

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
FACULDADE DE TECNOLOGIA
CURSO DE ENGENHARIA CIVIL

ELIANDRO FELIPE OLIVEIRA RODRIGUES

DESENVOLVIMENTO DE FERRAMENTA COMPUTACIONAL PARA
ANÁLISE DE ESTABILIDADE DE TRELIÇAS TRIDIMENSIONAIS

MANAUS

2025

ELIANDRO FELIPE OLIVEIRA RODRIGUES

DESENVOLVIMENTO DE FERRAMENTA COMPUTACIONAL PARA
ANÁLISE DE ESTABILIDADE DE TRELIÇAS TRIDIMENSIONAIS

Monografia apresentada à disciplina FTC067 –
Projeto Final de Engenharia Civil II como parte
dos requisitos necessários para a obtenção de grau
de bacharel em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. Henrique Barbosa Soares

MANAUS

2025

Ficha Catalográfica

Elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

- R696d Rodrigues, Eliandro Felipe Oliveira
Desenvolvimento de ferramenta computacional para análise de estabilidade de treliças tridimensionais / Eliandro Felipe Oliveira Rodrigues. - 2025.
66 f. ; 31 cm.
- Orientador(a): Henrique Barbosa Soares.
Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) - Universidade Federal do Amazonas, Faculdade de Tecnologia, Curso de Engenharia Civil, Manaus, 2025.
1. Análise linear de estruturas. 2. Treliças tridimensionais. 3. Método dos elementos finitos. 4. Programa computacional. I. Soares, Henrique Barbosa. II. Universidade Federal do Amazonas. Faculdade de Tecnologia. Curso de Engenharia Civil. III. Título
-

RESUMO

RODRIGUES, E. F. O. **Desenvolvimento de ferramenta computacional para análise de estabilidade de treliças tridimensionais**. 2025. Trabalho de Conclusão de Curso - Faculdade de Tecnologia, Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2025.

Este trabalho tem como objetivo o desenvolvimento de um programa computacional para a análise linear de estabilidade de estruturas modeladas com elementos de treliça tridimensional com base no método dos elementos finitos. O método é baseado na discretização do sistema estrutural em elementos finitos e na formulação de um sistema de equações algébricas por meio de conceitos físicos e variacionais. Para atingir esse objetivo, primeiramente, estudaram-se as formulações referentes a elementos de treliça tridimensionais. Em seguida, foi desenvolvido um algoritmo para a implementação computacional do elemento de treliça com base nos conceitos da análise matricial de estruturas. Na sequência, implementou-se um algoritmo para a realização da análise linear de estabilidade, que consiste na obtenção de cargas críticas e modos de instabilidade via resolução de problema de autovalor. Após a implementação computacional das formulações desenvolvidas, comparou-se por meio de três exemplos os resultados fornecidos pelo programa desenvolvido com os fornecidos pelo *software* comercial MASTAN2 para verificar a sua funcionalidade e precisão. Os resultados foram considerados satisfatórios, tendo sido observada pouca ou nenhuma divergência entre os valores.

Palavras-chave: análise linear de estruturas; treliças tridimensionais; método dos elementos finitos; programa computacional.

ABSTRACT

RODRIGUES, E. F. O. **Development of a computational tool for stability analysis of three-dimensional trusses.** 2025. Graduation work - College of Engineering, Federal University of Amazonas, Manaus, 2025.

This work aims to develop a computational program for the linear stability analysis of structures modeled with three-dimensional truss elements based on the finite element method. The method is based on the discretization of the structural system into finite elements and the formulation of a system of algebraic equations using physical and variational concepts. To achieve this objective, the formulations relating to three-dimensional truss elements were first studied. Then, an algorithm was developed for the computational implementation of the truss element based on the concepts of matrix analysis of structures. Subsequently, an algorithm was implemented for performing the linear stability analysis, which consists of obtaining critical loads and instability modes via eigenvalue problem solving. After the computational implementation of the developed formulations, the results provided by the developed program were compared with those provided by the commercial software MASTAN2 using three examples to verify its functionality and accuracy. The results were considered satisfactory, with little or no divergence observed between the values.

Key-words: linear analysis of structures; three-dimensional trusses; finite element method; computer program.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Estrutura real de um galpão e o seu modelo estrutural	14
Figura 2 – Exemplos de estruturas reticuladas	14
Figura 3 – Interface do MASTAN2.....	18
Figura 4 – Exemplos dos tipos de malha que podem ser visualizados no ParaView	20
Figura 5 – Região linear da curva tensão x deformação.....	21
Figura 6 – Deslocamentos no elemento de treliça.....	24
Figura 7 – Elemento de treliça com um grau de liberdade por nó.....	26
Figura 8 – Elemento de treliça com três graus de liberdade por nó	27
Figura 9 – Sistema de coordenadas global da estrutura.....	30
Figura 10 – Sistema de coordenadas local da estrutura.....	30
Figura 11 – Diferenças entre coordenadas do sistema local e global	31
Figura 12 – Ângulos que o elemento forma com os eixos globais x, y e z	31
Figura 13 – Correspondências entre as coordenadas generalizadas locais e globais	34
Figura 14 – Fluxograma do programa	43
Figura 15 – Estrutura para o Exemplo 1	45
Figura 16 – Deslocamentos dos nós da estrutura do Exemplo 1	47
Figura 17 – Primeiro modo de instabilidade fornecidos pelo programa para o Exemplo 1 ...	48
Figura 18 – Primeiro modo de instabilidade fornecidos pelo MASTAN2 para o Exemplo 1	49
Figura 19 – Estrutura para o Exemplo 2.....	50
Figura 20 – Deslocamentos dos nós da estrutura do Exemplo 2.....	51
Figura 21 – Primeiro modo de instabilidade fornecidos pelo programa para o Exemplo 2 ...	52
Figura 22 – Primeiro modo de instabilidade fornecidos pelo MASTAN2 para o Exemplo 2	53
Figura 23 – Estrutura para o Exemplo 3.....	54
Figura 24 – Primeiro modo de instabilidade fornecidos pelo programa para o Exemplo 3 ...	56
Figura 25 – Primeiro modo de instabilidade fornecidos pelo MASTAN2 para o Exemplo 3	56

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Coordenadas dos nós do Exemplo 1	46
Tabela 2 – Deslocamentos nodais fornecidos pelo programa para o Exemplo 1	46
Tabela 3 – Deslocamentos nodais fornecidos pelo <i>software</i> MASTAN2 para o Exemplo 1..	46
Tabela 4 – Comparação dos resultados para o Exemplo 1	47
Tabela 5 – Coordenadas dos nós do Exemplo 2.....	50
Tabela 6 – Deslocamentos nodais fornecidos pelo programa para o Exemplo 2.....	50
Tabela 7 – Deslocamentos nodais fornecidos pelo <i>software</i> MASTAN2 para o Exemplo 2..	51
Tabela 8 – Comparação dos resultados para o Exemplo 2.....	52
Tabela 9 – Coordenadas dos nós do Exemplo 3.....	54
Tabela 10 – Comparação dos resultados para o Exemplo 3.....	55

SUMÁRIO

1.	INTRODUÇÃO	9
1.1.	CONSIDERAÇÕES GERAIS	9
1.2.	OBJETIVOS	10
1.2.1.	OBJETIVO GERAL	10
1.2.2.	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	10
1.3.	JUSTIFICATIVA	10
1.4.	METODOLOGIA	11
2.	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	13
2.1.	ANÁLISE ESTRUTURAL	13
2.2.	MÉTODO DAS FORÇAS	14
2.3.	MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS.....	15
2.4.	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	15
2.5.	ANÁLISE MATRICIAL DE ESTRUTURAS	16
2.6.	ANÁLISE DE ESTABILIDADE	17
2.7.	<i>SOFTWARE</i> MASTAN2	17
2.8.	LINGUAGEM FORTRAN.....	19
2.9.	<i>SOFTWARE</i> PARAVIEW	19
3.	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS.....	21
3.1.	CRITÉRIO ENERGÉTICO DE ESTABILIDADE.....	21
3.2.	PRINCÍPIO DA MÍNIMA ENERGIA POTENCIAL.....	22
3.3.	TEOREMA DE LAGRANGE-DIRCHLET.....	23
3.4.	MATRIZ DE RIGIDEZ.....	24
3.5.	SISTEMA DE COORDENADAS.....	29
3.6.	MATRIZ DE ROTAÇÃO.....	31
3.7.	MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL.....	32
3.8.	VETOR DE ESFORÇOS.....	38
3.9.	CONDIÇÕES DE APOIO	39
3.10.	ESFORÇOS INTERNOS.....	40
3.11.	RESOLUÇÃO DOS SISTEMAS	41
3.11.1.	RESOLUÇÃO DO SISTEMA LINEAR.....	41
3.11.2.	RESOLUÇÃO DO SISTEMA DE AUTOVALOR	41

4.	PROGRAMA COMPUTACIONAL.....	42
4.1.	CONSIDERAÇÕES GERAIS	42
4.2.	FUNCIONAMENTO DO PROGRAMA	42
5.	EXEMPLOS NUMÉRICOS.....	45
5.1.	EXEMPLO 1.....	45
5.2.	EXEMPLO 2.....	49
5.3.	EXEMPLO 3.....	53
6.	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	58
6.1.	CONCLUSÕES	58
6.2.	SUGESTÃO PARA TRABALHOS FUTUROS.....	58
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	60
	APÊNDICE A – FORMATO PADRÃO DO ARQUIVO DE ENTRADA.....	63
	APÊNDICE B – FORMATO DO ARQUIVO DE SAÍDA DOS DESLOCAMENTOS NODAIS.....	65
	APÊNDICE C – FORMATO DO ARQUIVO DE SAÍDA DAS CARGAS CRÍTICAS..	66

1. INTRODUÇÃO

1.1. CONSIDERAÇÕES GERAIS

Ao longo dos anos houve um grande avanço no setor da construção civil, e, atrelado a isso, as estruturas se tornaram cada vez mais altas e esbeltas. Mediante a essa evolução, houve a necessidade do aprimoramento dos métodos de análise estrutural visando uma maior precisão na análise, visto que as estruturas se tornaram mais complexas.

Antes do avanço da tecnologia computacional realizavam-se em laboratórios análises em modelos reduzidos dos diversos problemas de engenharia, pois a aplicação de conceitos do Método dos Elementos Finitos mostrava-se inviável, devido aos diversos cálculos manuais envolvendo operações matriciais tornando trabalhoso a obtenção de resultados precisos (Suzuki, 2012).

No entanto, com o avanço da computação e em virtude da alta capacidade de processamento dos computadores modernos, estes problemas de maior complexidade, que antes eram inviáveis de serem realizados manualmente, puderam ser substituídos por uma análise computacional, o que tornou a resolução desses cálculos mais rápida e eficiente.

Atualmente, durante a análise estrutural de qualquer projeto é usada uma ferramenta computacional, ou seja, a solução por métodos numéricos tornou-se presente no dia a dia dos profissionais de engenharia, visto que, seu uso veio para otimizar processos e cálculos que antes eram muito demorados.

Podem ser citados como exemplos de ferramentas computacionais amplamente usadas em projetos estruturais os *softwares* Ftool, Eberick, TQS, CYPECAD, dentre tantos outros que usam de modelos matemáticos e físicos para análises estruturais em computadores. Portanto, é importante que os profissionais entendam como se dá a construção desses modelos para que sejam feitas análises mais precisas dos resultados gerados pelos programas (Oliveira, 2017).

Existem diversos métodos para a análises estruturais, como por exemplo o Método das Forças e o Método dos Deslocamentos. No presente trabalho será utilizado o Método dos Elementos Finitos (MEF).

Nesse contexto, objetiva-se realizar a implementação computacional de algoritmos que permitam a resolução do problema estrutural de elementos de treliça e do problema generalizado de autovalor para a obtenção das cargas críticas e modos de instabilidade para esse tipo de estrutura. Espera-se que os desenvolvimentos deste projeto permitam a análise de

estruturas mais complexas. Cita-se como exemplo de aplicação da formulação aqui proposta para análises estruturais de treliças a cobertura de grande vão do Centro de Convivência do campus da UFAM em Manaus/AM.

1.2. OBJETIVOS

1.2.1. OBJETIVO GERAL

Desenvolver um programa computacional para análise linear de estabilidade em estruturas modeladas com elementos de treliça tridimensional.

1.2.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- 1) Estudar formulações referentes a elementos de treliça tridimensional e análise linear de estabilidade que constam nas bibliografias clássicas referentes a esses tópicos;
- 2) Desenvolver e implementar um algoritmo de programa computacional de cálculo de elementos de treliça tridimensional;
- 3) Desenvolver e implementar um algoritmo para cálculo de cargas críticas e modos de instabilidade com base na teoria da análise linear de estabilidade;
- 4) Validar a ferramenta desenvolvida a partir da comparação dos resultados com aqueles obtidos em outro programa comercial por meio de exemplos numéricos.

1.3. JUSTIFICATIVA

A análise estrutural é uma etapa importante de um projeto, pois é nela que se verifica quais são os esforços os quais a estrutura estará submetida para que seja realizado o dimensionamento de uma edificação segura.

Uma análise simplificada de estabilidade de estruturas, presente nas normas técnicas de projeto, é a chamada flambagem elástica ou análise linear de estabilidade. Essa análise é fundamental durante o dimensionamento, especialmente em estruturas treliçadas submetidas a esforços de compressão, onde pode ocorrer o fenômeno da flambagem, algo que compromete a segurança da edificação. Deste modo, sem uma análise devidamente adequada podem ocorrer falhas estruturais que poderão levar a estrutura ao colapso.

As treliças tridimensionais que serão abordadas no presente trabalho são muito utilizadas em coberturas e estruturas metálicas de grande vão. Sendo assim, a análise de

estabilidade torna-se fundamental para prever possíveis modos de colapso e garantir o dimensionamento adequado.

Neste contexto, este trabalho justifica-se pela importância de uma ferramenta computacional acessível que permita a realização da análise de estabilidade. O presente trabalho visa fornecer uma solução computacional, assim como contribuir para o desenvolvimento acadêmico e profissional por meio dos entendimentos dos aspectos matemáticos e físicos presentes nas formulações, além dos conhecimentos em programação e modelagem numérica de sistemas estruturais.

1.4. METODOLOGIA

Inicialmente realizou-se um levantamento bibliográfico em busca de trabalhos referentes a análise matricial e a estabilidade de estruturas. Referente à análise matricial de estruturas, foi estudada especificamente a formulação de elementos de treliça tridimensional, tendo em vista a posterior implementação computacional.

Com relação à análise de estabilidade, foram estudadas formulações que decorrem a partir de métodos de energia, que resultam na teoria da análise linear de estabilidade.

Neste sentido, utilizou-se o Sistema de Bibliotecas (SISTEBIB/UFAM), com acesso ao acervo da Biblioteca Setorial de Ciências Exatas e Engenharias, de um banco de teses e dissertações além das bases de dados do portal de periódicos da CAPES.

Em sequência à realização deste estudo inicial, foram desenvolvidos algoritmos que possibilitam o cálculo automatizado de estruturas de treliça tridimensional e também a realização de análise linear de estabilidade. Nesta etapa, os desenvolvimentos e resultados de alguns trabalhos já realizados no Grupo de Pesquisa em Sistemas Estruturais (GPESE), como Soares (2016) e Rodrigues (2024), foram utilizados como base.

As implementações computacionais dos algoritmos desenvolvidos foram realizadas em linguagem Fortran. O ambiente de desenvolvimento utilizado foi o Visual Studio, que disponibiliza compiladores para Windows® com licença gratuita.

Para análise dos dados e resultados, foi usado o *software* de pós-processamento ParaView (Ahrens; Geveci; Law, 2005), com licença gratuita, e o *software* MASTAN2 (Ziemian; McGuire; Liu, 2000) de análise de estruturas, que possui uma versão básica com licença gratuita. Com relação às análises numéricas, buscou-se exemplos de cunho prático para evidenciar as aplicações em estruturas cotidianas. Além disso, visa-se explorar a análise de um tipo de comportamento que geralmente não é abordada de forma tão aprofundada no curso de

Graduação em Engenharia Civil, devido à dificuldade em se resolver este tipo de estrutura com cálculos manuais.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Nas próximas seções serão abordadas as fundamentações teóricas para os métodos usados no presente trabalho. Inicialmente será apresentada a análise estrutural, assim como alguns métodos já consolidados de análise estrutural, dando ênfase ao Método dos Elementos Finitos, que é um dos métodos para a resolução de vários problemas de Engenharia, capaz de analisar o comportamento de sistemas físicos, oferecendo soluções aproximadas. Em seguida, será apresentado um histórico sobre a análise matricial de estruturas, sobre a evolução do estudo de instabilidade estrutural. Por fim, será feita uma breve abordagem sobre os *softwares* que serviram de auxílio, como o MASTAN 2 e o ParaView, como também a linguagem de programação usada no presente trabalho.

2.1. ANÁLISE ESTRUTURAL

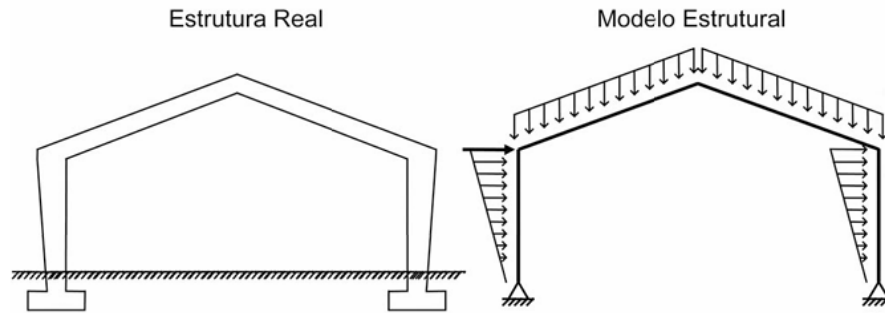
Conforme descreve Martha (2010), a análise estrutural é a fase de um projeto na qual verifica-se o comportamento da estrutura, tais como, campos de tensões, deformações e deslocamentos na estrutura. Essa análise visa determinar os esforços externos e internos além de determinar os deslocamentos e as deformações correspondentes da estrutura em estudo.

Durante a concepção do modelo estrutural é feita a idealização do comportamento da estrutura, modelado com base em hipóteses simplificadoras, hipóteses essas que tem como base fundamentos da física e dados experimentais e estatísticos como geometria, condições de suporte, comportamento do material e ações solicitantes (Martha, 2010).

Entre as diversas classificações de estruturas de estruturas, destacam-se as estruturas reticuladas, que consiste em representar a estrutura por meio de barras lineares estruturais que possuem um eixo bem definido cuja conectividade se dá por nós.

A Figura 1 mostra um exemplo de um modelo estrutural feito com base na estrutura real de um galpão.

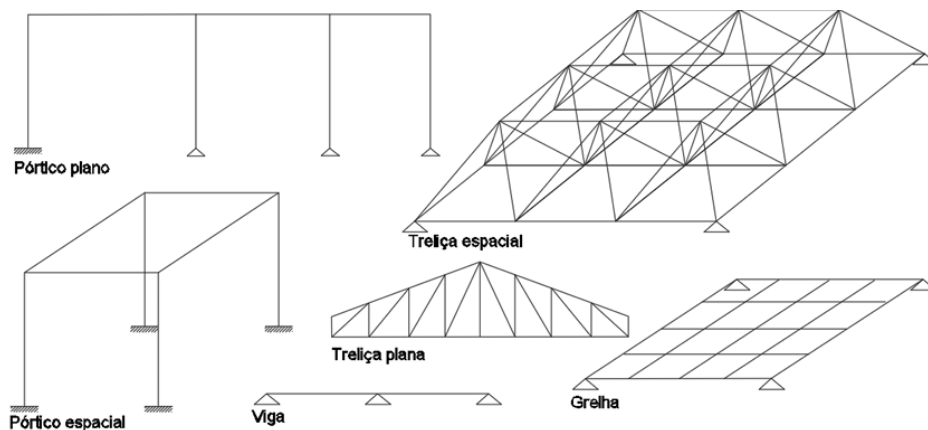
Figura 1 – Estrutura real de um galpão e o seu modelo estrutural



Fonte: Martha (2010)

Esse modelo estrutural pode ser usado para representar diversas construções de engenharia, como por exemplo vigas, treliças, grelhas e pórticos, como mostra a Figura 2.

Figura 2 – Exemplos de estruturas reticuladas



Fonte: Dias (2022)

2.2. MÉTODO DAS FORÇAS

No método das forças as incógnitas do problema são forças e momentos, que podem ser expressos por esforços internos ou reações de apoio (Martha, 2010).

A ideia do método baseia-se em transformar um modelo estrutural hiperestático em um modelo isostático, isso é feito rompendo-se os vínculos da estrutura transformando-o em um sistema principal, e em seguida adicionando-se esforços hiperestáticos nos vínculos rompidos para que seja respeitada a compatibilidade estática, onde esses esforços serão as incógnitas do problema (Süssekind, 1980). A solução do método se dá pela resolução de um sistema de

equações de compatibilidade de deslocamentos que fornecem os valores hiperestáticos, os quais permitem calcular os esforços da estrutura.

2.3. MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS

No método dos deslocamentos as incógnitas do problema são os deslocamentos e as rotações sofridos pelos nós, e diferente do método das forças, em que os apoios são rompidos para que a estrutura se torne isostática, os graus de liberdade da estrutura são restringidos, tornando-a uma estrutura com um grau hiperestático maior, denominado sistema principal (Süssekind, 1987). Os deslocamentos da estrutura são obtidos através da restauração das condições de equilíbrio por meio da superposição de soluções básicas e, em seguida, determinam-se os esforços.

2.4. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Outro método muito utilizado para a resolução de problemas relacionados a análises estruturais é o Método dos Elementos Finitos (MEF). O método consiste na discretização do contínuo, que se dá pela divisão do corpo em um sistema equivalente de corpos menores (elementos finitos) ligados por nós, onde a determinação dos deslocamentos de cada nó se dá pela resolução de um sistema de equações algébricas Logan (2007 *apud* Hirotoni, 2014).

Argyris, Turner e Associados iniciaram os primeiros trabalhos relacionados ao MEF na segunda metade de década de 50 devido ao surgimento dos primeiros computadores e a necessidade de se modelar sistemas físicos contínuos em meio computacional. A formulação até então era feita por meio do Princípio dos Deslocamentos Virtuais, sem um critério que garantisse a convergência. (Soriano, 2009).

Em 1962 Gallagher, Padlog e Bijlaard realizaram os primeiros estudos relacionados a análise tridimensional de tensões pelo MEF. Em 1963, Gallagher e Padlog incluíram ao MEF o deslocamento de vigas e placas, abordando também a não-linearidade geométrica e determinação das cargas críticas (Soriano, 2003).

Na década de 60 percebeu-se que o MEF pode ser entendido como um caso particular do método de Rayleigh-Ritz e, como tal, formulado a partir de funcionais. Isso expandiu a aplicação do método para problemas não estruturais, como a mecânica dos fluidos, termodinâmica e eletromagnetismo, e levou à definição de critérios de convergência (Soriano, 2009).

No final da década de 80, devido à crescente disseminação de microcomputadores, o uso do MEF chega finalmente às mãos dos projetistas de estruturas devido a sua versatilidade e da sua capacidade de realizar com rapidez cálculos que demandariam tempo e trabalho (Azevedo, 2003).

Silva (2022) por meio do MEF estudou o comportamento dos pilares-parede de concreto armado, onde o autor desenvolveu um programa computacional para a análise não-linear de cascas de concreto armado, utilizando o modelo do campo de tensões perturbado e a formulação Lagrangiana total. Seu estudo permitiu identificar a expressiva influência da redistribuição dos esforços, além do princípio de Saint-Venant, contribuindo para a redução dos efeitos localizados de 2º ordem nos pilares-parede, em comparação ao discutido na literatura.

Soares (2021) estudou o MEF em sua versão posicional e descrição Lagrangeana total do equilíbrio para desenvolver uma ferramenta computacional para análise de colapso estrutural de edificações compostas por perfis de parede fina, modelando os perfis de parede fina com elementos de casca.

2.5. ANÁLISE MATRICIAL DE ESTRUTURAS

A base teórica da análise matricial de estruturas foi estabelecida pelos os autores James C. Maxwell, que em 1864 introduziu o método das deformações consistentes e por George A. Maney que em 1915 desenvolveu o método da linha de flexão. Esses métodos clássicos são reconhecidos como os predecessores dos métodos de flexibilidade e rigidez matricial, respectivamente (Kassimali, 2012).

A análise estrutural passou por uma revolução no final da década de 1940 com o surgimento dos computadores, capazes de resolver grandes sistemas de equações simultâneas, possibilitando que os métodos de análise fornecessem soluções mais rápidas. Dessa forma, tais métodos deixaram de ser vistos como desvantajosos, e pelo contrário passaram a ser preferidos devido a possibilidade de expressar as equações na forma matricial, e facilmente programadas para a solução computacional (Kassimali, 2012).

S. Levy é reconhecido como o pioneiro ao introduzir em 1947 o método da flexibilidade, ao generalizar o método clássico das deformações consistentes. Na década de 1950 os pesquisadores H. Falkenheimer, B. Langefors e P. H. Denke expandiram o método da flexibilidade para a forma matricial. Em 1954, R. K. Livesley desenvolveu o método da rigidez matricial e, no mesmo ano, J. H. Argyris e S. Kelsey apresentaram formulações baseadas em princípios energéticos. Já em 1956, M. T. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin e L. J. Topp, por

meio do MEF derivaram matrizes de rigidez para os elementos de treliças e pórticos e, no mesmo ano, Livesley propôs uma formulação não linear do método da rigidez para a análise de estabilidade de estruturas (Kassimali, 2012).

Portanto, percebe-se uma constante evolução nos métodos matriciais, sendo os avanços mais recentes nas áreas de análise dinâmica e não-linear de estruturas sendo os principais pesquisadores S. S. Archer, C. Birnstiel, R. H. Gallagher, J. Padlog, J. S. Przemieniecki, C. K. Wang e E. L. Wilson (Kassimali, 2012).

2.6. ANÁLISE DE ESTABILIDADE

Euler em 1744 foi o pioneiro no estudo da instabilidade estrutural, ele se interessou nas formas geométricas das curvas elásticas e resolveu investigar as formas que uma barra elástica esbelta assume sob diversas condições de carregamento, esse estudo teve como resultado a determinação da carga crítica (Timoshenko, 1953).

Lagrange introduziu a abordagem de energia, onde no seu estudo foi utilizado o método variacional nos critérios de equilíbrio e estabilidade para sistemas com vários graus de liberdade. Ele não se limitou apenas a calcular os valores das cargas críticas, mas também investigou as deflexões que existirão se a carga aplicada exceder o valor crítico, ou seja, os seus modos de flambagem (Timoshenko, 1953).

Foi possível determinar de forma analítica a carga crítica de instabilidade em colunas fundamentando-se na teoria geral da flexão apresentada por Navier, amplamente abordada na literatura clássica de Resistência dos Materiais ou Mecânica dos Sólidos. Porém, tais formulações não representavam de forma adequada o comportamento de colunas robustas em uma direção. Nisso, Timoshenko (1921), conseguiu superar esse problema ao introduzir à cinemática do problema a consideração de distorções e de rotação da seção.

Após isso houveram diversos outros estudos relacionados a descrição analítica de caracterização dos pontos críticos, bem como, a determinação das cargas críticas, dando-se destaque aos estudos de Lyapunov (1982), Bryan (1888) e Southwell (1913).

2.7. SOFTWARE MASTAN2

O *software* MASTAN2 é um programa comercial interativo de análise estrutural, ele fornece recursos de pré-processamento, análise e pós processamento. O programa tem suas rotinas e sub-rotinas implementadas com o *software* MATLAB (Ziemian; Mcguire; Liu, 2000).

O *software* é escrito em formato modular permitindo ao usuário desenvolver e implementar outras rotinas no código fonte, possibilitando realizar análises adicionais ou alternativas. As rotinas do programa permitem realizar análises elásticas ou inelásticas de primeira ou de segunda ordem de treliças e pórticos bidimensionais e tridimensionais.

Existem duas versões disponíveis de forma gratuita, a primeira requer acesso ao MATLAB enquanto a outra não necessita. Ambas realizam as mesmas análises, no entanto, apenas a versão que requer acesso ao MATLAB permite ao usuário implementar novas rotinas ao código.

A arquitetura do programa consiste em 3 etapas principais.

A primeira etapa é o Pré-processamento, que consiste em definir a geometria da estrutura (coordenadas dos nós e conectividade dos elementos), as propriedades dos materiais, as seções transversais e as condições de contorno (vinculações e carregamento externo).

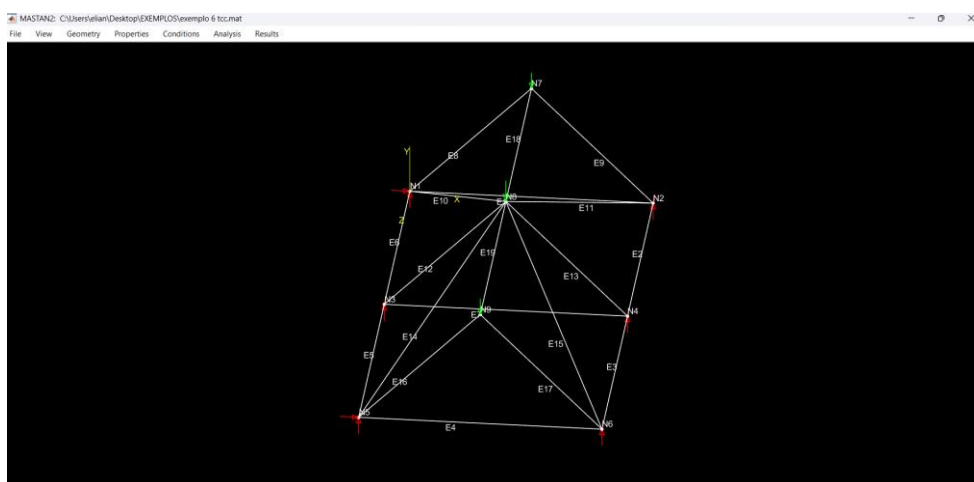
A segunda etapa é a Análise, onde ocorrem todos os cálculos necessários para a análise estrutural, podendo ser análises de primeira ou de segunda ordem, assim como análises elásticas ou inelásticas.

A terceira etapa é de Pós-processamento, é nela que é possível visualizar o comportamento da estrutura (diagramas, deformada, modos de flambagem) permitindo que o usuário interprete os resultados fornecidos pelo programa.

Toda a fundamentação teórica usada na criação do programa está disponível de forma gratuita no livro dos autores (Ziemian; Mcguire; Gallagher, 2000).

A Figura 3 mostra a interface do programa.

Figura 3 – Interface do MASTAN2.



Fonte: Autor (2025)

Apesar de sua interface não ser tão “amigável”, ela é bem completa e organizada, consistindo em uma barra de menus suspenso onde é possível definir a geometria, as propriedades e condições de contorno. Ademais, conta também com uma janela principal de modelagem, permitindo visualizar a estrutura que será analisada posteriormente.

2.8. LINGUAGEM FORTRAN

A linguagem Fortran é uma das linguagens de programação mais antigas, o seu nome vem de (FORmula TRANslation), sendo concebida desde o início para traduzir equações científicas em código de computador, onde sua primeira versão foi desenvolvida na década de 1950 pela IBM (Chapman, 2018).

Desde a sua origem, a linguagem foi muito utilizada para fornecer soluções de problemas científicos e de engenharia devido a sua velocidade e eficiência na execução de cálculos numéricos e nas diversas operações matriciais, tornando-a uma ferramenta eficaz para a computação científica de alto desempenho (Kedward *et al.*,2022).

Mesmo sendo uma linguagem de programação antiga, o Fortran continua sendo muito usado no âmbito da pesquisa, principalmente em áreas que requerem um alto desempenho computacional devido aos diversos procedimentos matemáticos.

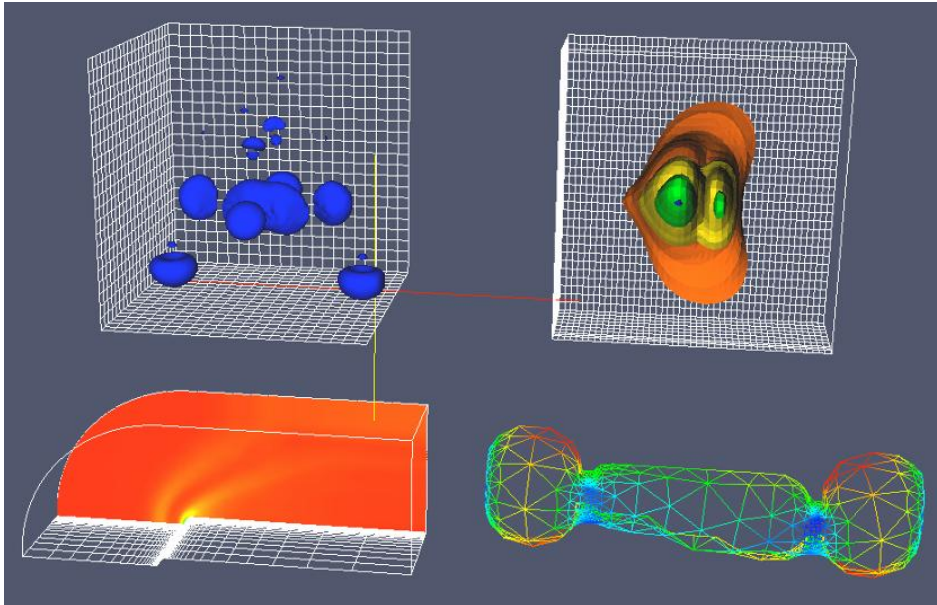
No presente trabalho foi usado o compilador **Intel Fortan Compiler**, desenvolvido pela Intel, este compilador se integra as ferramentas do **Intel OneAPI MKL** (biblioteca de funções matemáticas), que permitindo a escrita de códigos em Fortran em ambiente Windows®.

2.9. SOFTWARE PARAVIEW

O *software* ParaView é um programa de código aberto voltado para a visualização de pós processamento, é um programa muito utilizado para visualizar e analisar grande conjuntos de dados.

O Visualization Toolkit (VTK), é a base da arquitetura do ParaView, que permite representar uma variedade de tipos de malhas, incluindo malhas estruturadas, como as (retilíneas uniformes e não uniformes, além das malhas curvilíneas), não estruturadas, poligonais e de imagem (Ahrens; Geveci; Law, 2005). A Figura 4 mostra exemplos desses tipos de malha que podem ser visualizados no ParaView.

Figura 4 – Exemplos dos tipos de malha que podem ser visualizados no ParaView



Fonte: Ahrens; Geveci; Law (2005)

Para usar o kit de ferramentas, o VTK oferece uma interface de biblioteca C++ e um conjunto de interfaces de script, incluindo interfaces em linguagens de programação como Java, Python e Tcl.

A imagem superior direita da Figura 4 é uma isosuperfície de uma malha estruturada retilínea não uniforme, enquanto a imagem inferior esquerda representa um conjunto de dados de malha estruturada curvilínea e, por fim, a inferior direita representa uma malha não estruturada.

Além das aplicações descritas nesta seção, o ParaView possui outras ferramentas interessantes, podendo ser usado em diversas aplicações como um visualizador de resultados. É por este motivo que, optou-se por usá-lo neste trabalho.

3. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

3.1. CRITÉRIO ENERGÉTICO DE ESTABILIDADE

Para realizar a análise linear de estabilidade por meio do MEF é necessário a resolução de um problema generalizado de autovalores e autovetores. Esse problema envolve as matrizes de rigidez elástica e geométrica. Os coeficientes de ambas as matrizes podem ser demonstrados por meio dos métodos de energia.

Nesta seção e nas seções subsequentes serão demonstradas as formulações referentes aos elementos de treliças que serão usadas neste trabalho para a análise de estabilidade.

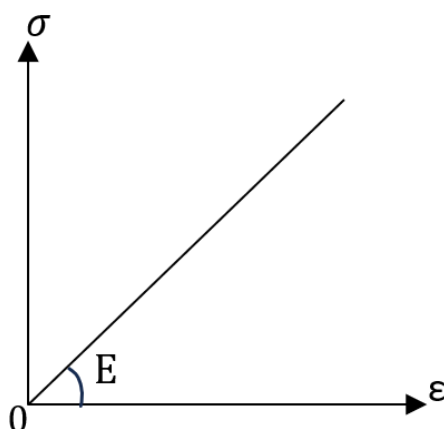
De acordo com Reis e Camotim (2000), o critério energético de estabilidade é usado na análise de sistemas de instabilidade bifurcacional, para isso usa-se o Princípio da Mínima Energia Potencial Total, cujo enunciado afirma que a energia potencial de um sistema assume um valor mínimo no seu estado de equilíbrio.

Em sistemas estruturais elásticos submetidos à ação de forças conservativas, a energia potencial total do sistema é representada pela soma da parcela correspondente a energia interna, a energia de deformação U , e da parcela de energia correspondente as forças externas, o potencial das ações externas P , representada pela equação:

$$V = U + P \quad (3.1)$$

A energia potencial das deformações U é obtida por meio da análise da região linear da curva tensão x deformação, conforme mostra a Figura 5.

Figura 5 – Região linear da curva tensão x deformação



Fonte: Autor (2025)

Deve-se integrar a energia específica em todo o volume da estrutura de modo que se obtenha a energia de deformação total do sistema.

$$U = \int_V u_e dV \quad (3.2)$$

onde U é a energia de deformação e u_e é a energia específica.

A energia específica é dada pela área sob a curva mostrada na Figura 5, expressa por:

$$u_e = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon \quad (3.3)$$

Além disso, da Lei de Hooke, tem-se que:

$$\sigma = E \varepsilon \quad (3.4)$$

onde σ é a tensão, E é o módulo de elasticidade do material e ε é a deformação específica.

Juntando (3.3) e (3.4), tem-se:

$$u_e = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 \quad (3.5)$$

Relacionando as Equações (3.2) e (3.5), chega-se à expressão para a energia de deformação interna:

$$U = \int_V \frac{1}{2} E \varepsilon^2 dV \quad (3.6)$$

A parcela correspondente a energia potencial das forças externas P é dada pelo trabalho realizado pelas forças externas na direção dos deslocamentos da estrutura, dado por:

$$P = -F \cdot \Delta \quad (3.7)$$

sendo P o trabalho realizado pelas forças externas, F a ação externa e Δ o deslocamento.

Essa parcela é negativa pois conforme a estrutura se deforma, a capacidade de trabalho correspondente às forças externas é reduzida, isto é, a energia potencial da força externa é convertida em energia interna.

Portanto, a energia potencial total do sistema é dada pela expressão:

$$V = \int_V \frac{1}{2} E \varepsilon^2 dV - F \cdot \Delta \quad (3.8)$$

3.2. PRINCÍPIO DA MÍNIMA ENERGIA POTENCIAL

O Princípio da Mínima Energia Potencial afirma que a energia potencial total vai assumir um valor mínimo na configuração de equilíbrio, isto é, as derivadas de primeira ordem em relação aos “ n ” parâmetros nodais tem que ser iguais a zero:

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.9)$$

A Equação (3.9) representa um conjunto de n equações em função das variáveis q_1, q_2, \dots, q_n . Cada equação corresponde a uma equação de equilíbrio estático em sistemas conservativos discretos, cuja solução do sistema de equações representa o comportamento da estrutura submetida a perturbações no seu estado inicial (Burgos, 2005).

3.3. TEOREMA DE LAGRANGE-DIRCHLET

Conforme o teorema de Lagrange-Dirichlet, o equilíbrio de um sistema que contém apenas forças conservativas e dissipativas é estável se a energia potencial na posição de equilíbrio for um mínimo local, ou seja, se possui segunda variação positiva (Bažant; Cedolin, 2010):

$$\delta^2 U > 0 \quad \forall \delta u \neq 0 \quad (3.10)$$

Em outras palavras o teorema de Lagrange-Dirichlet permite concluir que o equilíbrio é estável se e somente se, a matriz $[K]$ formada pelas segundas derivadas parciais em relação aos parâmetros q_i for positiva definida, isto é, todos os seus autovalores são positivos.

No limite de estabilidade, o menor dos autovalores da matriz $[K]$ tende a zero. Além disso, tem-se da Álgebra Linear que toda matriz simétrica possui todos os seus autovalores reais e é sempre diagonalizável. Isto é, a diagonalização pode sempre ser realizada por meio de uma matriz de rotação, cujo resultado é uma matriz diagonal, com os autovalores na sua diagonal principal.

Desta forma, o determinante da matriz $[K]$ é obtido por:

$$\det[K] = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdots \lambda_n \quad (3.11)$$

onde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ são todos os autovalores da matriz $[K]$.

Por meio da Equação (3.11), tem-se que o estado limite de estabilidade ocorre quando:

$$\det[K] = 0 \quad (3.12)$$

A matriz $[K]$ é constituída pela matriz de rigidez elástica $[K_E]$ e a matriz de rigidez geométrica $[K_G]$. Portanto, o estado limite de estabilidade pode ser escrito da seguinte forma:

$$\det([K_E] + \lambda[K_G]) = 0 \quad (3.13)$$

A Equação (3.13) pode ser interpretada como o polinômio característico do problema de autovalor abaixo:

$$([K_E] + \lambda[K_G]) \cdot \{u\} = \{0\} \quad (3.14)$$

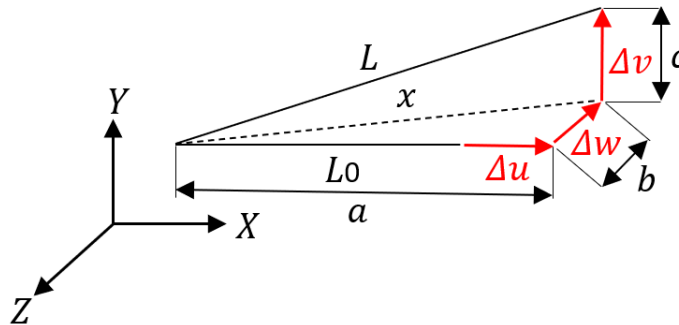
onde λ são os autovalores e $\{u\}$ são os autovetores correspondentes.

A Equação (3.14) corresponde a um problema generalizado de autovalor, cuja solução fornece n autovalores λ e n autovetores $\{u\}$, sendo n a dimensão das matrizes $[K_E]$ e $[K_G]$. Além disso, o menor autovalor calculado é o fator de carga crítica e o autovetor associado a ele é o modo crítico de instabilidade.

3.4. MATRIZ DE RIGIDEZ

Considera-se o elemento finito genérico de treliça representado na Figura 6, cujo comprimento inicial é L_0 . Em função dos deslocamentos, esse comprimento é alterado para L , correspondente à configuração deformada.

Figura 6 – Deslocamentos no elemento de treliça



Fonte: Autor (2025)

A parcela correspondente a deformação linear é dada pela Equação:

$$\varepsilon_L = \frac{L - L_0}{L_0} \quad (3.15)$$

Para a formulação é necessário considerar não apenas a deformação linear do elemento, mas também a deformação não-linear. Essa medida de deformação será importante para a formulação da matriz de rigidez geométrica e consequentemente para análise de estabilidade.

A parcela de deformação não-linear é definida por meio da deformação de Green ε_G , segundo Bonet e Wood (1997), é dada pela seguinte Equação:

$$\varepsilon_G = \frac{1}{2} \left(\frac{L^2 - L_0^2}{L_0^2} \right) \quad (3.16)$$

Considerando o elemento representado na Figura 6, pelo Teorema de Pitágoras, tem-se que $L^2 = x^2 + c^2$ e $x^2 = a^2 + b^2$. Deste modo, $L^2 = a^2 + b^2 + c^2$. Logo:

$$L^2 = L_0^2 + \Delta u^2 + 2L_0\Delta u + \Delta v^2 + \Delta w^2 \quad (3.17)$$

Logo, por meio das Equações (3.16) e (3.17), tem-se:

$$\varepsilon_G = \frac{2L_0\Delta u + \Delta u^2 + \Delta v^2 + \Delta w^2}{2L_0^2} \quad (3.18)$$

Ao reescrever a Equação (3.18), obtém-se uma expressão para a deformação de Green que incorpora também a deformação linear. Essa expressão fica na forma:

$$\varepsilon_G = \frac{\Delta u}{L_0} + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta u}{L_0}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta v}{L_0}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta w}{L_0}\right)^2 \quad (3.19)$$

onde $\frac{\Delta u}{L_0}$ corresponde à deformação linear e $\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta u}{L_0}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta v}{L_0}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta w}{L_0}\right)^2$ correspondem às parcelas não-lineares.

As parcelas não-lineares permitem levar em consideração o efeito da não-linearidade geométrica, possibilitando realizar análises de estabilidade. Deste modo, por meio da Equação (3.19), tem-se:

$$\varepsilon^2 = (\varepsilon_L + \varepsilon_N)^2 = \varepsilon_L^2 + 2\varepsilon_L\varepsilon_N + \varepsilon_N^2 \quad (3.20)$$

onde ε_L corresponde a parcela linear e ε_N corresponde a parcela não linear.

Substituindo as componentes de deformação linear e não-linear na Equação (3.6), chega-se à Equação:

$$U = \frac{E}{2} \int_V \varepsilon_L^2 dV + E \int_V \varepsilon_L \varepsilon_N dV + \frac{E}{2} \int_V \varepsilon_N^2 dV \quad (3.21)$$

A Equação (3.21) possui uma primeira parcela linear, a partir da qual determina-se a matriz de rigidez elástica, que depende dos parâmetros geométricos e das propriedades do material. A segunda parcela permite determinar a matriz de rigidez geométrica, que depende do carregamento.

A última parcela da Equação (3.21) corresponde a um termo não-linear de alta ordem. Como este trabalho se restringe à análise linear de estabilidade, esse termo será desconsiderado. No entanto, ela pode ser incluída em trabalhos com foco na análise não-linear geometricamente exata.

Partindo da Equação (3.21), para um elemento linear de seção constante A e sob ação de uma força axial N , obtém-se a Equação:

$$U = \frac{EA\varepsilon_L^2}{2} \int_0^L dx + N \int_0^L \varepsilon_N dx \quad (3.22)$$

A seguir será apresentada a formulação para a matriz de rigidez elástica de um elemento finito genérico de treliça.

A Figura 7 apresenta um elemento finito de treliça, delimitado pelos nós 1 e 2, com comprimento L e deslocamento axial no eixo x em um sistema de coordenadas locais.

Figura 7 – Elemento de treliça com um grau de liberdade por nó



Fonte: Autor (2025)

Por meio da deformação linear expressa em (3.15), tem-se:

$$\varepsilon_L = \frac{q_2 - q_1}{L} \quad (3.23)$$

Deste modo, a energia de deformação linear pode ser expressa por:

$$U_E = \frac{EA(q_2 - q_1)^2}{2L} \quad (3.24)$$

Aplicando o Princípio da Mínima Energia Potencial Total na Equação (3.24), chega-se nas expressões:

$$\frac{\partial U_E}{\partial q_1} = -\frac{EA(q_2 - q_1)}{L} \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial U_E}{\partial q_2} = \frac{EA(q_2 - q_1)}{L} \quad (3.26)$$

Ao realizar a primeira derivada em função dos parâmetros nodais obtém-se funções lineares. Para determinar as constantes que multiplicam as variáveis, deriva-se pela segunda vez a expressão em função de cada uma das variáveis, dessa forma determinam-se os coeficientes que compõem a matriz de rigidez elástica, dados pela expressão:

$$\begin{aligned} K_{E11} &= \frac{\partial^2 U_E}{\partial q_1^2} = \frac{EA}{L} \\ K_{E12} &= \frac{\partial^2 U_E}{\partial q_1 \partial q_2} = -\frac{EA}{L} \\ K_{E21} &= \frac{\partial^2 U_E}{\partial q_2 \partial q_1} = -\frac{EA}{L} \\ K_{E22} &= \frac{\partial^2 U_E}{\partial q_2^2} = \frac{EA}{L} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Portanto, a matriz de rigidez elástica para um elemento de treliça tem a forma:

$$[K_E] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Na Equação (3.28), E representa o módulo de elasticidade ou módulo de Young do material, A representa a área dessa seção, L é o comprimento do elemento. Além disso, ressalta-se que a matriz da Equação (3.28) coincide com a que se obtém pelo método da rigidez direta.

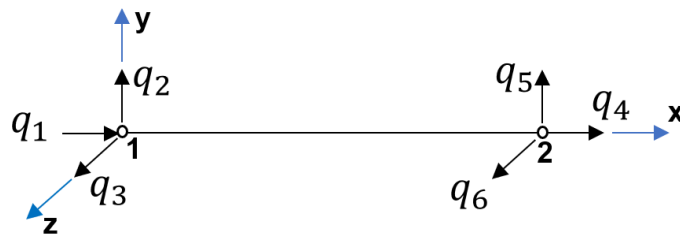
Neste trabalho optou-se pela formulação pelo método de energia em virtude da sua praticidade, além de possibilitar também a formulação da matriz de rigidez geométrica que será usada na análise de estabilidade.

Na formulação apresentada para a matriz de rigidez elástica foi considerado um elemento submetido apenas ao esforço axial e com apenas um grau de liberdade por nó no sistema de coordenadas local. No entanto, um elemento de treliça tridimensional assume qualquer posição no espaço, isto é, cada nó possui 3 graus de liberdade.

Deste modo, é necessário fazer a correlação em coordenadas globais para os graus de liberdade por meio de uma matriz de rotação e assim escrever a contribuição das matrizes de rigidez locais na matriz de rigidez global da estrutura. Essa matriz será demonstrada na seção 3.6.

Diferente da formulação apresentada para a matriz de rigidez elástica, para chegar à matriz de rigidez geométrica é necessário considerar também a deformação não-linear. Logo, será considerado um elemento genérico de treliça com três graus de liberdade por nó, referentes aos deslocamentos de translação em relação aos eixos x , y e z como ilustra a Figura 8.

Figura 8 – Elemento de treliça com três graus de liberdade por nó



Fonte: Autor (2025)

A matriz de rigidez geométrica é obtida por meio da parcela que contém a deformação não linear obtida da expressão (3.22), expressa por:

$$U_G = \frac{1}{2L} [(q_4 - q_1)^2 + (q_5 - q_2)^2 + (q_6 - q_3)^2] \quad (3.29)$$

Aplicando o Princípio da Mínima Energia Potencial na Equação (3.29), chega-se nas expressões:

$$\frac{\partial U_G}{\partial q_1} = -\frac{(q_4 - q_1)}{L} \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial U_G}{\partial q_2} = -\frac{(q_5 - q_2)}{L} \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial U_G}{\partial q_3} = -\frac{(q_6 - q_3)}{L} \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial U_G}{\partial q_4} = \frac{(q_4 - q_1)}{L} \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial U_G}{\partial q_5} = \frac{(q_5 - q_2)}{L} \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial U_G}{\partial q_6} = \frac{(q_6 - q_3)}{L} \quad (3.35)$$

Para determinar as constantes que multiplicam as variáveis, deriva-se pela segunda vez a expressão em função de cada uma das variáveis. Portanto, os coeficientes que compõem a matriz de rigidez geométrica, são dados pela Equação:

$$\begin{aligned} K_{G 11} &= \frac{\partial^2 U_G}{\partial q_1^2} = \frac{1}{L} & K_{G 41} &= \frac{\partial^2 U_G}{\partial q_4 \partial q_1} = -\frac{1}{L} \\ K_{G 14} &= \frac{\partial^2 U_G}{\partial q_1 \partial q_4} = -\frac{1}{L} & K_{G 44} &= \frac{\partial^2 U_G}{\partial q_4^2} = \frac{1}{L} \\ K_{G 22} &= \frac{\partial^2 U_G}{\partial q_2^2} = \frac{1}{L} & K_{G 52} &= \frac{\partial^2 U_G}{\partial q_5 \partial q_2} = -\frac{1}{L} \\ K_{G 25} &= \frac{\partial^2 U_G}{\partial q_2 \partial q_5} = -\frac{1}{L} & K_{G 55} &= \frac{\partial^2 U_G}{\partial q_5^2} = \frac{1}{L} \\ K_{G 33} &= \frac{\partial^2 U_G}{\partial q_3^2} = \frac{1}{L} & K_{G 63} &= \frac{\partial^2 U_G}{\partial q_6 \partial q_3} = -\frac{1}{L} \\ K_{G 36} &= \frac{\partial^2 U_G}{\partial q_3 \partial q_6} = -\frac{1}{L} & K_{G 66} &= \frac{\partial^2 U_G}{\partial q_6^2} = \frac{1}{L} \end{aligned} \quad (3.36)$$

Portanto, a matriz de rigidez geométrica para um elemento de treliça tem a forma:

$$[K_G] = N \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 & 0 & -\frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & -\frac{1}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & -\frac{1}{L} \\ -\frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Na Equação (3.37), N representa a força axial atuante no elemento e L é o comprimento do elemento.

Além disso, de acordo com o 1º Teorema de Castigliano, a força aplicada ao nó é igual a derivada parcial da energia de deformação em relação ao deslocamento no respectivo nó:

$$f_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} \quad (3.38)$$

Dessa forma, com base no teorema de Castigliano, tem-se:

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{\partial U}{\partial q_1} = -\frac{EA(q_2 - q_1)}{L} \\ f_2 &= \frac{\partial U}{\partial q_2} = \frac{EA(q_2 - q_1)}{L} \end{aligned} \quad (3.39)$$

Escrevendo a Equação (3.39) na forma matricial:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \quad (3.40)$$

Por fim, o sistema é expresso por:

$$[K] \cdot \{u\} = \{F\} \quad (3.41)$$

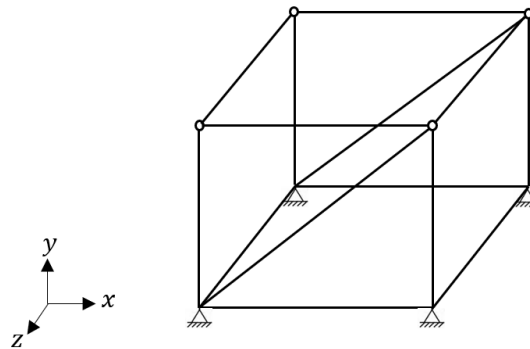
onde $\{u\}$ é o vetor de deslocamentos e $\{F\}$ é o vetor de esforços.

3.5. SISTEMA DE COORDENADAS

Para a análise é necessário definir dois sistemas de coordenadas, o sistema de coordenadas **local** e o sistema de coordenadas **global**.

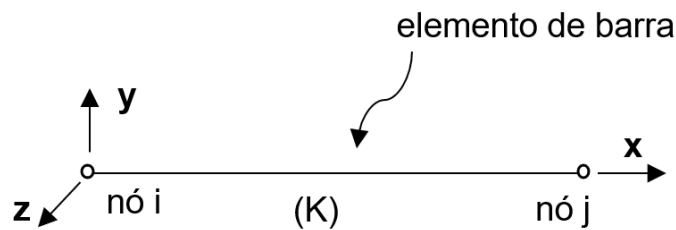
No sistema de coordenadas global serão referenciados os graus de liberdade de toda a estrutura, já no sistema de coordenadas local serão indicados os graus de liberdade de cada elemento da estrutura. Os sistemas de coordenadas global e local podem ser observados nas Figuras 9 e 10, respectivamente.

Figura 9 – Sistema de coordenadas global da estrutura



Fonte: Autor (2025)

Figura 10 – Sistema de coordenadas local da estrutura



Fonte: Autor (2025)

Cada nó da estrutura possui n graus de liberdade, que se referem aos possíveis deslocamentos que a estrutura pode sofrer. No caso de treliças tridimensionais cada um dos nós possui três graus de liberdade referentes aos deslocamentos de translação em relação aos três eixos coordenados. Cada barra é composta por dois nós, desta forma totalizando 6 graus de liberdade para um elemento.

A estrutura possui n graus de liberdade e cada grau possui uma equação de equilíbrio. A matriz de rigidez global da estrutura $[K_E]$ é obtida pela junção das contribuições das matrizes de rigidez locais de cada elemento. O sistema na forma matricial considerando as coordenadas globais é dado por:

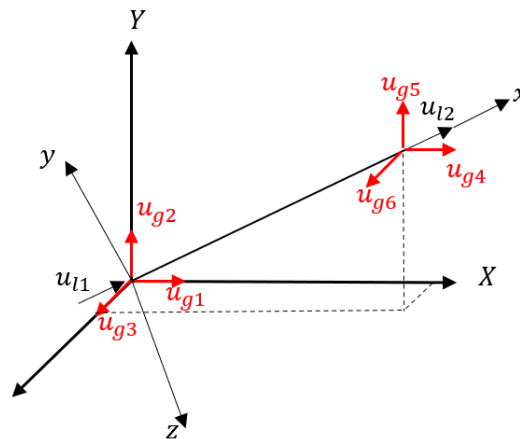
$$[K_E] \cdot \{u_E\} = \{F_E\} \quad (3.42)$$

onde $\{u_E\}$ é o vetor de deslocamentos da estrutura e $\{F_E\}$ é o vetor de esforços globais da estrutura.

3.6. MATRIZ DE ROTAÇÃO

Os elementos que constituem uma estrutura treliçada tridimensional podem estar orientados em qualquer direção no espaço, ou seja, o sistema de coordenadas local adotado para esses elementos pode não coincidir com o sistema de coordenadas global, conforme mostra a Figura 11. Para a mudança das coordenadas é usada a matriz de rotação.

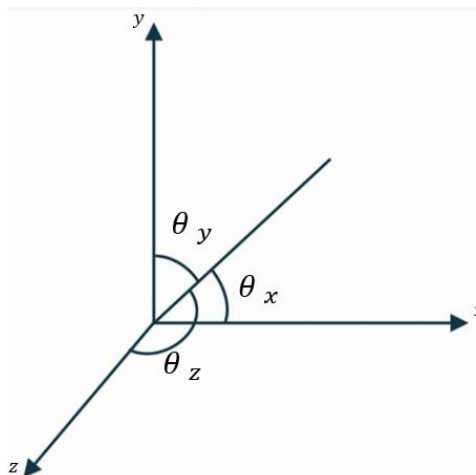
Figura 11 – Diferenças entre coordenadas do sistema local e global



Fonte: Adaptado de Nogueira (2017)

A montagem da matriz de rotação é feita por meio dos cossenos diretores, conforme mostra a Figura 12, sendo θ_x , θ_y e θ_z os ângulos que o elemento forma com os eixos globais x , y e z , respectivamente.

Figura 12 – Ângulos que o elemento forma com os eixos globais x , y e z



Fonte: Autor (2025)

O elemento representado na Figura 11 possui deslocamentos u_{l1} e u_{l2} em relação ao sistema de coordenadas locais (x, y, z). Cada nó possui 3 graus de liberdade que podem ser expressos nos eixos globais (X, Y, Z) através das componentes u_{g1} , u_{g2} , u_{g3} , u_{g4} , u_{g5} e u_{g6} por meio dos cossenos diretores.

$$\begin{aligned} u_{l1} &= C_x u_{g1} + C_y u_{g2} + C_z u_{g3} \\ u_{l2} &= C_x u_{g4} + C_y u_{g5} + C_z u_{g6} \end{aligned} \quad (3.43)$$

onde, $C_x = \cos\theta_x$, $C_y = \cos\theta_y$ e $C_z = \cos\theta_z$

Para determinar dos cossenos diretores, primeiramente determina-se o comprimento do elemento a partir das coordenadas nos nós inicial e final.

$$L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (3.44)$$

Deste modo, tem-se que os cossenos diretores são dados por:

$$\begin{aligned} C_x &= \frac{(x_2 - x_1)}{L} \\ C_y &= \frac{(y_2 - y_1)}{L} \\ C_z &= \frac{(z_2 - z_1)}{L} \end{aligned} \quad (3.45)$$

Rescrevendo o sistema da Equação (3.43) na forma matricial, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} u_{l1} \\ u_{l2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_x & C_y & C_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_x & C_y & C_z \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_{g1} \\ u_{g2} \\ u_{g3} \\ u_{g4} \\ u_{g5} \\ u_{g6} \end{Bmatrix} \quad (3.46)$$

ou de modo geral:

$$\{u_L\} = [R] \cdot \{u_{LG}\} \quad (3.47)$$

onde $\{u_L\}$ é o vetor de deslocamentos de cada elemento nas direções locais, $[R]$ é a matriz de rotação e $\{u_{LG}\}$ é o vetor de deslocamentos de cada elemento na direção global.

Multiplicando os dois lados da Equação (3.47) por $[R]^T$ à esquerda e observando que $[R]^T \cdot [R] = [I]$, sendo $[I]$ a matriz identidade, obtemos:

$$\{u_{LG}\} = [R]^T \cdot \{u_L\} \quad (3.48)$$

3.7. MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL

Como a estrutura está em equilíbrio, seus elementos também estão. Dessa forma, é possível expressar um sistema semelhante ao da Equação (3.42) para cada um dos elementos

que compõem a estrutura. Tem-se que, o sistema para um elemento em coordenadas locais é dado por:

$$[K_L] \cdot \{u_L\} = \{F_L\} \quad (3.49)$$

onde $[K_L]$ é a matriz da rigidez de cada elemento no sistema local, $\{u_L\}$ é o vetor de deslocamentos de cada elemento nas direções locais e $\{F_L\}$ é o vetor de esforços nodais de cada elemento nas direções locais.

De modo análogo, tem-se que o sistema de um elemento em coordenadas globais é dado por:

$$[K_{LG}] \cdot \{u_{LG}\} = \{F_{LG}\} \quad (3.50)$$

onde $[K_{LG}]$ é a matriz da rigidez de cada elemento no sistema global e $\{F_{LG}\}$ é o vetor de esforços nodais de cada elemento na direção global.

Ademais, as mudanças de coordenadas realizadas para o vetor de deslocamentos por meio da matriz de rotação expressa em (3.43) podem ser realizadas de maneira semelhante para o vetor de esforços, sendo expressa na forma matricial:

$$\{F_L\} = [R] \cdot \{F_{LG}\} \quad (3.51)$$

Substituindo as Equações (3.47) e (3.51) na Equação (3.49), obtém-se:

$$[K_L] \cdot [R] \cdot \{u_{LG}\} = [R] \cdot \{F_{LG}\} \quad (3.52)$$

Multiplicando-se ambos os termos da Equação (3.52) à esquerda por $[R]^T$ e lembrando que $[R]^T \cdot [R] = [I]$, obtém-se:

$$[R]^T \cdot [K_L] \cdot [R] \cdot \{u_{LG}\} = \{F_{LG}\} \quad (3.53)$$

Por último, relacionando as Equações (3.50) e (3.53), chega-se à expressão para as matrizes de rigidez de cada elemento no sistema de coordenadas global.

$$[K_{LG}] = [R]^T \cdot [K_L] \cdot [R] \quad (3.54)$$

Destaca-se que o procedimento da Equação (3.54) será implementado apenas na matriz elástica, pois diferente desta, a matriz de rigidez geométrica $[K_G]$ é invariante em relação as rotações, isto é,

$$[K_{GG}] = [R]^T \cdot [K_{GL}] \cdot [R] = [K_{GL}] \quad (3.55)$$

onde $[K_{GG}]$ e $[K_{GL}]$ são as matrizes de rigidez geométrica de cada elemento nos sistemas global e local, respectivamente. Portanto, a matriz é a mesma tanto no sistema local quanto no global.

O resultado descrito na Equação (3.55) ocorre pelo devido a matriz da Equação (3.37) possuir os termos não nulos em todas as direções x , y e z locais, ou seja, quando aloca-se os termos da matriz ela se torna uma escala da matriz identidade.

$$[K_{GL}] = \frac{N}{L} \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} & -I_{3 \times 3} \\ -I_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

Da Equação (3.56), tem-se que a multiplicação da Equação (3.55) ocorre do seguinte modo:

$$[K_{GG}] = [R]^T \cdot \frac{N}{L} \cdot [I] \cdot [R] \quad (3.57)$$

Como $[R]^T \cdot [I] \cdot [R] = [R]^T \cdot [R]$ e lembrando que $[R]^T \cdot [R] = [I]$. A Equação (3.57) resulta em:

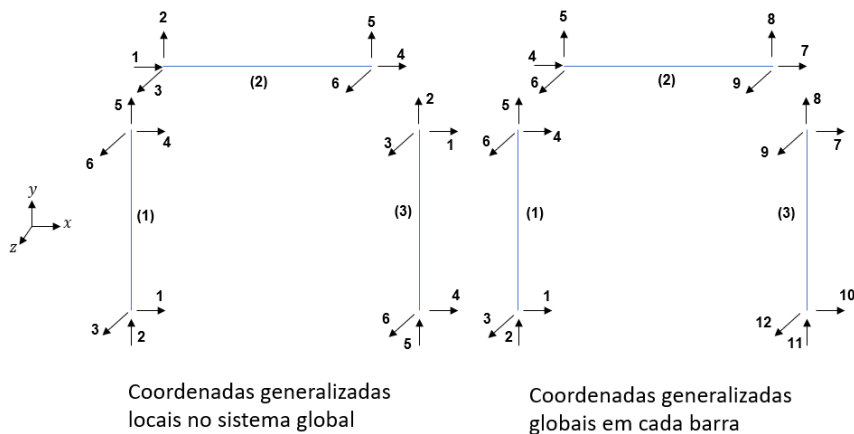
$$[K_{GG}] = [R]^T \cdot \frac{N}{L} [I] \cdot [R] = \frac{N}{L} [I] = [K_{GL}] \quad (3.58)$$

Como observa-se na Equação (3.58), a matriz geométrica continua a mesma ao aplicar as rotações, por isso no código implementado a rotação será aplicada apenas nas matrizes $[K_L]$ de cada elemento.

Possuindo as matrizes de rigidez de cada elemento no sistema de coordenadas global, é possível montar a matriz de rigidez elástica da estrutura $[K_E]$, que é obtida pela soma das matrizes de rigidez de cada elemento $[K_{LG}]$ por meio da regra da correspondência entre as coordenadas generalizadas locais e globais.

Esse procedimento consiste em somar as contribuições dos nós que são comuns a dois elementos da estrutura, como é o no caso de o nó final de um elemento ser o nó inicial de outro elemento. A Figura 13 mostra as correspondências entre as coordenadas generalizadas locais e globais.

Figura 13 – Correspondências entre as coordenadas generalizadas locais e globais



Cada elemento analisado separadamente possui seus respectivos graus de liberdade numerados de 1 a 3 para o nó 1 e de 4 a 6 para o nó 2, na estrutura como um todo, essa numeração acompanha a ordem de numeração dos nós. Deste modo, nota-se a correspondência entre os deslocamentos do nó final do elemento 1 e do nó inicial do elemento 2, que correspondem a um único nó nas coordenadas globais da estrutura.

Além disso, por meio da Figura 13 fica evidente a necessidade de que as coordenadas generalizadas locais e globais estejam em um único sistema de coordenadas, caso contrário, não seria possível essa relação.

As matrizes de rigidez de cada elemento são dadas por:

- Elemento 1:

$$(K_{LG})_1 = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & A_{26} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} & A_{46} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} & A_{56} \\ A_{61} & A_{62} & A_{63} & A_{64} & A_{65} & A_{66} \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

- Elemento 2:

$$(K_{LG})_2 = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} & B_{15} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} & B_{25} & B_{26} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} & B_{35} & B_{36} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} & B_{45} & B_{46} \\ B_{51} & B_{52} & B_{53} & B_{54} & B_{55} & B_{56} \\ B_{61} & B_{62} & B_{63} & B_{64} & B_{65} & B_{66} \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

- Elemento 3:

$$(K_{LG})_3 = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

As suas contribuições na matriz de rigidez global da estrutura são dadas por:

$$\begin{aligned}
& [K_E] \\
& = \begin{bmatrix}
A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} & 0 & \dots & 0 \\
A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & A_{26} & 0 & \dots & 0 \\
A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} & 0 & \dots & 0 \\
A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} + B_{11} & A_{45} + B_{12} & A_{46} + B_{13} & B_{14} & \dots & 0 \\
A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} + B_{21} & A_{55} + B_{22} & A_{56} + B_{23} & B_{24} & \dots & 0 \\
A_{61} & A_{62} & A_{63} & A_{64} + B_{31} & A_{65} + B_{32} & A_{66} + B_{33} & B_{34} & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} + C_{11} & \dots & C_{16} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{61} & \dots & C_{66}
\end{bmatrix} \quad (3.62)
\end{aligned}$$

Como pode ser observado na Equação (3.62), é feita a soma dos coeficientes dos nós que são comuns aos elementos, como no caso do nó final do elemento 1 e o nó inicial do elemento 2. Além disso, ressalta-se que a ordem da matriz é definida pela quantidade de nós da estrutura, seguindo a regra dos números de graus de liberdade, isto é, no caso apresentado na Figura 13, a estrutura possui 4 nós, deste modo, o número de graus de liberdade é de 12, portanto a matriz será 12x12.

No código implementado neste trabalho, a regra da correspondência é realizada por meio da relação entre os índices das linhas e colunas das matrizes local e global. Esse procedimento é descrito por meio da Equação (3.63).

$$K_E(i, j) = K_E(i, j) + K_{LG}(ii, jj) \quad (3.63)$$

O termo $K_{LG}(ii, jj)$ faz o mapeamento da matriz de rigidez local, ou seja, esse termo seleciona o índice da matriz K_{LG} de cada elemento.

Os índices de linha e coluna (ii, jj) são calculados da seguinte maneira:

$$ii = 3 \cdot (m - 1) + p$$

$$jj = 3 \cdot (n - 1) + q$$

onde

m e n : representam os nós do elemento;

p e q : representam os 3 graus de liberdade de cada nó.

A ideia consiste em:

$m = 1, 2$: percorre os dois nós do elemento de treliça (linhas da matriz);

$p = 1, 3$: percorre os 3 graus de liberdade do nó m ;

$n = 1, 2$: percorre novamente os nós da estrutura (colunas da matriz);

$q = 1, 3$: percorre os 3 graus de liberdade do nó n ;

- Índice da linha local (1 a 6)

Nó 1: $m = 1$, $ii = 3 \cdot (1 - 1) + p = p$, em que $p = 1, 3$. Deste modo, percorrendo os graus de liberdade 1, 2 e 3.

Nó 2: $m = 2$, $ii = 3 \cdot (2 - 1) + p = 3 + p$, em que $p = 1, 3$. Dessa forma, percorrendo os graus de liberdade 4, 5 e 6.

- Índice da coluna local (1 a 6)

Nó 1: $n = 1$, $jj = 3 \cdot (1 - 1) + q = q$, em que $q = 1, 3$. Assim, percorrendo os graus de liberdade 1, 2 e 3.

Nó 2: $n = 2$, $jj = 3 \cdot (2 - 1) + q = 3 + q$, em que $q = 1, 3$. Então, percorrendo os graus de liberdade 4, 5 e 6.

Realizado esse procedimento são selecionados todos os termos da matriz local de cada elemento.

O termo $K_E(i, j)$ faz o mapeamento dos graus de liberdade globais. Os índices de linha e coluna (i, j) são calculados da seguinte maneira:

$$i = 3 \cdot (g - 1) + p$$

$$j = 3 \cdot (h - 1) + q$$

g e h : representam os nós na posição global da estrutura;

p e q : representam os 3 graus de liberdade de cada nó.

A ideia pode ser descrita como:

- Índice da linha global:

A expressão $i = 3 \cdot (g - 1) + p$, converte o grau de liberdade local do nó para o grau de liberdade global.

Nó 1: $g = 1$, $i = 3 \cdot (1 - 1) + p = p$, em que $p = 1, 3$. Obtendo-se os graus de liberdade 1, 2 e 3.

Nó 2: $g = 2$, $i = 3 \cdot (2 - 1) + p = 3 + p$, em que $p = 1, 3$. Obtendo-se os graus de liberdade 4, 5 e 6.

Nó 3: $g = 3$, $i = 3 \cdot (3 - 1) + p = 6 + p$, em que $p = 1, 3$. Obtendo-se os graus de liberdade 7, 8 e 9.

- Índice da coluna global:

O procedimento é análogo para a expressão $j = 3 \cdot (h - 1) + q$

Para visualizar esse procedimento serão usados os elementos presentes da Figura 13, este que possui 4 nós e 3 elementos.

- Elemento 1 (conectado pelos nós 1 e 2):

Nó 1, $p = 1$ (deslocamento em x no nó 1):

$$i = 3 \cdot (1 - 1) + 1 = 1$$

Nó 2, $p = 1$ (deslocamento em x no nó 2):

$$j = 3 \cdot (2 - 1) + 1 = 4$$

Portanto, o termo $K_{LG1}(1, 4)$ do elemento 1 será somado na posição $K_E(1, 4)$ da matriz global coincidindo com a posição que o elemento A_{14} da equação (3.59) soma na equação (3.62).

- Elemento 2 (conectado pelos nós 2 e 3):

Nó 2, $p = 1$ (deslocamento em x no nó 2):

$$i = 3 \cdot (2 - 1) + 1 = 4$$

Nó 3, $p = 1$ (deslocamento em x no nó 3):

$$j = 3 \cdot (3 - 1) + 1 = 7$$

Portanto, o termo $K_{LG2}(1, 4)$ do elemento 2 será somado na posição $K_E(4, 7)$ da matriz global. Pode-se observar que é a mesma posição que o elemento B_{14} da Equação (3.60) soma na Equação (3.62).

Por fim, como mencionado é realizada a soma do termo correspondente à rigidez do elemento com o seu termo correspondente na matriz de rigidez global. Além disso, o processo descrito garante que, nos casos ilustrados na Figura 13 em que, em um nó é comum a dois elementos, isto é, em que ambos compartilham os mesmos graus de liberdade, é realizada soma da contribuição da rigidez de todos esses elementos.

O mesmo procedimento descrito na Equação (3.62) é usado para montar a matriz de rigidez geométrica da estrutura $[K_G]$,

3.8. VETOR DE ESFORÇOS

O vetor de forças nodais $\{F_E\}$ da estrutura é obtido alocando-se os valores dos esforços nodais $\{F_N\}$ na posição correspondente ao número do grau de liberdade global.

$$\{F_E\} = \begin{bmatrix} F_X^1 \\ F_Y^1 \\ F_Z^1 \\ F_X^2 \\ F_Y^2 \\ F_Z^2 \\ \dots \\ F_Z^n \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

3.9. CONDIÇÕES DE APOIO

Conforme descrito por Martha (2010), o sistema obtido não possui solução, isso ocorre pois na formulação não foram consideradas as condições de apoio da estrutura, resultando em uma matriz singular, ou seja, uma matriz que não possui inversa. Deste modo, a matriz de rigidez global da estrutura possui determinante nulo.

Neste trabalho adotou-se uma estrutura que possui apoios rígidos. Nesta seção será abordado o procedimento da diagonalização da linha e coluna da matriz descrito em Martha (2010), na qual adota-se para a imposição de apoios a técnica de zeros e um. Por meio desse processo a matriz de rigidez e o vetor de esforços da estrutura são modificados.

O procedimento consiste em zerar a linha e coluna da matriz de rigidez correspondente ao grau de liberdade de uma direção i restringida devido a um apoio (deslocamento nulo), na diagonal principal correspondente atribui-se um valor “1”, além disso, na posição correspondente ao grau de liberdade é atribuído o valor nulo no vetor de forças. Esse processo deve ser feito para cada grau de liberdade restringido. Após esse processo obtém-se o sistema a seguir:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & \dots & 0 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & \dots & 0 \\ & & & \dots & \\ & & & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & 0 & & & \\ & & & & \dots & & & \dots \\ 0 & & & & 0 & \dots & K_{nn} & \dots \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \dots \\ U_{i-1} \\ U_i \\ U_{i+1} \\ \dots \\ U_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \dots \\ F_{i-1} \\ 0 \\ F_{i+1} \\ \dots \\ F_n \end{Bmatrix} \quad (3.65)$$

Deste modo, a dimensão da matriz de rigidez é mantida, isto é, o número de equações do sistema continua o mesmo em relação ao total de graus de liberdade, o vetor U segue sendo a incógnita e a resolução do sistema para a linha que foi alterada da matriz chega-se um valor de $U_i = 0$.

Conforme a Equação (3.65), o processo modifica a matriz de rigidez e o vetor de esforços. Deste modo, para preservar a matriz de rigidez e o vetor de forças originais, as linhas e colunas alteradas por esse processo foram guardadas numa outra matriz $[K_R]$ e num vetor $\{F_R\}$.

3.10. ESFORÇOS INTERNOS

Para obter a matriz $[K_G]$ descrita na Equação (3.37), é necessário definir os esforços internos dos elementos. Por meio desses esforços é possível alocar os coeficientes que compõem a matriz. Nesta seção será abordada o procedimento adotado no presente trabalho.

Primeiramente faz-se necessário determinar o vetor de deslocamentos de cada elemento no sistema de coordenadas global $\{u_{LG}\}$, este que, é definido por meio do vetor de deslocamentos $\{u_E\}$, obtido por meio da resolução do sistema da Equação (3.42). A determinação do vetor $\{u_{LG}\}$ é feita por meio da regra da correspondência, ela é realizada com um raciocínio semelhante ao descrito na Seção 3.7. Descrito por meio da Equação (3.66).

$$u_{LG}(ii) = u_E(i) \quad (3.66)$$

A ideia consiste em:

O termo do lado esquerdo $u_{LG}(ii)$ guarda as posições dos deslocamentos no vetor local. Sendo calculado do seguinte modo:

$$ii = 3 \cdot (j - 1) + k$$

onde

j : representa os nós do elemento;

k : representa os 3 graus de liberdade de cada nó.

A ideia consiste em:

$j = 1, 2$: percorre os dois nós do elemento de treliça;

$k = 1, 3$: percorre os 3 graus de liberdade do nó j ;

O termo do lado direito $u_E(i)$ busca o deslocamento correspondente ao nó indicado no vetor de deslocamentos globais. Sendo calculado do seguinte modo:

$$i = 3 \cdot (m - 1) + p$$

onde

m : representa os nós na posição global da estrutura;

p : representam os 3 graus de liberdade de cada nó m .

Em sequência determina-se o vetor de deslocamentos de cada elemento no sistema de coordenadas local $\{u_L\}$ por meio da matriz de rotação, conforme a Equação (3.47). Por fim, determina-se o vetor de esforços no sistema local usando a Equação (3.50).

3.11. RESOLUÇÃO DOS SISTEMAS

3.11.1. RESOLUÇÃO DO SISTEMA LINEAR

No presente trabalho foi utilizada uma rotina de resolução de sistemas lineares da biblioteca Intel oneMKL para resolver o sistema da Equação (3.42), considerando $[K_E]$ e $\{F_E\}$ já modificadas pelas condições de apoio.

A rotina resolve para $\{u_E\}$ o sistema de equações lineares $[K_E]. \{u_E\} = \{F_E\}$, onde $[K_E]$ é uma matriz quadrada simétrica positiva definida $n \times n$, $\{F_E\}$ é um vetor que possui os valores do lado direito da equação e $\{u_E\}$ é o vetor que possui as soluções do sistema.

O processo se dá inicialmente por fatorar a matriz positiva simétrica $[K_E]_{n \times n}$ em uma matriz triangular superior pela decomposição de Cholesky, que transforma a matriz $[K_E]_{n \times n}$ em um produto de matrizes triangulares. Deste modo, resolve-se o sistema de equações com a forma fatorada de $[K_E]_{n \times n}$.

3.11.2. RESOLUÇÃO DO SISTEMA DE AUTOVALOR

No presente trabalho foi utilizada uma rotina da biblioteca Intel oneMKL que calcula todos os autovalores e os autovetores de um problema generalizado de autovalor para resolver o sistema da Equação (3.14), considerando $[K_E]$ e $[K_G]$ já modificadas pelas condições de apoio.

4. PROGRAMA COMPUTACIONAL

4.1. CONSIDERAÇÕES GERAIS

No presente trabalho foi desenvolvido um programa computacional que realiza a análise linear de estabilidade em estruturas treliçadas tridimensionais. O programa desenvolvido é capaz calcular e fornecer os resultados referentes aos deslocamentos nodais, cargas críticas de instabilidade e os modos de instabilidade da estrutura.

A funcionalidade do programa consiste inicialmente na leitura de dados fornecidos pelo usuário em um arquivo de texto (.txt), e posteriormente por meio das rotinas de cálculo, produz arquivos com os resultados da análise.

O programa foi elaborado em linguagem Fortran, uma linguagem de programação muito usada quando se pretende realizar diversos cálculos matemáticos devido a sua velocidade no processamento desses cálculos.

Na próxima seção será apresentado de forma detalhada o funcionamento das rotinas e sub-rotinas de cálculo.

4.2. FUNCIONAMENTO DO PROGRAMA

A estrutura do código é composta por uma rotina principal, módulos e sub-rotinas. A rotina principal é a responsável por chamar as sub-rotinas de cada módulo na ordem desejada para a realização dos cálculos. Esses módulos foram divididos da seguinte forma:

- **Declaração de variáveis**

Neste módulo ficam declaradas as variáveis que serão utilizadas nos procedimentos realizados no código, contemplando os dados de entrada fornecidos pelo usuário, tais como coordenadas, conectividade, propriedades geométricas e mecânicas da estrutura, carregamento e condições de contorno, bem como as variáveis auxiliares.

- **Entrada de dados**

Neste módulo está a sub-rotina responsável pela leitura dos dados presentes em um arquivo de texto padrão em formato (.txt) fornecido pelo usuário.

- **Cálculos**

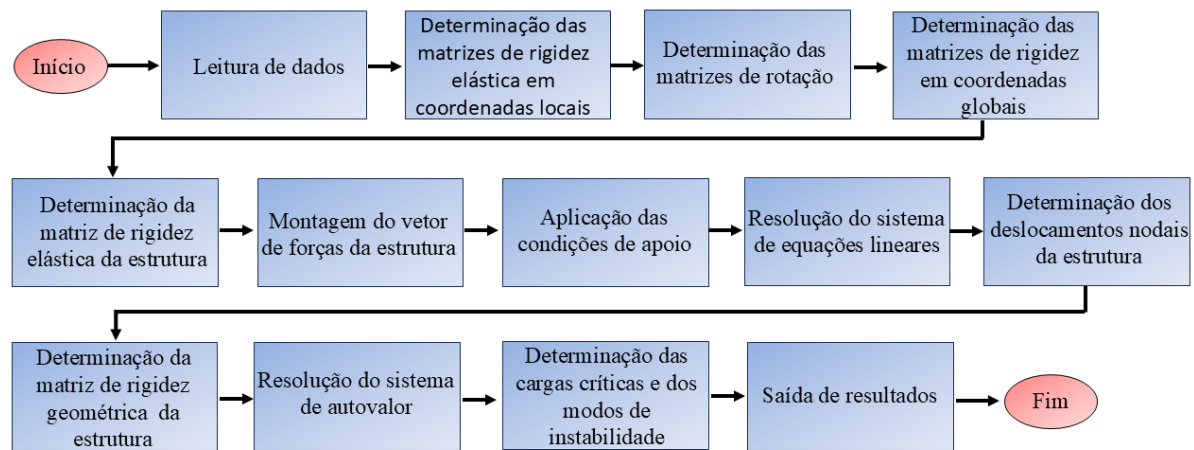
Neste módulo está presente a maior parte do programa desenvolvido, nele está contido todas as sub-rotinas de cálculos apresentados no Capítulo 3.

- **Saída de dados**

Neste módulo está condito a sub-rotina que gera os arquivos de texto com os dados gerados pelo programa, assim como os arquivos “.vtk” que permitem visualizar o comportamento da estrutura.

Para um melhor entendimento do funcionamento do programa, a Figura 14 mostra um fluxograma que ilustra em sequência todo o processo executado.

Figura 14 – Fluxograma do programa



Fonte: Autor (2025)

Na primeira sub-rotina é feita a leitura dos dados fornecidos pelo usuário. O arquivo de texto (.txt) possui um formato padrão, nele estão conditos todos os dados relacionados as disposições das coordenadas, conectividade dos elementos, condições de contorno (vinculações e carregamento externo) e os dados geométricos. Essa sub-rotina é responsável por ler e armazenar todos os dados nas variáveis declaradas.

A matriz de rigidez em coordenadas locais $[K_L]$ é obtida por meio da Equação (3.28). Para a montagem dessa matriz é necessário o módulo de elasticidade E do elemento, fornecido no arquivo de entrada e dos dados geométricos do material. A área A também é fornecida no arquivo de entrada, já o comprimento da barra L foi calculado por meio da Equação (3.44).

A matriz de rotação $[R]$ é determinada por meio do processo descrito na seção 3.6. Esse procedimento é realizado para cada elemento da estrutura.

Possuindo as matrizes $[K_L]$ e $[R]$ para cada elemento, obtém-se a as matrizes de rigidez locais em coordenadas globais $[K_{LG}]$ por meio da Equação (3.54).

Em sequência, por meio da regra da correspondência descrita na Equação (3.62) é feita a montagem da matriz de rigidez elástica da estrutura $[K_E]$.

O vetor de forças da estrutura $\{F_E\}$ foi obtido alocando-se por meio da regra da correspondência todos os vetores de forças nodais dos elementos $\{F_N\}$.

Finalizadas essas etapas são aplicadas as condições de contorno fornecidas no arquivo de entrada por meio do procedimento descrito na seção 3.9.

De posse da matriz $[K_E]$ e do vetor $\{F_E\}$ modificados pelas condições de contorno usa-se uma rotina de resolução de sistemas lineares para obter o vetor de deslocamentos $\{u_E\}$ conforme descrito na seção 3.10.

Com a solução do sistema, transforma-se o vetor de deslocamentos da estrutura em um vetor de deslocamentos de cada elemento nas direções globais, e em seguida, nas direções locais para enfim obter-se o vetor de forças de cada elemento nas direções locais usando a Equação (3.50).

Possuindo o vetor de forças de cada elemento $\{F_L\}$ determina-se a matriz de rigidez geométrica $[K_G]$ por meio da Equação (3.37).

Em seguida, por meio da regra da correspondência descrita na Equação (3.62) é feita a montagem da matriz de rigidez geométrica da estrutura $[K_G]$.

De posse das matrizes $[K_E]$ e $[K_G]$ modificados pelas condições de contorno usa-se uma rotina que calcula todos os autovalores e os autovetores de um problema generalizado de autovalor para obter os autovalores (fatores de carga crítica) e os autovetores (modos de instabilidade).

Por fim, a última etapa do programa é a saída dos resultados. Os resultados referentes aos deslocamentos dos nós da estrutura e dos fatores de carga crítica são apresentados em tabelas em arquivos com formato “.txt”.

Para visualizar os deslocamentos da estrutura e os modos de instabilidade são gerados outros arquivos em formato “.vtk”, que são visualizados com o auxílio do *software* ParaView que possui licença gratuita (Ahrens; Geveci; Law, 2005).

5. EXEMPLOS NUMÉRICOS

Neste capítulo serão apresentados os resultados obtidos neste trabalho.

Para verificar o funcionamento do programa desenvolvido serão abordados três exemplos de autoria própria, primeiramente um exemplo mais simples para validar o programa, em seguida, um exemplo com mais elementos e por fim, um modelo que simula uma torre treliçada.

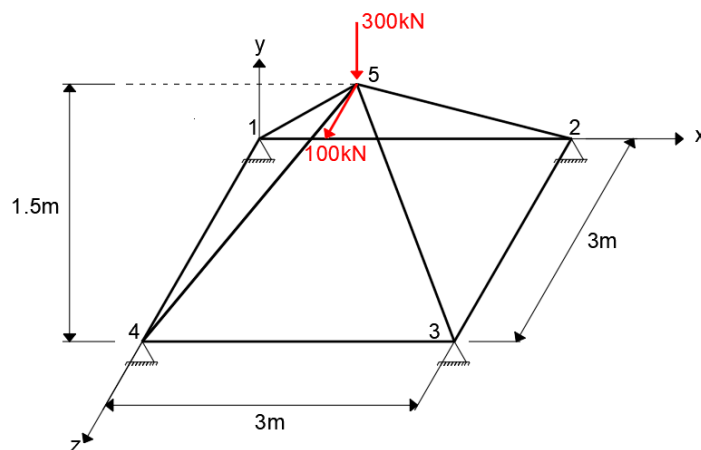
Para os três exemplos o programa calculou os valores das cargas críticas da estrutura e em seguida esses resultados foram comparados com os fornecidos pelo *software* comercial MASTAN2 (Ziemian; Mcguire; Liu, 2000).

Em seguida para melhor visualização do comportamento da estrutura, verificou-se os modos de instabilidade por meio do *software* de pós-processamento ParaView (Ahrens; Geveci; Law, 2005).

5.1. EXEMPLO 1

Para o primeiro exemplo adotou-se a treliça ilustrada na Figura 15, as barras da estrutura possuem módulo de elasticidade $E = 75 \text{ GPa}$ e área da seção transversal $A = 0,011 \text{ m}^2$. Com esses dados deseja-se calcular os deslocamentos dos nós, as cargas críticas e os modos de instabilidade da estrutura quando submetida as forças concentradas de -300 kN na direção vertical do eixo y e 100 kN na direção horizontal do eixo z no nó 5. As coordenadas dos nós estão presentes na Tabela 1. O arquivo de entrada padrão é apresentado no APÊNDICE A.

Figura 15 – Estrutura para o Exemplo 1.



Fonte: Autor (2025)

Tabela 1 – Coordenadas dos nós do Exemplo 1

Nó	X (m)	Y (m)	Z (m)
1	0,0	0,0	0,0
2	3,0	0,0	0,0
3	3,0	0,0	3,0
4	0,0	0,0	3,0
5	1,5	1,5	1,5

Fonte: Autor

Os nós 1 e 3, estão restringidos nas direções x e y, já os nós 2 e 4 estão com as direções y e z restringidas. Os resultados dos deslocamentos fornecidos pelo programa desenvolvido são apresentados na Tabela 2. O arquivo de saída com os resultados é apresentado no APÊNDICE B.

Tabela 2 – Deslocamentos nodais fornecidos pelo programa para o Exemplo 1

Nó	Dx (mm)	Dy (mm)	Dz (mm)
1	0,0	0,0	-0,181818
2	0,181818	0,0	0,0
3	0,0	0,0	0,363636
4	-0,363636	0,0	0,0
5	0,0	-0,98129	0,327098

Fonte: Autor

Os resultados fornecidos pelo *software* MASTAN2 estão apresentados na Tabela 3.

Tabela 3 – Deslocamentos nodais fornecidos pelo *software* MASTAN2 para o Exemplo 1

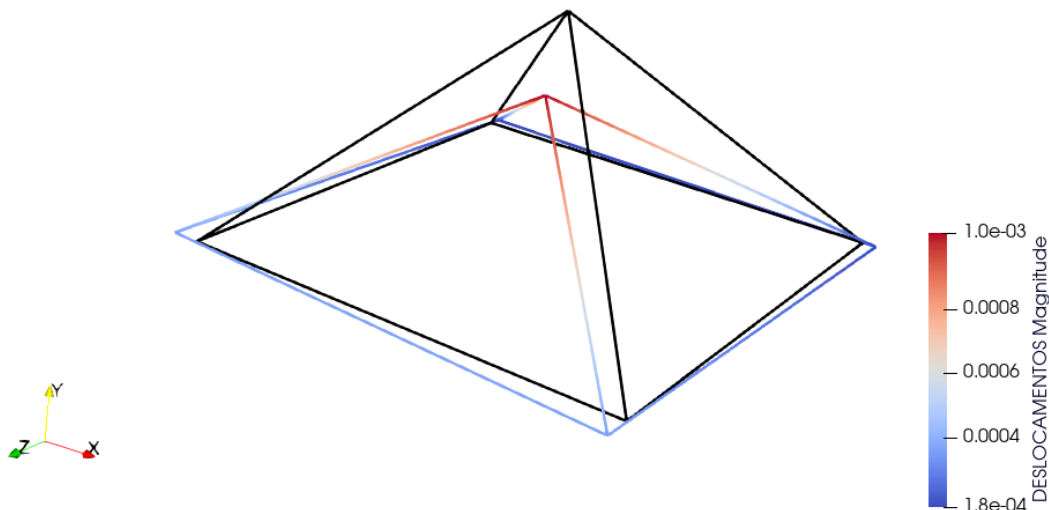
Nó	Dx (mm)	Dy (mm)	Dz (mm)
1	0,0	0,0	-0,1818
2	0,1818	0,0	0,0
3	0,0	0,0	0,3636
4	-0,3636	0,0	0,0
5	0,0	-0,9813	0,3271

Fonte: MASTAN2

Analisando os resultados fornecidos pelo programa desenvolvido, nota-se que são os mesmos fornecidos pelo *software* MASTAN2, sendo a única diferença a quantidade de casas decimais.

Por meio do arquivo “.vtk” gerado pelo programa desenvolvido, visualizou-se os deslocamentos dos nós da estrutura com o auxílio do *software* ParaView, esses deslocamentos podem ser visualizados na Figura 16.

Figura 16 – Deslocamentos dos nós da estrutura do Exemplo 1



Fonte: Autor (2025)

Pelos dados fornecidos do programa e pelo arquivo de visualização pode-se notar que como era esperado os nós com as direções restritas não possuem deslocamentos, enquanto nas suas direções livres ocorreram deslocamentos pequenos. Além disso, o nó 5 submetido as forças externas apresenta um deslocamento “vermelho” conforme a legenda indicando que é um deslocamento maior comparado aos outros, tendo-se deslocado na direção do carregamento.

Os resultados dos fatores de cargas críticas, que são variáveis adimensionais fornecidos pelo programa desenvolvido e pelo programa MASTAN2, bem como a diferença relativa entre os resultados são apresentados na Tabela 4. O arquivo de saída com os resultados é apresentado no APÊNDICE C.

Tabela 4 – Comparação dos resultados para o Exemplo 1

Modo	Código	MASTAN2	Dif. Relativa (%)
1	1503,7821	1503,7821	0,0
2	1785,8501	1785,8501	0,0
3	1833,9331	1833,9331	0,0

Fonte: Autor

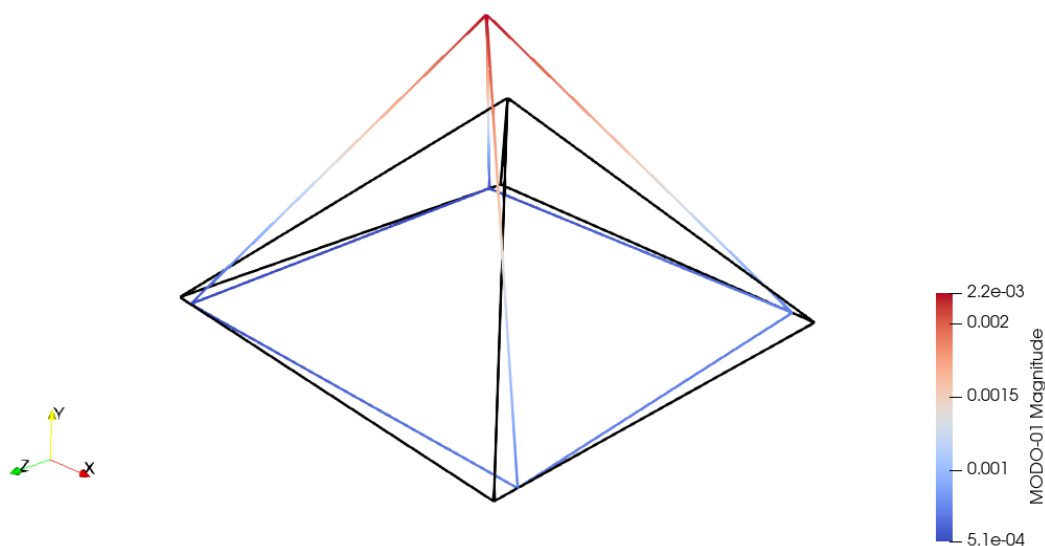
Na Tabela 4 estão representados os valores dos três primeiros fatores de carga crítica, que nada mais são do que os valores adimensionais que, se multiplicados à carga a qual a estrutura está submetida, faz com que ocorra a instabilidade.

Para a análise de estabilidade, foram analisados os 3 primeiros modos de flambagem, pois o primeiro modo corresponde ao menor dos autovalores, este que, é o fator de carga crítica, isto é, a estrutura perde a estabilidade se este fator for atingido. Os demais modos de flambagem representam configurações que ocorreriam após o carregamento ultrapassar esse valor, sendo assim, não ocorrendo antes da estrutura colapsar.

Pela diferença relativa mostrada na Tabela 4, pode-se concluir que, os resultados são os mesmos fornecidos pelo MASTAN2. Portanto, constata-se que o programa está funcionando corretamente.

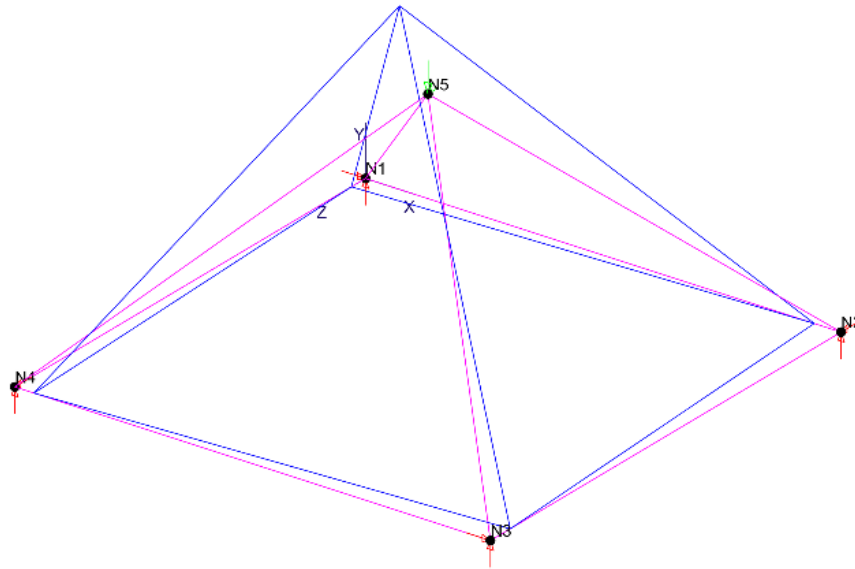
Além do mais, por meio do arquivo “.vtk” gerado pelo programa desenvolvido, pôde-se visualizar os modos de instabilidade da estrutura com o auxílio do *software* ParaView e comparo-os com os fornecidos pelo MASTAN2. A Figuras 17 e 18 mostram os resultados para o primeiro modo.

Figura 17 – Primeiro modo de instabilidade fornecidos pelo programa para o Exemplo 1



Fonte: Autor (2025)

Figura 18 – Primeiro modo de instabilidade fornecidos pelo MASTAN2 para o Exemplo 1



Fonte: MASTAN2

Pela comparação entre as Figuras 17 e 18, nota-se que, os resultados para o primeiro modo de instabilidade são semelhantes, desde modo, validando não só o resultado do fator de carga crítica, bem como, o comportamento da estrutura quando esse carregamento é atingindo.

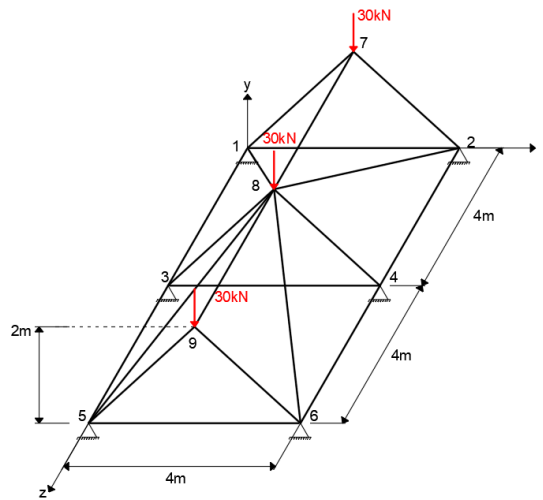
No próximo exemplo será verificado um modelo de treliça com mais elementos de modo a verificar a funcionalidade do programa desenvolvido em relação a estruturas maiores.

5.2. EXEMPLO 2

Para o segundo exemplo deseja-se calcular os deslocamentos dos nós, as cargas críticas e os modos de instabilidade da estrutura ilustrada na Figura 19. As barras possuem módulo de elasticidade $E = 1000 \text{ MPa}$ e área da seção transversal $A = 0,011 \text{ m}^2$. As coordenadas dos nós estão presentes na Tabela 5.

Os nós 1 e 5, estão restringidos nas direções x e y , já os nós 2, 3, 4 e 6 estão com as direções y e z restringidas. Os resultados fornecidos pelo programa são apresentados na Tabela 6.

Figura 19 – Estrutura para o Exemplo 2



Fonte: Autor (2025)

Tabela 5 – Coordenadas dos nós do exemplo 2

Nó	X (m)	Y (m)	Z (m)
1	0,0	0,0	0,0
2	4,0	0,0	0,0
3	0,0	0,0	4,0
4	4,0	0,0	4,0
5	0,0	0,0	8,0
6	4,0	0,0	8,0
7	2,0	2,0	0,0
8	2,0	2,0	4,0
9	2,0	2,0	8,0

Fonte: Autor

Tabela 6 – Deslocamentos nodais fornecidos pelo programa para o Exemplo 2

Nó	Dx (mm)	Dy (mm)	Dz (mm)
1	0,0	0,0	-1,128
2	6,019	0,0	0,0
3	-2,820	0,0	0,0
4	4,044	0,0	0,0
5	0,0	0,0	1,128
6	6,018	0,0	0,0
7	3,009	-10,723	9,79E-016
8	1,881	-8,282	9,79E-018
9	3,009	-10,723	1,05E-015

Fonte: Autor

Os resultados fornecidos pelo *software* MASTAN2 estão apresentados na Tabela 7.

Tabela 7 – Deslocamentos nodais fornecidos pelo *software* MASTAN2 para o Exemplo 2.

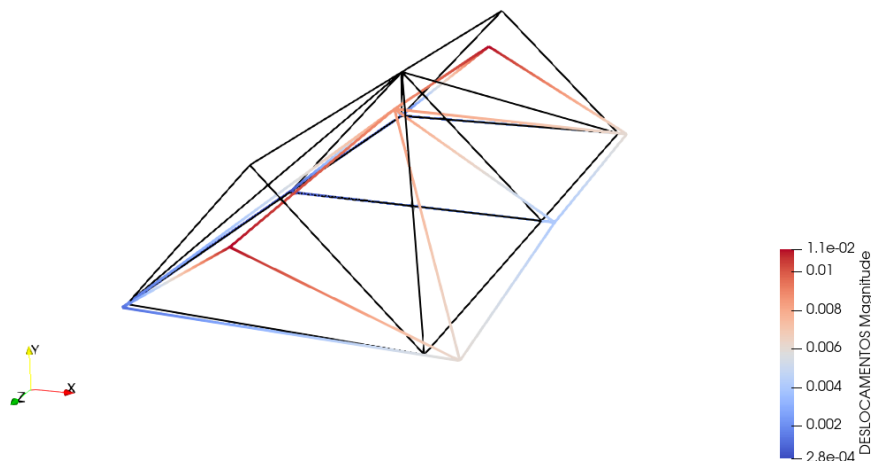
Nó	Dx (mm)	Dy (mm)	Dz (mm)
1	0,0	0,0	-1,128
2	6,019	0,0	0,0
3	-2,820	0,0	0,0
4	4,044	0,0	0,0
5	0,0	0,0	1,128
6	6,018	0,0	0,0
7	3,009	-10,723	-6,746E-016
8	1,881	-8,282	-6,746E-016
9	3,009	-10,723	-6,626E-016

Fonte: MASTAN2

Pela comparação dos resultados fornecidos pelo programa desenvolvido e pelo *software* MASTAN2, nota-se que são praticamente todos os mesmos, com algumas exceções em casas decimais na ordem de 10^{-20} , diferenças dessa ordem de grandeza na engenharia não são significativas e podem ocorrer devido a possíveis arredondamentos durante a realização dos cálculos realizados.

Visualiza-se na Figura 20 os deslocamentos nodais do Exemplo 2 por meio no arquivo “.vtk” gerado a partir do programa desenvolvido.

Figura 20 – Deslocamentos dos nós da estrutura do Exemplo 2



Fonte: Autor (2025)

Por meio da Figura 20 nota-se que os nós 7 e 9, que estão submetidos a cargas concentradas, apresentam deslocamentos maiores em relação ao nó 8, submetido à mesma carga, porém com mais barras para auxiliar na sua estabilidade. Além disso, pode-se notar que os demais nós da estrutura apresentam deslocamentos nas direções que não foram restritas.

Em seguida, calculou-se os fatores de carga crítica da estrutura, os resultados fornecidos pelo programa desenvolvido e pelo programa MASTAN2, assim como, à diferença relativa entre os resultados são apresentados na Tabela 8.

Tabela 8 – Comparação dos resultados para o Exemplo 2

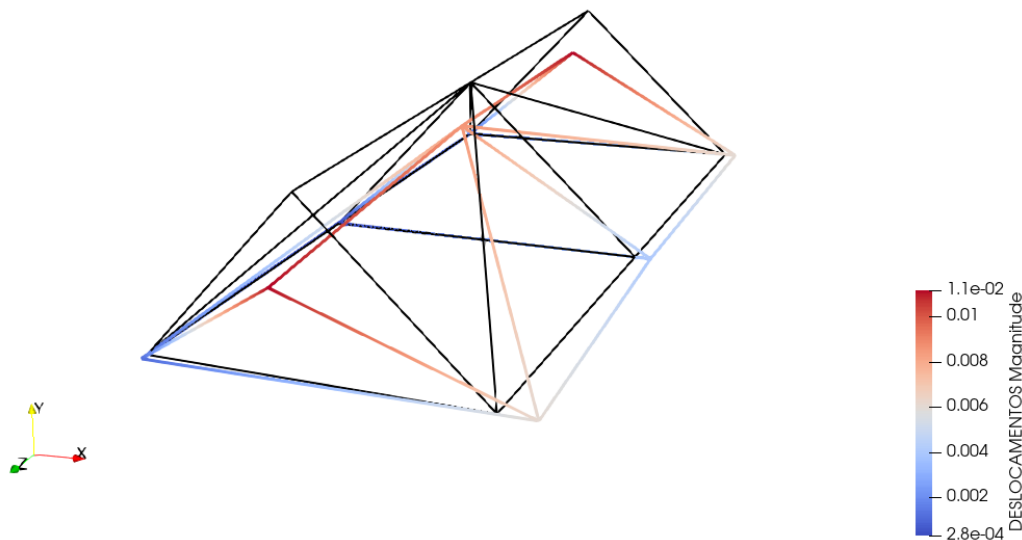
Modo	Código	MASTAN2	Dif. Relativa (%)
1	80,3445	80,3445	0,0
2	148,4317	148,4317	0,0
3	191,7744	191,7744	0,0

Fonte: Autor

De modo análogo ao primeiro exemplo, comparou-se os fatores de carga críticas referentes aos três primeiros modos de instabilidade, e conforme ilustrado na Tabela 8 os resultados obtidos são os mesmos comparados ao MASTAN2.

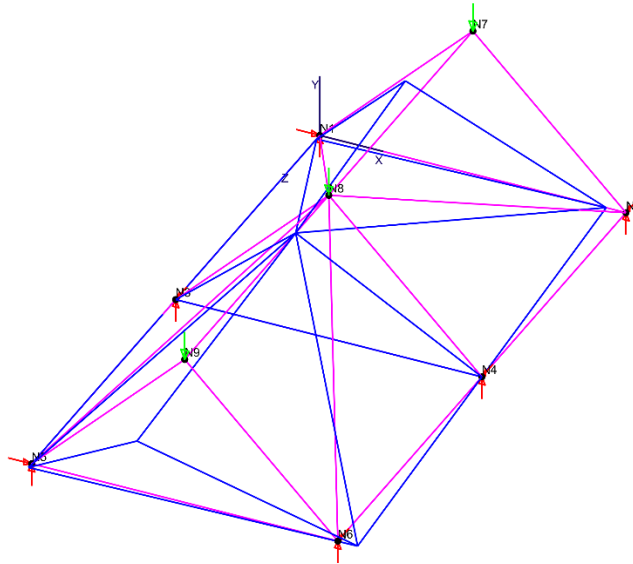
Por fim, visualiza-se os modos de instabilidade do por meio no arquivo “.vtk” gerado conforme mostra a Figura 21, já a Figura 22 mostra o resultado fornecido pelo MASTAN2.

Figura 21 – Primeiro modo de instabilidade fornecidos pelo programa para o Exemplo 2



Fonte: Autor (2025)

Figura 22 – Primeiro modo de instabilidade fornecidos pelo MASTAN2 para o Exemplo 2



Fonte: MASTAN2

Analisando as Figuras 21 e 22, nota-se a semelhança entre o primeiro modo gerado pelos dois programas.

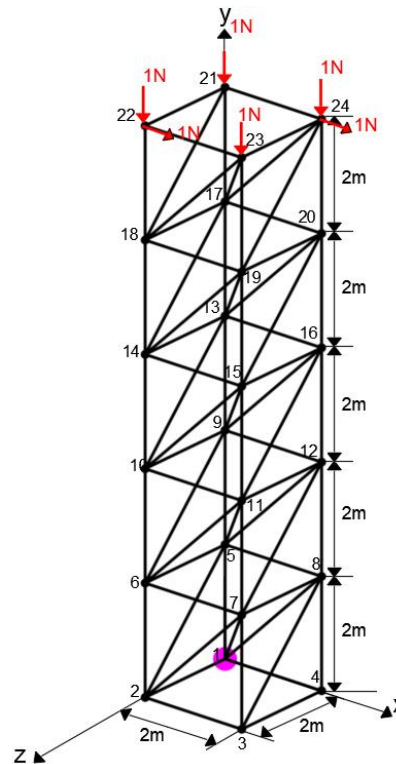
No próximo exemplo será verificado um modelo de treliça mais robusto de modo a verificar capacidade do programa desenvolvido. Portanto, deste exemplo conclui-se que para estruturas com maior quantidade de elementos o programa atinge as expectativas.

5.3. EXEMPLO 3

Para o terceiro exemplo, deseja-se calcular, as cargas críticas e os modos de instabilidade da estrutura modelada como uma torre treliçada com altura de 10 metros de altura ilustrada na Figura 23. A torre possui 24 nós e 69 elementos. Todas as suas barras possuem módulo de elasticidade $E = 75 \text{ GPa}$ e área da seção transversal $A = 0,015 \text{ m}^2$. As coordenadas dos nós estão presentes na Tabela 9.

Os nós de 1 à 5, estão restringidos nas três direções x e y, e z. Para este último exemplo consideraram-se cargas unitárias para que os fatores de carga crítica obtidos coincidam com a carga crítica de instabilidade.

Figura 23 – Estrutura para o Exemplo 3



Fonte: Autor (2025)

Os resultados dos fatores de cargas críticas fornecidos pelo programa desenvolvido e pelo programa MASTAN2 para o Exemplo 3, bem como, à diferença relativa entre os resultados são apresentados na Tabela 10.

Tabela 9 – Coordenadas dos nós do exemplo 3

Nó	X (m)	Y (m)	Z (m)
1	0,0	0,0	0,0
2	0,0	0,0	2,0
3	2,0	0,0	2,0
4	2,0	0,0	0,0
5	0,0	2,0	0,0
6	0,0	2,0	2,0
7	2,0	2,0	2,0
8	0,0	4,0	0,0
9	0,0	4,0	2,0
10	0,0	4,0	2,0
11	2,0	4,0	2,0
12	2,0	4,0	0,0

Nó	X (m)	Y (m)	Z (m)
13	0,0	6,0	0,0
14	0,0	6,0	2,0
15	2,0	6,0	2,0
16	2,0	6,0	0,0
17	0,0	8,0	0,0
18	0,0	8,0	2,0
19	2,0	8,0	2,0
20	2,0	8,0	0,0
21	0,0	10,0	0,0
22	0,0	10,0	2,0
23	2,0	10,0	2,0
24	2,0	10,0	0,0

Fonte: Autor

Tabela 10 – Comparação dos resultados do Exemplo 3

Modo	Código	MASTAN2	Dif. Relativa (%)
1	14970001,9450	14970017,3365	0,0001
2	22821537,9011	22821629,0686	0,0004
3	30191692,6000	30191707,9402	0,00005

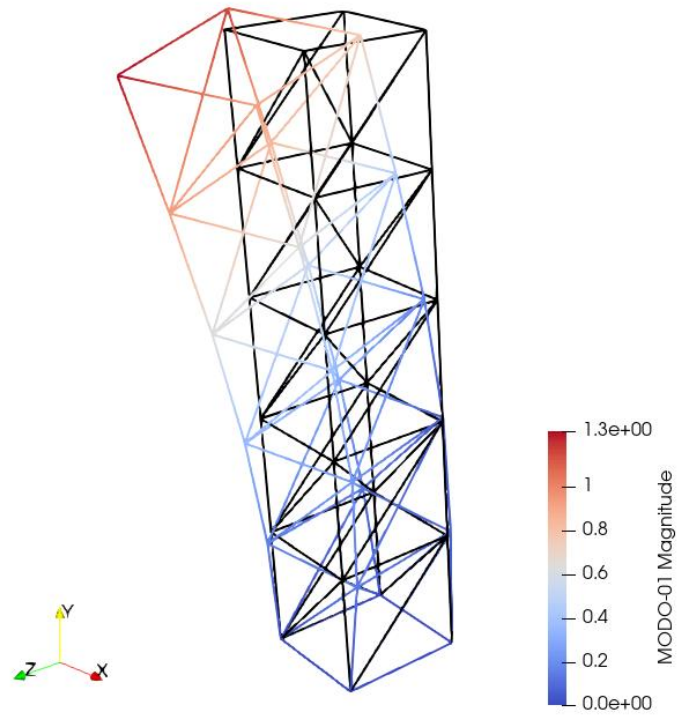
Fonte: Autor

Pela comparação dos resultados fornecidos pelo programa desenvolvido e pelo *software* MASTAN2, nota-se que são praticamente todos os mesmos, possuindo diferenças relativas inferiores 0,1%.

Diferenças dessa ordem de grandeza são desprezíveis na Engenharia Civil e podem ocorrer pela precisão numérica e arredondamentos, visto que, durante o processo são realizados diversos cálculos, e ao armazenar alguns desses valores com um número limitado de casas decimais durante o processo, podem introduzir variações, mesmo que mínimas na montagem das matrizes e consequentemente no resultado final que são os autovalores.

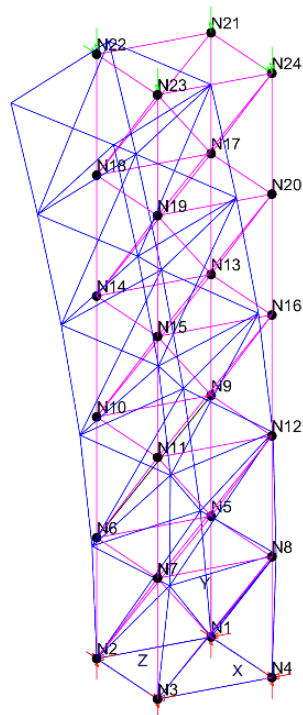
Por fim, comparou-se o primeiro modo de instabilidade fornecido pelos dois programas.

Figura 24 – Primeiro modo de instabilidade fornecidos pelo programa para o Exemplo 3



Fonte: Autor (2025)

Figura 25 – Primeiro modo de instabilidade fornecidos pelo MASTAN2 para o Exemplo 3



Fonte: MASTAN2

Através das Figura 24 e 25, percebe-se a semelhança entre os modos de instabilidade fornecidos pelo programa desenvolvido e pelo MASTAN2. Além disso, destaca-se por meio do modelo de uma torre treliçada é possível visualizar de maneira mais clara o comportamento da estrutura ao atingir o carregamento que causa a instabilidade.

Portanto, com base nos exemplos propostos, conclui-se que o programa está funcionando corretamente e apresentando resultados satisfatórios, possuindo uma alta precisão nos cálculos dos deslocamentos nodais, dos fatores de carga crítica e dos modos de instabilidade. Ademais, com a comparação com um programa comercial que realiza essas análises estruturais pôde-se constatar a confiabilidade dos resultados fornecidos pelo programa desenvolvido no presente trabalho.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

6.1. CONCLUSÕES

Neste trabalho foi desenvolvido um programa computacional que realiza a análise linear de estabilidade de estruturas treliçadas tridimensionais usando o Método dos Elementos Finitos.

Para atingir este objetivo estudou-se a formulação do método voltada para estruturas reticuladas modeladas como treliças tridimensionais. De modo geral, usou-se a formulação encontrada na literatura, buscando-se entender e explicar o passo a passo desde a expressão da energia potencial total, até a formulação das matrizes de rigidez e por fim, o sistema de autovalor.

A validação da ferramenta desenvolvida no presente trabalho foi realizada por meio da comparação com os resultados fornecidos pelo *software* comercial MASTAN2, como pode ser observado no capítulo 5, a qual mostra que a diferença entre eles é considerada desprezível, demonstrando a precisão da ferramenta computacional desenvolvida.

Os estudos realizados no desenvolvimento deste trabalho contribuíram para a ampliação dos conhecimentos teóricos referentes a análise estrutural, com ênfase na estabilidade de treliças, além disso, contribuíram também para expandir os conhecimentos relacionados a programação.

Durante a construção do código, foi possível alinhar os conhecimentos teóricos e computacionais, visto que, na sua elaboração é necessário não apenas entender o método e seu funcionamento, mas também pensar em como fazer para que o computador realize tais operações de forma otimizada e eficaz.

Por fim, os resultados obtidos confirmam que o programa aqui desenvolvido é capaz de realizar com precisão a análise de estabilidade de treliças tridimensionais, podendo ser usado futuramente como uma ferramenta didática e para futuras pesquisas relacionadas ao tema.

6.2. SUGESTÃO PARA TRABALHOS FUTUROS

Este estudo apresentou resultados satisfatórios. No entanto, devido as diversas análises que podem ser realizadas na Engenharia Civil, sempre é possível aprimorar um programa já desenvolvido para sofisticar ainda mais as análises por ele realizadas, assim como também a

adição de outros procedimentos. Sendo assim, apresenta-se a seguir algumas sugestões para trabalhos futuros:

- Criação de uma interface intuitiva, facilitando a interação do usuário;
- Implementação dos efeitos de não-linearidade geométrica;
- Implementação de opção para consideração de ações indiretas, como por exemplo a variação de temperatura e recalque de apoio;
- Incluir no programa seções transversais e de materiais usuais, permitindo uma maior facilidade ao usuário.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AHRENS, J.; GEVECI, B.; LAW, C. **ParaView: An End-User Tool for Large Data Visualization**. In *Visualization Handbook*. Elsevier, 2005.

AZEVEDO, A. F. M. **Método dos Elementos Finitos**. 1.ed. Porto: Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 2003.

BAŽANT, Z. P.; CEDOLIN, L. **Stability of Structures: Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories**. Singapore: World Scientific, 2010.

BONET, J.; WOOD, R. D. **Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis**. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

BRYAN, G. H. On the stability of elastic systems. **Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Mathematical and physical sciences**, v. 6, 1888.

BURGOS, R. B. **Avaliação de cargas críticas e comportamento pós-crítico inicial de pórticos planos**. 2005. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Potifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2005. Disponível em < <https://web.tecgraf.puc-rio.br/press/publication/Burgos2005/Burgos2005.pdf>>. Acesso em: 05 de Abril de 2025.

CHAPMAN, S. J. **Fortran for Scientists and Engineers**. 4 ed. New York: McGraw-Hill, 2018.

DIAS, D. S. **Análise matricial de estruturas reticuladas utilizando elementos lineares de treliça, viga e pórtico**. 2022. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia Civil) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, Cajazeiras, 2022. Disponível em:< <https://repositorio.ifpb.edu.br/handle/177683/1882>>. Acesso em: 05 de Abril de 2025.

HIROTOMI, V. I. W. **Formulação do método dos elementos finitos para a análise de treliças tridimensionais**. 2014. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia Civil) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão, 2014. Disponível em:< <https://riut.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/6395>>. Acesso em: 05 de Abril. 2025.

KASSIMALI, A. **Matrix Analysis of Structures**. 2 ed. Stamford: Cengage Learning, 2012.

KEDWARD, L. et al., The State of Fortran. *Computing in Science & Engineering*, v. 24, n. 2, p. 63–72, mar. 2022. DOI: 10.1109/MCSE.2022.3159862.

LYAPUNOV, A. M. *Problème général de la stabilité du mouvement*, Harkov, 1982.

MARTHA, L. F. **Análise de Estruturas: Conceitos e Métodos Básicos**. 1 ed. Rio de Janeiro: Campus/Elsevier, 2010.

- NOGEIRA, L. G. O. **Ferramenta em ambiente excel para análise estrutural de treliças espaciais pelo método dos elementos finitos**. 2017. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia Civil) – Universidade Federal Rural do Semi Árido, Mossoró, 2017.
- OLIVEIRA, P. L. **Análise matricial de estruturas pelo método da rigidez**. 2017. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia Civil) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Jataí, 2017. Disponível em:<<http://repositorio.ifg.edu.br:8080/handle/prefix/563>>. Acesso em: 06 de Abril de 2025.
- REIS, A.; CAMOTIM, D. **Estabilidade estrutural**. Lisboa: McGraw-Hill, 2000.
- RODRIGUES, E. F. O. **Desenvolvimento de ferramenta computacional para realização de análise de estabilidade de estruturas treliçadas**. Relatório final de iniciação científica PIBIC/UFAM– Faculdade de Tecnologia, Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2024.
- SILVA, J. R. B. **Análise de Pilares-Parede de Concreto Armado Via Método Dos Elementos Finitos**. 2022. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2022. Disponível em <<https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/44595>>. Acesso em: 29 de Agosto de 2025.
- SOARES, H. B. **Desenvolvimento de um programa para análise de pórticos tridimensionais considerando a flexibilidade das fundações**. 2016. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia Civil) – Faculdade de Tecnologia, Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2016.
- SOARES, H. B. **Desenvolvimento de ferramenta computacional para análise de colapso estrutural pelo Método dos Elementos Finitos Posicional**. 2021. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2021. Disponível em:<<https://producaocientifica.eesc.usp.br/set/1260>>. Acesso em:<29 de Agosto de 2025.
- SORIANO, H. L. **Elementos finitos: formulação e aplicação na estática e dinâmica das estruturas**. Rio de Janeiro, RJ: Ciência Moderna, 2009.
- SORIANO, H. L. **Método de Elementos finitos em Análise de Estruturas**. 1.ed. São Paulo. Edusp, 2003.
- SOUTHWELL, R. V. On the general theory of elastic stability. **Philosophical Transaction of the Royal Society of London**, n. 213, p. 187-244, 1913.
- SÜSSEKIND, J. C. **Curso de Análise Estrutural – Deformações em Estruturas. Método das Forças**. vol 2. 4 ed. Porto Alegre: Globo, 1980.
- SÜSSEKIND, J. C. **Curso de Análise Estrutural – Método das Deformações. Processo de Cross**. vol 3. 7 ed. Rio de Janeiro: Globo, 1987.
- SUZUKI, M. S. **Análise estrutural de treliças espaciais no software excel®utilizando o método dos elementos finitos**. 2012. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em

Engenharia Mecânica) – Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2012. Disponível em: <<https://repositorio.unesp.br/entities/publication/4c4d0c38-91c3-4c4b-8168-f3d68cca600f>>. Acesso em: 15 de Abril. 2025.

TIMOSHENKO, S. P. **History of Strength of Materials**. New York: McGraw-Hill, 1953.

TIMOSHENKO, S. P. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, Taylor & Francis, v. 41, n. 245, p. 744–746, 1921.

ZIEMIAN, R. D.; MCGUIRE, W.; LIU, S. **MASTAN2** - An interactive structural analysis program that provides preprocessing, analysis, and postprocessing capabilities, 2000.

APÊNDICE A – FORMATO PADRÃO DO ARQUIVO DE ENTRADA

Neste apêndice apresenta-se o formato padrão do arquivo de entrada “.txt” que deve ser fornecido pelo usuário para que o programa leia todas as informações corretamente. O arquivo apresentado corresponde ao arquivo preenchido usado na seção 5.1 para o Exemplo 1.

Número de nós (n):

5

Coordenadas dos nós:

Nó	x	y	z
1	0.0	0.0	0.0
2	3.0	0.0	0.0
3	3.0	0.0	3.0
4	0.0	0.0	3.0
5	1.5	1.5	1.5

Número de elementos de barras:

8

Vinculação das barras:

Elemento	nó i	nó j
1	1	2
2	2	3
3	3	4
4	1	4
5	1	5
6	2	5
7	3	5
8	4	5

Quantidade de materiais:

1

Características dos materiais:

Material	E
1	75.0E+9

Quantidade de seções transversais:

1

Características das seções:

Seção	A
1	0.011

Aplicação dos materiais aos elementos:

Barra	Material	Seção
1	1	1

2	1	1
3	1	1
4	1	1
5	1	1
6	1	1
7	1	1
8	1	1

Número de nós com esforços concentrados:

1

Esforços concentrados (direções globais):

Nó	Fx	Fy	Fz
5	0.	-300000.	100000.

Quantidade de nós com apoios fixos:

4

Apoios fixos: (1=restringido, 0=livre)

Nó	Dx	Dy	Dz
1	1	1	0
2	0	1	1
3	1	1	0
4	0	1	1

Por meio do exemplo ressalta-se que, nenhuma linha que contém texto ou a marca de separação deve ser excluída, visto que, na elaboração do programa elas foram consideradas. Sendo assim, qualquer alteração dessa natureza resultará em um erro na leitura de dados e conseqüentemente no não funcionamento do programa.

As numerações dos parâmetros da estrutura, como nós e elementos deve ser de 1 até o número fornecido.

Por exigência da linguagem usada no programa a separação das casas decimais deve ser informada por um ponto “.”. Caso sejam usadas vírgulas “,” o programa não interpretará como separação de casas decimais, fornecendo resultados incorretos.

Após a informação da quantidade de algum parâmetro, seja o número de nós, número de elementos etc. Deve-se criar uma quantidade de linhas igual para descrever as informações do parâmetro. Por exemplo, após indicar que a estrutura possui 5 nós, deve-se criar cinco linhas para definir as coordenadas de cada um dos nós. Caso contrário o programa não funcionará.

A separação das informações que estão presentes na mesma linha como no caso das coordenadas x, y e z de cada nó deve ser separada por espaços em branco.

O programa não distingue quais unidades são usadas, ou seja, os cálculos são realizados apenas com os valores fornecidos e cabe ao usuário o preenchimento dos valores que correspondem as unidades desejadas para o fornecimento dos resultados corretos.

APÊNDICE B – FORMATO DO ARQUIVO DE SAÍDA DOS DESLOCAMENTOS NODAIS

Neste apêndice apresenta-se o arquivo (.txt) contendo os deslocamentos dos nós fornecido pelo programa desenvolvido no presente trabalho. Os resultados são referentes ao Exemplo 1 da seção 5.1, cujo arquivo de entrada foi apresentado no APÊNDICE A. Ressalta-se que os valores estão em metros.

Deslocamentos por Nó

Nó	Dx	Dy	Dz
1	0.0000000000	0.0000000000	-0.0001818182
2	0.0001818182	0.0000000000	0.0000000000
3	0.0000000000	0.0000000000	0.0003636364
4	-0.0003636364	0.0000000000	0.0000000000
5	0.0000000000	-0.0009812935	0.0003270978

APÊNDICE C – FORMATO DO ARQUIVO DE SAÍDA DAS CARGAS CRÍTICAS

Neste apêndice apresenta-se o arquivo (.txt) contendo os fatores de carga crítica fornecido pelo programa desenvolvido no presente trabalho. Os resultados são referentes ao Exemplo 1 da seção 5.1.

Tabela de Cargas Críticas de Flambagem

Modo	Fator de carga crítica
1	1503.7821
2	1785.8501
3	1833.9331