenças numéricas significativas, sendo a divergência observada apenas a partir do quarto fator de carga crítica. Esse comportamento era esperado, uma vez que os programas utilizam métodos distintos de cálculo, além das considerações de variáveis adicionais empregadas pelo MASTAN2 que não são contempladas pelo programa desenvolvido neste trabalho. No entanto, como o menor fator de carga crítica, correspondente ao primeiro modo de instabilidade, é o que efetivamente define a análise, a coincidência dos resultados nesse modo confirma a equivalência e a confiabilidade entre os métodos comparados.

O modo de instabilidade associado ao menor fator de carga crítica está apresentado nas Figura 18 e Figura 19. Este modo evidenciou deslocamentos predominantes nos nós 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 e 16, correspondendo à região mais suscetível à perda de estabilidade. Os apoios nos nós 9, 11, 13 e 15 permaneceram restritos, enquanto os nós 1, 3 e 5 apresentaram apenas rotações, em conformidade com o vínculo de segundo gênero. O nó 7, por sua vez, acompanhou

o movimento global da estrutura reforçando o papel de restrição do apoio de primeiro gênero. Essa configuração é identificada nos dois programas como mostra as duas figuras seguintes.

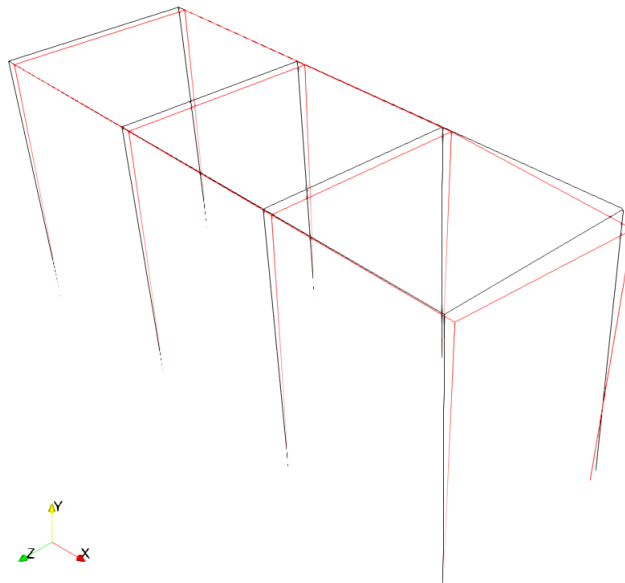
Figura 18 – Modo de instabilidade no programa MASTAN2 associado ao menor fator de carga crítica do Exemplo 2

Deflected Shape: Elastic Critical Load, Mode # 1, Applied Load Ratio = 0.097812



Fonte: MASTAN2

Figura 19 – Modo de instabilidade do programa desenvolvido associado ao menor fator de carga crítica do Exemplo 2



Fonte: Autor

5.3. EXEMPLO 3

Trata-se de um pórtico tridimensional (Figura 20), semelhante a galpão, com um telhado inclinado e esforços atuando nas direções x , y e z . A estrutura possui elementos verticais e horizontais, apoios de terceiro gênero e variação no material e nas seções, permitindo testar o programa frente a mudanças de material e geometria.

Todos os elementos foram considerados com perfil W360 X 64 e perfil W360 X 72, cujos dados foram retirados do catálogo da Gerdau (Gerdau, 2018). Na configuração adotada, os elementos E8, E9, E10 e E11 possuem comprimento de 9 m, enquanto os elementos E1, E2, E3 e E4 têm 7 m. As distâncias entre os nós nas direções dos eixos x e z são de 5 m, definindo a geometria espacial do modelo estrutural.

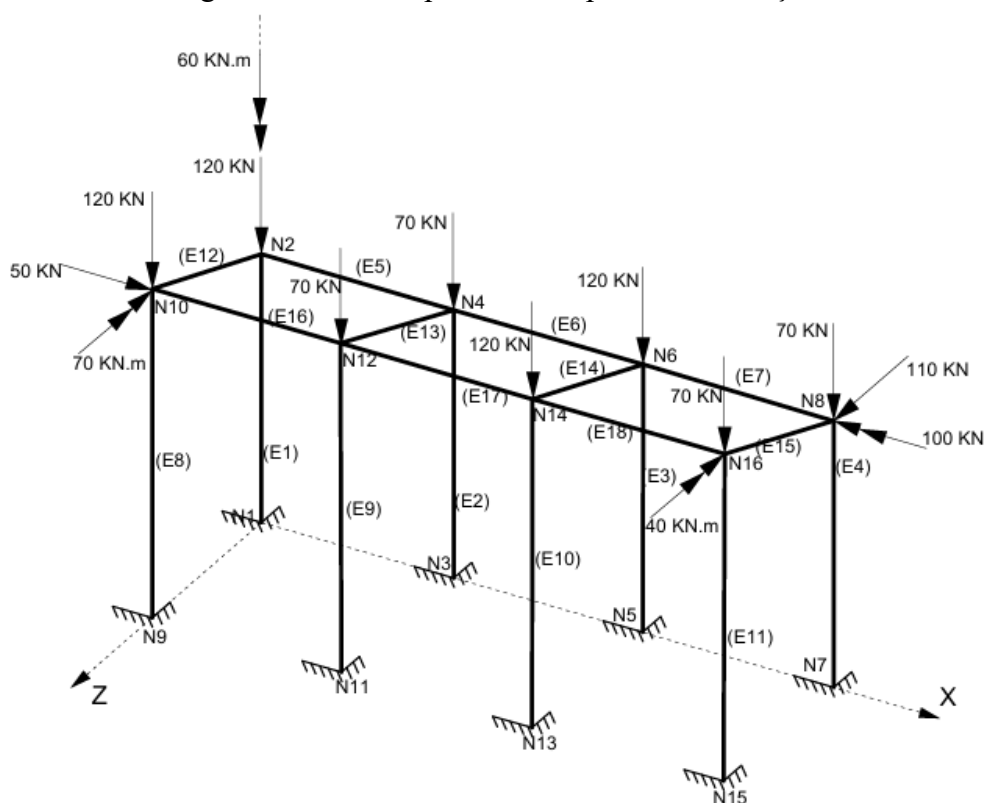
Foram determinados os deslocamentos nodais, os fatores de carga crítica e os modos de instabilidade, com seções não rotacionadas.

Dados:

$$E_1 = 200 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2, E_2 = 300 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2, A_1 = 0,00817 \text{ m}^2, A_2 = 0,00913 \text{ m}^2$$

$$I_{x1} = 1,789 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4, I_{x2} = 2,0169 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4, I_{y1} = 1,885 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4, I_{y2} = 2,14 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4, I_{z1} = 4,4557 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4, I_{z2} = 6,118 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4 \text{ e } \nu = 0,3.$$

Figura 20 - Pórtico para o Exemplo 3 de validação.



Fonte: Autor

Tabela 8 - Aplicação dos materiais e seções nos elementos do Exemplo 02

Elemento	Seção	Material
1	1	1
2	1	1
3	1	1
4	2	2
5	1	1
6	1	1
7	1	1
8	1	1
9	1	1
10	1	1
11	2	2
12	1	1
13	1	1
14	1	1
15	2	2

Fonte: Autor

Tabela 9 – Deslocamentos nodais fornecidos pelo programa desenvolvido para o Exemplo 3

Nó	Dx (mm)	Dy (mm)	Dz (mm)	Rx (mrad)	Ry (mrad)	Rz (mrad)
1	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	3112,600	-0,446	193,190	45,241	-32,581	-356,090
3	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
4	3112,600	-0,307	255,120	49,780	6,750	-205,680
5	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
6	3112,600	-0,486	274,460	52,186	-1,987	-221,680
7	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
8	3112,500	-0,233	389,120	51,219	-22,705	-343,530
9	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
10	3655,900	-0,614	193,280	36,983	-21,799	-372,670
11	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
12	3655,800	-0,410	255,160	41,319	5,028	-203,530
13	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
14	3655,700	-0,664	274,550	46,511	-1,817	-220,190
15	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
16	3655,700	-0,240	389,050	53,908	-23,833	-346,730

Fonte: Autor

Os resultados fornecidos pelo programa MASTAN2 estão apresentados na Tabela 10.

Tabela 10 – Deslocamentos nodais fornecidos pelo MASTAN2 do Exemplo 3

Nó	Dx (mm)	Dy (mm)	Dz (mm)	Rx (mrad)	Ry (mrad)	Rz (mrad)
1	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	3112,600	-0,446	193,190	45,241	-32,581	-356,090
3	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
4	3112,600	-0,307	255,120	49,780	6,750	-205,680
5	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
6	3112,600	-0,486	274,460	52,186	-1,987	-221,680
7	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
8	3112,500	-0,233	389,120	51,219	-22,705	-343,530
9	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
10	3655,900	-0,614	193,280	36,983	-21,799	-372,670
11	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
12	3655,800	-0,410	255,160	41,319	5,028	-203,530
13	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
14	3655,700	-0,664	274,550	46,511	-1,817	-220,190
15	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
16	3655,700	-0,240	389,050	53,908	-23,833	-346,730

Fonte: MASTAN2

No terceiro exemplo, que contempla variações de seção e material, verifica-se novamente a coincidência entre os resultados, como mostra a Tabela 9 e 10. Os nós 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 e 15, associado a apoio de terceiro gênero, manteve todos os deslocamentos nulos, confirmando a imposição correta das restrições. Já os nós livres 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 e 16 os deslocamentos calculados foram idênticos nos dois conjuntos de resultados, refletindo a resposta da estrutura às cargas aplicadas. Os valores calculados pelo programa desenvolvido foram idênticos aos do MASTAN2, evidenciando a correta aplicação teórica para o cálculo.

Já os fatores de carga crítica do programa MASTAN2 e do programa desenvolvido estão na Tabela 11 com as respectivas porcentagens de divergência.

Tabela 11 – Comparação dos resultados dos fatores de carga crítica do Exemplo 3

Fator Carga Crítica	01	02	03	04
MASTAN2	0,16	1,64	2,0	3,2
Programa Próprio	0,16	1,64	2,2	3,1
Diferença (%)	0,0	0,0	9,1	3,1

Fonte: Autor

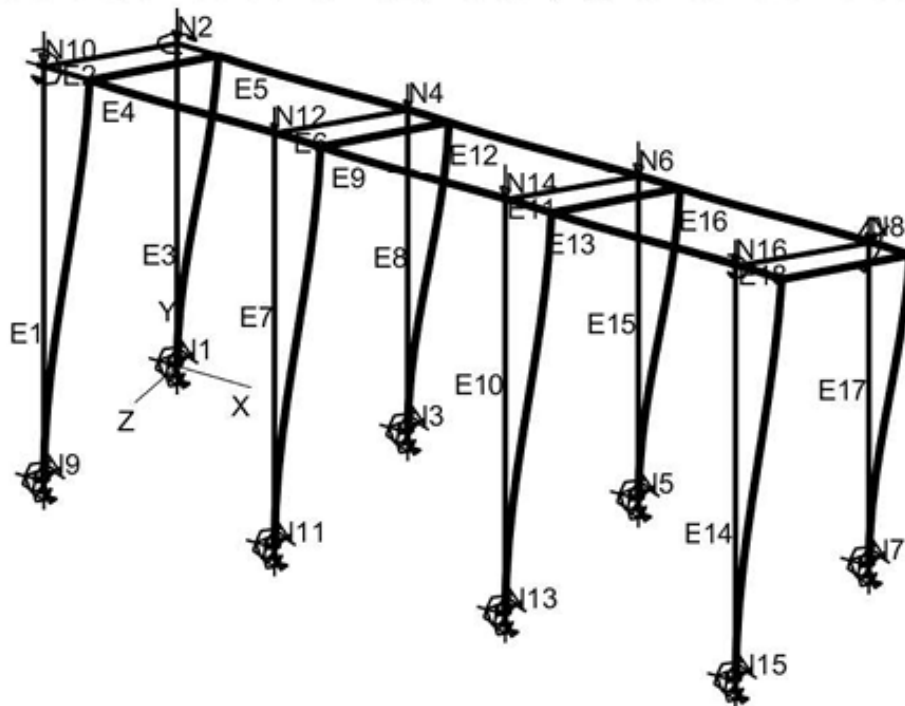
No terceiro exemplo, que contempla a variação dos módulos de elasticidade e das áreas de seção transversal, os fatores de carga crítica calculados não apresentam diferenças dos dois

primeiros resultados. O primeiro fator de carga crítica é o considerado para a análise de estabilidade e ele é igual nos dois programas.

O modo de instabilidade associado ao menor fator de carga crítica apresentados na Figura 21 e Figura 22 destacou deslocamentos acentuados nos 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 e 16, devido à maior flexibilidade dos elementos associados a essas regiões. Os nós 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 e 15, presos por apoio (engaste), manteve-se completamente estável. Esse comportamento modal foi reproduzido de forma idêntica pelo MASTAN2 e pelo programa desenvolvido nesse trabalho.

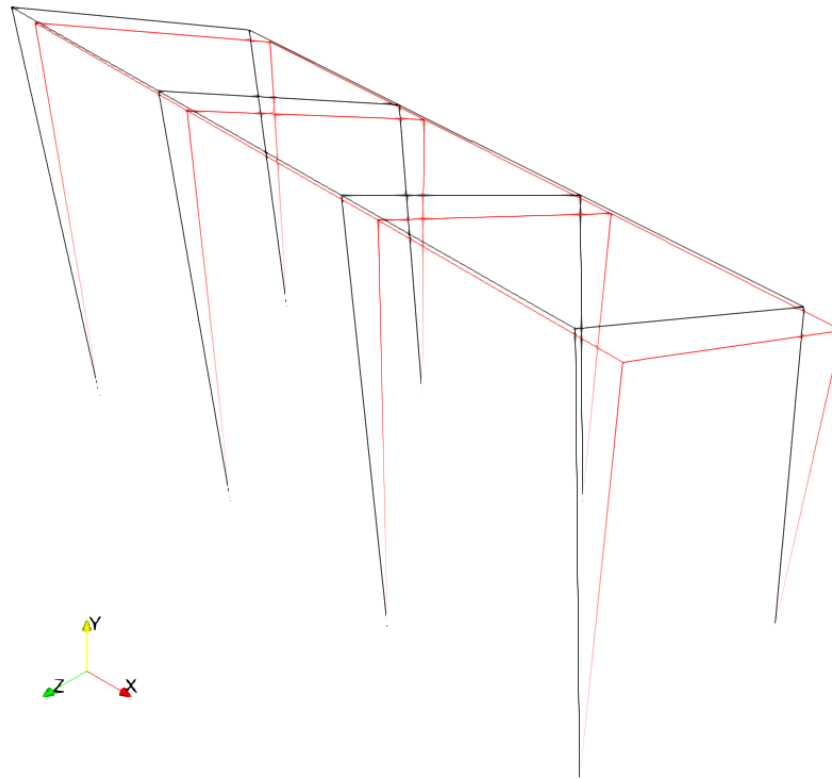
Figura 21 – Modo de instabilidade no programa MASTAN2 associado ao menor fator de carga crítica do Exemplo 3

Deflected Shape: Elastic Critical Load, Mode # 1, Applied Load Ratio = 0.16079



Fonte: MASTAN2

Figura 22 – Modo de instabilidade do programa desenvolvido associado ao menor fator carga crítica do Exemplo 3



Fonte: Autor

5.4. EXEMPLO 4

Este caso refere-se a um pórtico tridimensional de grande porte, com características semelhantes às de uma estrutura de edifício. A estrutura está submetida a esforços na direção x , apresentando elementos verticais com comprimentos distintos e apoios de primeiro, segundo e terceiro gêneros, permitindo analisar o comportamento do programa em diferentes condições de contorno.

Os elementos ligados aos apoios E1, E2, E3, E4, E5 e E6 possuem comprimento de 6 metros, enquanto os demais elementos têm 3 metros de comprimento. Todos os elementos foram considerados com perfil W410 X 38,8, cujos dados foram retirados do catálogo da Gerdau (Gerdau, 2018).

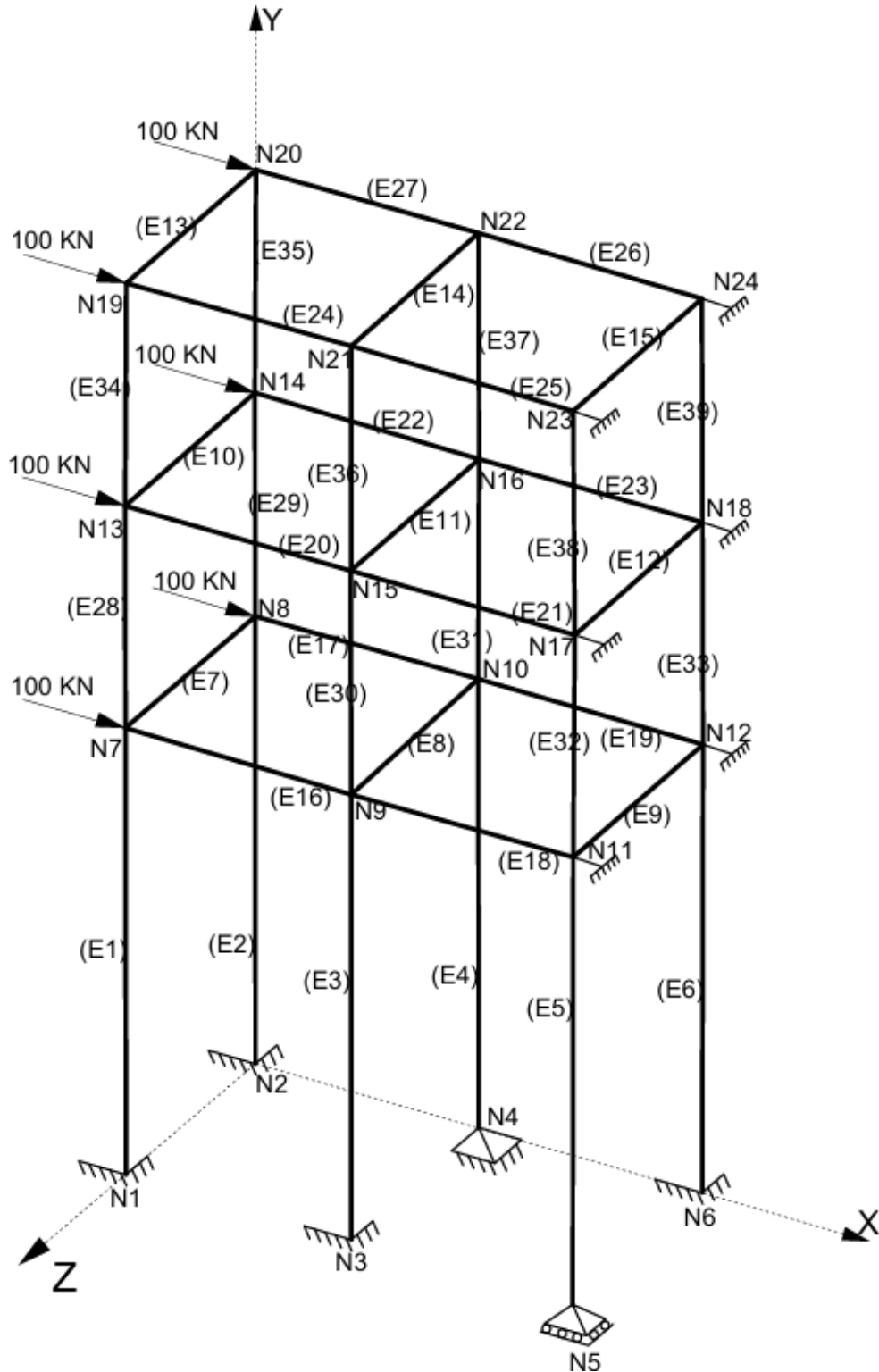
A Figura 23 apresenta o modelo adotado para o cálculo dos deslocamentos nodais, dos fatores de carga crítica e dos modos de instabilidade, desconsiderando a rotação das seções transversais.

Dados:

$$E = 200 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2, A = 0,00503 \text{ m}^2, I_x = 1,2777 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4, I_y = 4,04 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$I_z = 1,169 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4 \text{ e } \nu = 0,3$$

Figura 23 - Pórtico para o Exemplo 4 de validação.



Fonte: Autor

Tabela 12 – Deslocamentos nodais fornecidos pelo programa desenvolvido para o Exemplo 4

Nó	Dx (mm)	Dy (mm)	Dz (mm)	Rx (mrad)	Ry (mrad)	Rz (mrad)
1	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
3	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
4	0,000	0,000	0,000	-0,000	-0,001	-72,872
5	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
6	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
7	0,596	0,000	0,000	-0,000	-0,932	-30,153
8	0,596	0,000	0,000	-0,000	-0,886	-30,168
9	0,298	0,000	0,000	-0,000	-0,805	-4,088
10	0,298	0,000	0,000	-0,000	-1,105	-3,344
11	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
12	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
13	0,596	0,000	0,000	0,000	-0,521	5,279
14	0,596	0,000	0,000	0,000	-0,478	5,279
15	0,298	0,000	0,000	0,000	-0,441	-0,230
16	0,298	0,000	0,000	0,000	-0,578	-0,244
17	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
18	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
19	0,596	0,000	0,000	0,000	-0,381	-1,392
20	0,596	0,000	0,000	0,000	-0,344	-1,392
21	0,298	0,000	0,000	0,000	-0,335	0,270
22	0,298	0,000	0,000	0,000	-0,413	0,270
23	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
24	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Fonte: Autor

Os resultados fornecidos pelo programa MASTAN2 estão apresentados na Tabela 13. No quarto exemplo, observa-se, nas Tabelas 12 e 13, que os nós vinculados por apoios de terceiro gênero, apresentaram deslocamentos nulos, em perfeita concordância com as condições de contorno, a aplicação correta dessas condições se repete para os apoios de segundo e primeiro gênero. Essa repetição confirma que as restrições foram corretamente aplicadas pelo programa. Já os nós livres da estrutura, apresentaram deslocamentos e rotações idênticos nos dois programas. A coincidência dos resultados demonstra que, mesmo em estruturas de maior porte e maior número de elementos, o programa desenvolvido é capaz de reproduzir com precisão o comportamento previsto pelo MASTAN2.

Tabela 13 – Deslocamentos nodais fornecidos pelo MASTAN2 do Exemplo 4

Nó	Dx (mm)	Dy (mm)	Dz (mm)	Rx (mrad)	Ry (mrad)	Rz (mrad)
1	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
3	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
4	0,000	0,000	0,000	-0,000	-0,001	-72,872
5	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
6	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
7	0,596	0,000	0,000	-0,000	-0,932	-30,153
8	0,596	0,000	0,000	-0,000	-0,886	-30,168
9	0,298	0,000	0,000	-0,000	-0,805	-4,088
10	0,298	0,000	0,000	-0,000	-1,105	-3,344
11	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
12	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
13	0,596	0,000	0,000	0,000	-0,521	5,279
14	0,596	0,000	0,000	0,000	-0,478	5,279
15	0,298	0,000	0,000	0,000	-0,441	-0,230
16	0,298	0,000	0,000	0,000	-0,578	-0,244
17	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
18	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
19	0,596	0,000	0,000	0,000	-0,381	-1,392
20	0,596	0,000	0,000	0,000	-0,344	-1,392
21	0,298	0,000	0,000	0,000	-0,335	0,270
22	0,298	0,000	0,000	0,000	-0,413	0,270
23	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
24	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Fonte: MASTAN2

Já os fatores de carga crítica do programa MASTAN2 e do programa desenvolvido estão na Tabela 14 com as respectivas porcentagens de divergência.

Tabela 14 – Comparação dos resultados dos fatores de carga crítica do Exemplo 4

Fator Carga Crítica	01	02	03	04
MASTAN2	5,5	7,7	8,3	10,2
Programa Próprio	5,5	7,7	8,3	10,2
Diferença (%)	0,0	0,0	0,0	0,0

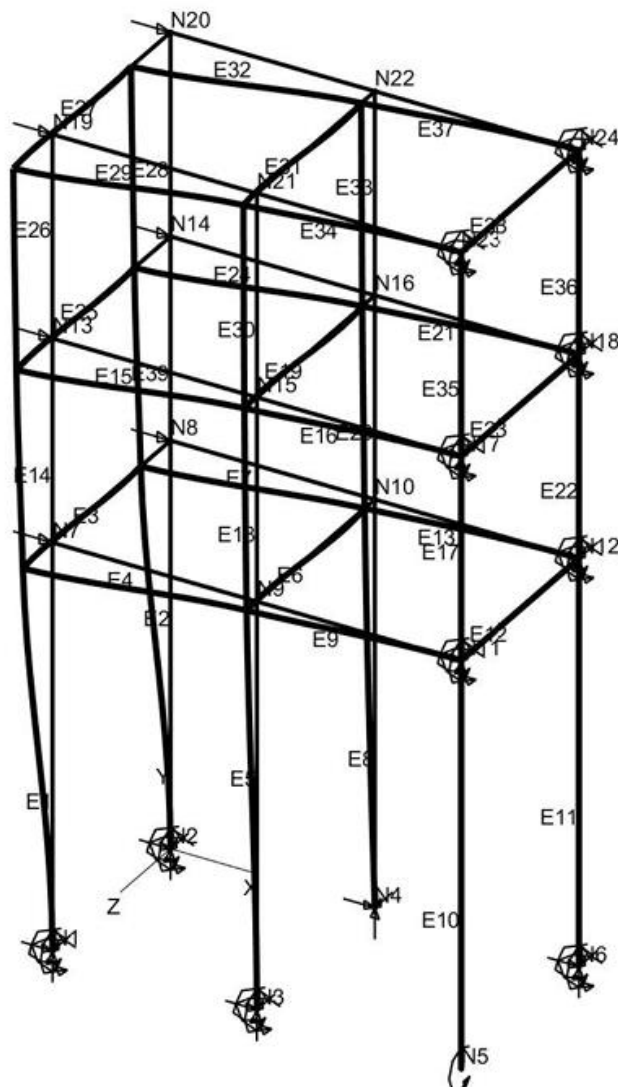
Fonte: Autor

Os fatores de carga crítica determinados pelo programa desenvolvido não apresentaram nenhuma divergência.

O modo de instabilidade apresentado nas Figura 24 e 25, associado ao menor fator de carga crítica, caracterizou uma instabilidade global do pórtico, com deslocamentos mais expressivos nos nós livres. Já os nós com apoios de terceiro gênero, permaneceram com deslocamentos nulos em todas as direções, comprovando a correta aplicação das condições de contorno. A correta movimentação dos outros apoios, de acordo com os gêneros, também foi observada, isso mostra que a saída gráfica da análise linear de estabilidade está coerente com os deslocamentos esperados quando aplicada o menor fator de carga crítica responsável pela instabilidade. Tanto os modos de instabilidade do programa MASTAN2 quanto o do programa desenvolvido visualizado no Paraview, seguem o mesmo comportamento.

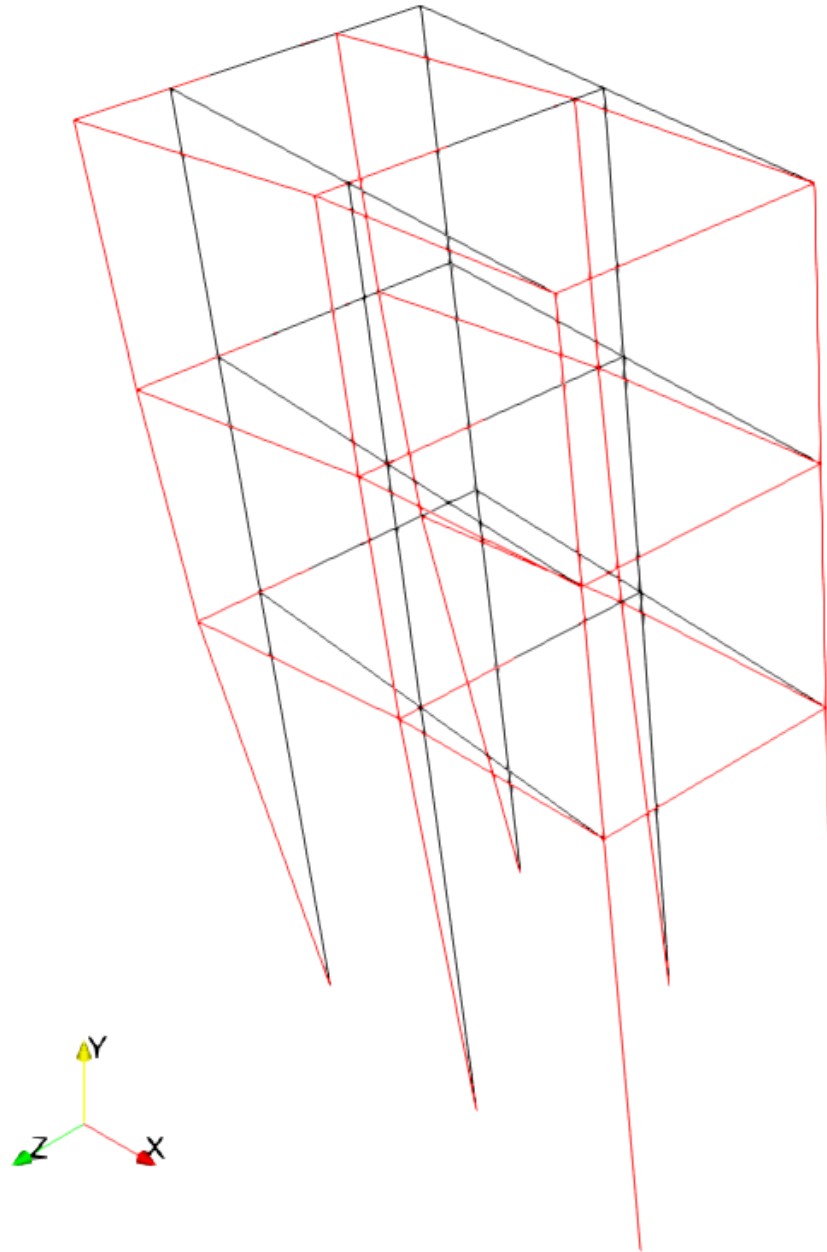
Figura 24 – Modo de instabilidade no programa MASTAN2 associado ao menor fator carga crítica do Exemplo 4

Deflected Shape: Elastic Critical Load, Mode # 1, Applied Load Ratio = 5.5453



Fonte: MASTAN2

Figura 25 – Modo de instabilidade do Software Paraview associado ao menor fator de carga crítica do Exemplo 4



Fonte: Autor

6. CONCLUSÃO

O desenvolvimento da ferramenta computacional apresentada neste trabalho confirmou a viabilidade e a eficiência da aplicação do Método Energético, associado ao Método dos Elementos Finitos, na análise linear de estabilidade de pórticos tridimensionais. A implementação em linguagem Fortran, com o suporte das rotinas numéricas da biblioteca Intel Math Kernel Library (Intel MKL), proporcionou resultados coerentes com o do software MASTAN2.

Por meio dos quatro exemplos de validação realizados, verificou-se que o programa desenvolvido calcula adequadamente os deslocamentos nodais, os fatores de carga crítica e identifica corretamente o modo de instabilidade do menor fator de carga crítica, mesmo diante de variações geométricas, diferentes tipos de apoio, propriedades de material e seções transversais. As pequenas divergências observadas nos fatores de carga crítica justificam-se pelas diferenças metodológicas entre os programas comparados, bem como pela consideração de variáveis adicionais no MASTAN2 que não são incorporadas no programa desenvolvido neste trabalho.

Conclui-se, portanto, que o objetivo central deste trabalho foi plenamente alcançado. A ferramenta desenvolvida constitui uma solução acessível e adaptável para a análise de estabilidade de pórticos tridimensionais, consolidando o domínio teórico do Método Energético e ampliando o campo de aplicação das rotinas computacionais.

Como trabalhos futuros, recomenda-se a expansão da ferramenta para análises não lineares de estabilidade, a incorporação de cargas distribuídas, coeficiente de empenamento, módulo plástico e áreas efetivas de cisalhamento, bem como o desenvolvimento de uma interface gráfica interativa, de modo a tornar o programa ainda mais didático e aplicável em contextos profissionais e acadêmicos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AZEVEDO, A. F. M. **Método dos Elementos Finitos: Uma Introdução**. 1^o Edição. Portugal: Faculdade de Engenharia da Universidade de Porto, 2003.

BAŽANT, Z. P.; CEDOLIN, L. **Stability of Structures: Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories**. Singapore: World Scientific, 2010.

BALZ, Andréia. **Avaliação De Cargas Críticas Para Estruturas Reticuladas Por Meio Do Problema De Auto-Valor E Auto-Vetor**. Trabalho de Conclusão de Curso. Curso de Engenharia Civil, Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul – UNIJUI, Santa Rosa, 2019.

BURGOS, R. B. **Avaliação de Cargas Crítica e Comportamento Pós-Crítico Inicial de Pórticos Planos**. Dissertação de Mestrado - Curso de Engenharia Civil, Potifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, p. 99. 2005.

BRYAN, G. H. On the stability of elastic systems. **Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Mathematical and physical sciences**, v. 6, 1888.

EULER, L. **Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti**. Laussanae et Genevae, Apud Marcum-Michaellem, Bousquet et Socios: [s.n.], 1744.

GERDAU. **Perfis estruturais Gerdau: tabela de bitolas**. 2018.

HIBBELER, R. C. **Análise das estruturas**. 8^o Edição. ed. São Paulo: Person Education do Brasil, 2013.

HIBBELER, R. C. **Resistência dos Materiais**. 7^o Edição. ed. São Paulo: Person Education do Brasil, 2010.

KASSIMALI, A. **Análise estrutural**. Cengage Learning, 2016.

KUMMER, F. D. **Análise de Pórticos Espaciais pelo Método da Rigidez: Consideração dos efeitos da deformação por corte**. Trabalho de Conclusão de Curso. Curso de Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2014.

LYAPUNOV, A. M. **Problème général de la stabilité du mouvement**. Harkov, 1982.

MARTHA, L. F. **Análise de Estruturas: Conceitos e Métodos Básicos**. 1 ed. Rio de Janeiro: Campus/Elsevier, 2010.

MARTHA, L. F.; BURGOS, R. Diferenças na consideração da distorção no modelo de Timoshenko de uma viga submetida a carregamento axial. **Jornada Sul Americana de Engenharia Estrutural, Uruguai**, 2014.

- MARTHA, L. F. **Método da Rigidez direta para modelos estruturais lineares e elásticos**. Departamento de Engenharia Civil – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro- PUC – Rio. 2018.
- MICHELINI, Leonardo Jorge. **Análise computacional de estruturas metálicas via MASTAN2**. Trabalho de Conclusão de Curso. Curso de Engenharia Civil, Instituto Federal de Educação e Tecnologia Goiano - Campus Rio Verde, 2021.
- McGUIRE, W.; GALLAGHER, R. H.; ZIEMIAN, R. D. **Matrix structural analysis**. 2. ed. New York: John Wiley & Sons, 2000.
- REIS, A.; CAMOTIM, D. **Estabilidade Estrutural**. Departamento de Engenharia e Arquitetura - Instituto superior técnico, Universidade Técnica de Lisboa. Editora McGraw-hill Portugal. 2001.
- RIBEIRO, F. L. B. **Introdução ao Método dos Elementos Finitos**. Notas de Aula – Programa de Engenharia Civil, COPPE/UFRJ, 2004.
- SANTOS, D. L. P. **Implementação computacional de pórtico tridimensional em linguagem Python**. Trabalho de Conclusão de Curso - Instituto Federal Goiano, Campus Rio Verde, 2024.
- SANTOS, A. A. L.; SILVA, B. O. **Análise de estabilidade de cascas cilíndricas com enrijecimento**. Monografia (Graduação em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2018.
- SILVA, J. E. L. **Comparando as linguagens de programação Fortran e Python através de problemas matemáticos**. 2019. Trabalho de conclusão de curso - Universidade Federal de Campina Grande.
- SORIANO, H. L.; LIMA, S. S. **Análise de estruturas: método das forças e método dos deslocamentos**. 2. ed., atual. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2006.
- SOUTHWELL, R. V. **On the general theory of elastic stability**. Philosophical Transaction of the Royal Society of London, n. 213, p. 187–244, 1913.
- SOARES, H. B. **Desenvolvimento de um programa para análise de pórticos tridimensionais considerando a flexibilidade das fundações**. Trabalho de Conclusão de Curso - Faculdade de Tecnologia, Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2017.
- TIMOSHENKO, S. P. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, Taylor & Francis, v. 41, n. 245, p. 744–746, 1921.

APÊNDICE A – ARQUIVO DE ENTRADA

Número de nós (n):

8

Coordenadas dos nós:

Nó	x	y	z
1	0.0	0.0	0.0
2	0.0	0.0	4.0
3	0.0	4.0	4.0
4	0.0	4.0	0.0
5	4.0	4.0	0.0
6	4.0	4.0	4.0
7	4.0	0.0	4.0
8	4.0	0.0	0.0

Número de elementos de barras:

8

Vinculação das barras:

Elemento	nó i	nó j
1	1	4
2	2	3
3	7	6
4	8	5
5	5	4
6	4	3
7	6	5
8	3	6

Quantidade de materiais:

1

Características dos materiais:

Material	E	ν
1	200.0E+6	0.25

Quantidade de seções transversais:

1

Características das seções:

Seção	A	PSI	Iz	Ix	Iy
1	0.02	0.0	2.0E-3	3.0E-3	2.0E-3

Aplicação dos materiais aos elementos:

Barra	Material	Seção
1	1	1
2	1	1
3	1	1
4	1	1
5	1	1
6	1	1
7	1	1

8 1 1

Número de nós com esforços concentrados:

4

Esforços concentrados (direções globais):

Nó	Fx	Fy	Fz	Mx	My	Mz
3	40.00	00.0	00.0	00.0	00.0	00.0
4	00.0	-100.0	00.0	00.0	00.0	00.0
5	00.0	00.0	00.0	00.0	-70.0	00.0
6	00.0	00.0	00.0	00.0	00.0	-120.0

Quantidade de nós com apoios fixos:

4

Apoios fixos: (1=restringido, 0=livre)

Nó	Dx	Dy	Dz	Rx	Ry	Rz
1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	0	0	0
7	1	1	1	1	1	1
8	0	0	1	0	0	0