UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS UFAM
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA - ICET
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA E FÍSICA

SEQUÊNCIAS E SÉRIES DE FUNÇÕES: ASPECTOS TEÓRICOS E PROPOSTAS DIDÁTICAS AO ENSINO DE CÁLCULO

HENRIQUE BARATA CASTRO

ITACOATIARA - AM
2025

HENRIQUE BARATA CASTRO

SEQUÊNCIAS E SÉRIES DE FUNÇÕES: ASPECTOS TEÓRICOS E PROPOSTAS DIDÁTICAS AO ENSINO DE CÁLCULO

Monografia de Graduação apresentada ao Instituto de Ciências Exatas e Tecnologia da Universidade Federal do Amazonas como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciatura em Ciências: Matemática e Física.

Orientadora: Profa. Dra. Wanessa Ferreira Tavares
Coorientador: Prof. Dr. Fernando Junior Soares dos Santos

ITACOATIARA - AM
2025

Monografia de Graduação sob o título *Sequências e Séries de Funções: Aspectos Teóricos e Propostas Didáticas ao Ensino de Cálculo* apresentada por Henrique Barata Castro e aceita pelo Instituto de Ciências Exatas e Tecnologia da Universidade Federal do Amazonas, sendo aprovada por todos os membros da banca examinadora abaixo especificada:

Profa. Dra. Wanessa Ferreira Tavares (Orientadora)
Universidade Federal do Amazonas - UFAM

Prof. Dr. Deimer José Júlio Aleans (Membro interno)
Universidade Federal do Amazonas - UFAM

Prof. Dr. Leonardo da Silva Brito (Membro interno)
Universidade Federal do Amazonas - UFAM

Itacoatiara, 12 de Dezembro de 2025

Dedico aos meus pais Luiz Henrique e Zenilda Jerônima e aos meus irmãos Carlos André, Rosa Daiana, José Luiz, Mileidy Yraci e Luize Videl.

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus, que sempre esteve comigo, fortalecendo-me e guiando meus passos ao longo desta jornada. Expresso minha profunda gratidão aos meus pais, que jamais mediram esforços para me apoiar, incentivar e oferecer tudo o que esteve ao seu alcance quando mais precisei. Aos meus irmãos, pela torcida constante e pelas palavras de motivação. Agradeço também aos meus amigos, que tornaram essa caminhada mais leve e agradável, e a todas as pessoas que passaram pela minha vida, inclusive aquelas com quem convivi ao longo da graduação, pois cada uma contribuiu, à sua maneira, para minhas experiências, crescimento pessoal e aprendizados. Registro ainda meu agradecimento especial à minha namorada, pelo apoio, incentivo e compreensão em todos os momentos. Finalmente, agradeço aos meus orientadores, cuja orientação, dedicação e direcionamento foram essenciais para a construção e conclusão deste trabalho.

Vejo vitórias e hoje eu olho pra trás
E a minha frente eu sei existem muito mais
Eu sei que minha jornada aqui só começou
Ao longo dessa estrada sozinho não estou
Canção Só o Começo

Resumo

O presente trabalho apresenta um estudo abrangente sobre sequências numéricas, séries numéricas, sequências de funções e séries de funções, articulando os fundamentos da Análise Real com propostas metodológicas voltadas ao ensino desses conteúdos nos cursos iniciais de Cálculo. Inicialmente, são discutidas definições formais, propriedades fundamentais e critérios clássicos de convergência, com o intuito de estabelecer uma base conceitual sólida e coerente. A partir disso, com o intuito de amenizar ou extinguir possíveis dificuldades encontradas pelos estudantes na compreensão desses temas, o trabalho propõe abordagens didáticas que fazem uso de materiais manipuláveis, representações visuais e recursos tecnológicos, buscando favorecer a aprendizagem significativa e reduzir os obstáculos presentes no ensino tradicional. Tais metodologias permitem que o estudante visualize padrões, estabeleça relações conceituais e transite com maior segurança entre representações concretas e formais, contribuindo para uma compreensão mais profunda dos fenômenos matemáticos envolvidos. A análise das propostas demonstra que a integração entre rigor teórico e estratégias didáticas inovadoras constitui um caminho eficiente para superar dificuldades recorrentes e promover o engajamento dos alunos. Ao final, conclui-se que o uso de materiais concretos, figuras explicativas e softwares de apoio podem potencializar o ensino de sequências e séries, tornando-o mais acessível, intuitivo e coerente com as necessidades da educação contemporânea. O estudo aponta, ainda, perspectivas para pesquisas futuras que envolvam a aplicação prática das propostas apresentadas e sua avaliação em contextos reais de sala de aula, contribuindo para o aprimoramento contínuo das práticas pedagógicas no ensino de Matemática.

Palavras-chave: Sequências, Séries, Proposta didática.

Abstract

The present work offers a comprehensive study of numerical sequences, numerical series, sequences of functions, and series of functions, articulating the foundations of Real Analysis with methodological proposals aimed at teaching these topics in introductory Calculus courses. Initially, formal definitions, fundamental properties, and classical criteria of convergence are discussed, with the purpose of establishing a solid and coherent conceptual basis. From this, in order to mitigate or eliminate possible difficulties encountered by students in understanding these subjects, the work proposes didactic approaches that make use of manipulable materials, visual representations, and technological resources, seeking to promote meaningful learning and reduce the obstacles present in traditional instruction. Such methodologies allow students to visualize patterns, establish conceptual relationships, and move more confidently between concrete and formal representations, contributing to a deeper understanding of the mathematical phenomena involved. The analysis shows that the integration between theoretical rigor and innovative teaching strategies constitutes an effective path to overcoming recurring difficulties and fostering student engagement. In conclusion, it is stated that the use of concrete materials, explanatory figures, and support software can enhance the teaching of sequences and series, making it more accessible, intuitive, and coherent with the needs of contemporary education. The study also points to future research perspectives involving the practical application of the proposed approaches and their evaluation in real classroom contexts, contributing to the continuous improvement of pedagogical practices in Mathematics education.

Keywords: Sequences, Series, Didactic proposal.

Sumário

1 INTRODUÇÃO 17

2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS 19
2.1 Sequências Numéricas 19
2.2 Séries Numéricas 25
2.3 Sequências e Séries de Funções 32

3 METODOLOGIA 43
3.1 Fundamentos 43
3.2 Proposta Didática para o Ensino de Sequências Numéricas . . . 43
3.3 Proposta Didática para o Ensino de Séries Numéricas 46
3.4 Proposta Didática para o Ensino de Sequências de Funções . . . 48
3.5 Proposta Didática para o Ensino de Séries de Funções 52

4 ANÁLISE E DISCUSSÃO 57
4.1 Contribuições da Abordagem Teórica 57
4.2 Análise de Materiais Didáticos 57
4.3 Potencial Pedagógico dos Materiais Manipuláveis 58
4.4 Avaliação das Propostas Didáticas 59
4.5 Considerações Sobre as Limitações 60

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS 61

REFERÊNCIAS 63

1 Introdução

O estudo de sequências e séries, tanto numéricas quanto de funções, ocupa um lugar central na Análise Real e nos cursos introdutórios de Cálculo. Esses conceitos constituem a base para diversos tópicos avançados, como continuidade, limites, derivadas, integrais, equações diferenciais e representação de funções por séries de potências. Apesar disso, sua natureza abstrata e o rigor formal exigido para o entendimento desses objetos matemáticos frequentemente se tornam obstáculos na aprendizagem, especialmente entre estudantes dos períodos iniciais da graduação e "A matemática como qualquer outro elemento se faz necessário compreendê-la"(BONFIM, 2019, p. 4). Nesse contexto, torna-se relevante investigar caminhos didáticos que favoreçam a compreensão intuitiva e formal desses conteúdos.

Contextualização e Definição do Problema

Nas práticas pedagógicas tradicionais, o ensino de sequências e séries costuma ser apresentado de forma predominantemente algébrica e formalista, o que pode gerar um distanciamento entre o estudante e o significado dos conceitos envolvidos. Os alunos, muitas vezes, enfrentam dificuldades para compreender ideias fundamentais como limite, convergência, comportamento assintótico, propriedades analíticas e relação entre representações numéricas e funcionais. Esse cenário é agravado pela ausência de recursos didáticos que facilitem a construção visual e experimental desses conceitos, tornando o aprendizado excessivamente abstrato. “O ensino de Matemática predominante em todos os níveis escolares é muito teórico e necessita de prática.” (DAMAZIO; MADEIRA, 2019, p. 3)

Diante disso, o problema central que norteia este trabalho consiste em: como tornar o estudo de sequências e séries mais acessível, significativo e intuitivo para os estudantes, mantendo o rigor matemático necessário? Surge, assim, a necessidade de propor metodologias que conciliem a formalidade da Análise Real com estratégias didáticas que favoreçam visualização, manipulação e experimentação, como o uso de palitos, formas geométricas e tecnologias assistivas pois os recursos didáticos podem ser variados e vão desde uma simples embalagem até o mais sofisticado computador (PASSOS; TAKAHASHI, 2018). Tais recursos permitem evidenciar padrões, estimular o raciocínio indutivo e aproximar conteúdos abstratos de representações concretas, ampliando a compreensão dos estudantes e favorecendo a aprendizagem significativa.

Objetivo Geral

Analisar os fundamentos teóricos de sequências e séries numéricas e de funções e apresentar propostas metodológicas que contribuam para o ensino e aprendizagem desses conteúdos nos cursos iniciais de Cálculo.

Objetivos Específicos:

- Revisar e sistematizar definições, propriedades e resultados fundamentais sobre sequências e séries numéricas.

- Investigar conceitos, exemplos e teoremas referentes à convergência de sequências e séries de funções, com destaque para convergência uniforme e séries de potências.

- Elaborar uma sequência didática, incluindo atividades e possíveis recursos de visualização, que vise a facilitar a compreensão de sequências e séries, numéricas e de funções.

- Relacionar tais propostas a princípios da aprendizagem significativa e à construção indutiva de conceitos matemáticos.

Este trabalho está organizado em cinco capítulos. O Capítulo 1, correspondente à introdução, apresenta a contextualização, a problemática, os objetivos e a estrutura geral da pesquisa. No Capítulo 2 são expostos os fundamentos teóricos sobre sequências e séries numéricas além de sequências e séries de funções, abrangendo definições formais, propriedades essenciais e critérios de convergência, discutindo a convergência pontual e uniforme, as séries de potências e suas principais implicações analíticas. O Capítulo 3 descreve as propostas metodológicas desenvolvidas, detalhando o uso de materiais manipuláveis, representações visuais e tecnologias assistivas no ensino dos conteúdos apresentados. Em seguida, o Capítulo 4 realiza a análise e discussão dos resultados, estabelecendo conexões entre os fundamentos teóricos e a prática pedagógica. Por fim, o Capítulo 5 reúne as considerações finais, destacando as contribuições alcançadas, as limitações do estudo e possíveis direções para investigações futuras.

2 Fundamentos Teóricos

O presente capítulo reúne os fundamentos teóricos essenciais para a compreensão de sequências numéricas, séries numéricas, sequências de funções e séries de funções, estabelecendo a base conceitual necessária para o desenvolvimento das análises e propostas metodológicas apresentadas ao longo deste trabalho. Os conteúdos aqui apresentados foram elaborados com base nas exposições clássicas de (LIMA, 2014) e nas contribuições de (BARTLE; SHERBERT, 2020), que fornecem o rigor formal e a estrutura conceitual fundamental para o estudo desses tópicos da Análise Real.

2.1 Sequências Numéricas

Definição 2.1.1 *Uma **sequência de números reais** (ou uma sequência em $\mathbb{R}$) é uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definida no conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ dos números naturais e tomando valores no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais.*

Escreve-se (x_n) para indicar a sequência cujo n-ésimo termo é x_n. Sequências são frequentemente definidas fornecendo uma fórmula para o n-ésimo termo ou termo geral x_n. Por exemplo, podemos definir a sequência de recíprocos dos números pares escrevendo

$$(x_n) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \dots\right),$$

embora um método mais satisfatório seja especificar a fórmula para o termo geral e escrever

$$(x_n) = \left(\frac{1}{2n}\right)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{ou} \quad (x_n) = \frac{1}{2n}.$$

Exemplo 2.1.1 *Se $b \in \mathbb{R}$, a sequência $(x_n) = (b, b, b, \dots)$, cujos termos são todos iguais a b, é chamada de sequência constante b. Assim, a sequência constante cujos termos são todos iguais a 1 é a sequência $(1, 1, 1, \dots)$, e a sequência constante cujos termos são todos iguais a 0 é a sequência $(0, 0, 0, \dots)$.*

Exemplo 2.1.2 *Se $b \in \mathbb{R}$, então $(x_n) = (b^n)$ é a sequência $(x_n) = (b, b^2, b^3, \dots, b^n, \dots)$. Em particular, se $b = \frac{1}{2}$, então obtemos a sequência*

$$\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots \frac{1}{2^n}, \dots\right).$$

Exemplo 2.1.3 *A célebre sequência de Fibonacci $F = (f_n)$ é dada pela definição indutiva*

$$f_1 = 1, \quad f_2 = 1, \quad f_{n+1} = f_{n-1} + f_n \quad (n \geq 2).$$

Assim, cada termo após o segundo é a soma de seus dois predecessores imediatos. Os primeiros dez termos de F são vistos como $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots)$.

Definição 2.1.2 *Uma sequência (x_n) é dita* ***limitada*** *quando o conjunto dos seus termos é limitado, isto é, quando existem números reais a, b tais que $a \leq x_n \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Isto significa que todos os termos de (x_n) pertencem ao intervalo $[a, b]$. Quando uma sequência (x_n) não é limitada, ela é dita **ilimitada**.

Definição 2.1.3 *Uma sequência (x_n) é dita* ***limitada superiormente*** *quando existe um número real b tal que $x_n \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Isto significa que todos os termos x_n pertencem a semi-reta $(-\infty, b]$. Analogamente, diz-se que (x_n) é* ***limitada inferiormente*** *quando existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq x_n$ (ou seja, $x_n \in [a, +\infty)$) para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Evidentemente, uma sequência é limitada se, e somente se, é limitada superior e inferiormente.

Definição 2.1.4 *Uma sequência (x_n) em $\mathbb{R}$ é dita* ***convergente*** *para $a \in \mathbb{R}$, ou diz-se que a é o limite de (x_n), se para todo $\varepsilon > 0$ existe um número natural $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$, os termos de (x_n) satisfazem $|x_n - a| < \varepsilon$. Simbolicamente, escreve-se:*

$$\lim x_n = a \quad . \equiv . \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists \, n_0 \in \mathbb{N}; n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

Se uma sequência tem um limite, dizemos que a sequência é **convergente**; se não tem limite, dizemos que a sequência é **divergente**.

Considere agora uma sequência (x_n) convergente. Nesse caso, ela não pode possuir dois limites distintos; seu limite é único e isso pode ser visto no teorema seguinte.

Teorema 2.1.1 (Unicidade do Limite) *Uma sequência em $\mathbb{R}$ pode ter no máximo um limite.*
Demonstração: *Suponha que a' e a'' são ambos limites de x_n. Para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0' \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - a'| < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $n \geq n_0'$, e existe n_0'' tal que $|x_n - a'',| < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $n \geq n_0''$. Seja n_0 o maior entre n_0' e n_0''. Então para $n \geq n_0$ aplicamos a Desigualdade Triangular para obter*

$$|a' - a''| = |a' - x_n + x_n - a''| \leq |a' - x_n| + |x_n - a''| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ é um número positivo arbitrário, concluímos que $a' - a'' = 0$. □

Teorema 2.1.2 *Toda sequência convergente é limitada.*
Demonstração: *Seja $\lim x_n = a$. Tomando $\varepsilon = 1$, vemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n \in (a-1, a+1)$. Seja o conjunto finito $\{x_1, ..., x_{n_0}, a-1, a+1\}$ por ser finito admite um menor b e um maior c elementos do conjunto. Todos os termos x_n da sequência estão contidos no intervalo $[b, c]$* □

Exemplo 2.1.4 *A sequência $(1, 2, 3, ...)$, com $x_n = n$, não converge porque não é limitada.*

A expressão "n suficientemente grande" significa que existe um índice natural $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que a propriedade enunciada passa a valer a partir desse índice em diante, isto é, para todo $n \geq n_0$.

Teorema 2.1.3 *Seja* $\lim x_n = a$*. Se* $b < a$ *então para todo* n *suficientemente grande, tem-se* $b < x_n$*. Analogamente, se* $a < b$ *então* $x_n < b$ *para todo* n *suficientemente grande.*

Demonstração: *Tomando* $\varepsilon = a - b$*, temos* $\varepsilon > 0$ *e* $b = a - \varepsilon$*. Pela definição de limite, existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $n > n_0 \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \Rightarrow b < x_n$*. A outra afirmação se prova analogamente.* □

Definição 2.1.5 *Seja* (x_n) *uma sequência de números reais. Dizemos que* x_n *é*

- *crescente se satisfaz as desigualdades*

$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \cdots .$$

- *decrescente se satisfaz as desigualdades*

$$x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq x_{n+1} \geq \cdots .$$

- *monótona se ela for crescente ou decrescente.*

Exemplo 2.1.5 *As seguintes sequências são crescentes:*

$$(1, 2, 3, 4, \cdots, n, \cdots), (1, 2, 2, 3, 3, 3, \cdots) \text{ e } (a, a^2, a^3, \cdots, a^n, \cdots) \text{ se } a > 1.$$

Exemplo 2.1.6 *As seguintes sequências são decrescentes:*

$$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right), \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2} \cdots, \frac{1}{2^{n-1}}, \cdots\right) \text{ e } (b, b^2, b^3, \cdots, b^n, \cdots) \text{ se } 0 < b < 1.$$

Exemplo 2.1.7 *As seguintes sequências não são monótonas:*

$$(+1, -1, +1, \cdots, (-1)^{n+1}, \cdots) \text{ e } (-1, +2, -3, \cdots, (-1)^n n, \cdots).$$

O teorema a seguir estabelece condições suficientes para garantir a convergência de uma sequência, mesmo quando seu limite ainda não é conhecido. E, para o seu entendimento vamos precisar das definições a seguir.

Definição 2.1.6 *Para um conjunto* X *limitado superiormente, o supremo (ou ínfimo superior) é o menor número* a *tal que todo elemento de* X *é menor ou igual a* a *(ou seja,* a *é uma cota superior, e não existe nenhuma cota superior menor que* a*. Notação:* $\sup(X)$

Exemplo 2.1.8 *Para o conjunto* $X = (0, 1)$*, as cotas superiores são todos os números* ≥ 1*. O menor deles é 1, então* $\sup(X) = 1$*, mesmo que 1 não esteja em* X*.*

Definição 2.1.7 *Para um conjunto* X *limitado inferiormente, o ínfimo (ou ínfimo inferior) é o maior número* b *tal que todo elemento de* X *é maior ou igual a* b *(ou seja,* b *é uma cota inferior, e não existe nenhuma cota inferior maior que* b*). Notação:* $\inf(X)$

Exemplo 2.1.9 *Para o conjunto $X = (0, 1)$, as cotas inferiores são todos os números ≤ 0. O maior deles é 0, então $\inf(X) = 0$, mesmo que 0 não esteja em X.*

Teorema 2.1.4 *Toda sequência monótona limitada é convergente.*
Demonstração: *Seja (x_n) monótona, digamos crescente, limitada. Escrevamos $X = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ e $a = \sup X$. Afirmamos que $a = \lim x_n$. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, o número $a - \varepsilon$ não é cota superior de X. Logo existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a - \varepsilon < x_{n_0} \leq a$. Assim, $n > n_0 \Rightarrow a - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n < a + \varepsilon$ e daí $\lim x_n = a$.* □

Semelhantemente, se (x_n) é decrescente, limitada então lim x_n é o ínfimo do conjunto dos valores x_n.

Esse teorema estabelece a existência do limite de uma sequência monótona limitada. Ele também nos fornece uma maneira de calcular o limite da sequência, desde que possamos avaliar o supremo ou o ínfimo. Às vezes, é difícil avaliar esse supremo (ou ínfimo), porém, uma vez que sabemos que ele existe, muitas vezes é possível avaliar o limite por outros métodos.

Definição 2.1.8 *Seja (x_n) uma sequência de números reais e seja $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ uma sequência estritamente crescente de números naturais. Então a sequência (x_{n_k}) dada por*

$$(x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots)$$

é chamada de subsequência de (x_n).

Exemplo 2.1.10 *Se $(x_n) = \left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\right)$, A seleção de termos indexados pares significa tomar os termos cujos índices são $n = 2, 4, 6, 8, \cdots$ e produzir a subsequência*

$$(x_n)' = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \cdots, \frac{1}{2k}, \cdots\right),$$

onde $n_1 = 2, n_2 = 4, \ldots, n_k = 2k, \ldots$. Outras subsequências de $(x_n) = \frac{1}{n}$ são as seguintes:

$$\left(\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \cdots, \frac{1}{2k-1}, \cdots\right) \text{ e } \left(\frac{1}{2!}, \frac{1}{4!}, \frac{1}{6!}, \cdots, \frac{1}{(2k)!}, \cdots\right).$$

As seguintes sequências não são subsequências de $(x_n) = \frac{1}{n}$:

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \cdots\right) \text{ e } \left(\frac{1}{1}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, 0, \cdots\right).$$

Teorema 2.1.5 *Se lim $x_n = a$ então toda subsequência de (x_n) converge para o limite a.*
Demonstração: *Seja $(x_{n_1}, \cdots, x_{n_k}, \cdots)$ a subsequência. Dado qualquer intervalo aberto I de centro a, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todos os termos x_n, com $n > n_0$, pertencem a I. Em particular, todos os termos x_{n_k}, com $n_k > n_0$ também pertencem a I. Logo lim $x_{n_k} = a$.* □

O próximo teorema, também conhecido como **Teorema de Bolzano-Weierstrass** garante que mesmo quando uma sequência não converge como um todo ainda é possível extrair dela um comportamento ordenado e estável por meio de uma subsequência

Teorema 2.1.6 *Toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente.*
Demonstração: *Para mostrar que toda sequência (x_n) possui uma subsequência monótona, procedemos da seguinte forma. Dizemos que um termo x_n é* destacado *quando $x_n \geq x_p$ para todo $p > n$. Seja $D \subset \mathbb{N}$ o conjunto dos índices n para os quais x_n é destacado.*

Caso 1: *D é infinito.*
Se D for infinito, escrevemos $D = \{n_1 < n_2 < n_3 < \cdots\}$. Como cada x_{n_k} é maior ou igual a todos os termos seguintes da sequência, em particular

$$x_{n_1} \geq x_{n_2} \geq x_{n_3} \geq \cdots,$$

segue que (x_{n_k}) é uma subsequência monótona decrescente.

Caso 2: *D é finito.*
Se D for finito, tomamos n_1 maior do que todos os elementos de D. Como $n_1 \notin D$, o termo x_{n_1} não é destacado; portanto, existe $n_2 > n_1$ tal que $x_{n_2} > x_{n_1}$. Pelo mesmo motivo, x_{n_2} também não é destacado, de modo que existe $n_3 > n_2$ com $x_{n_3} > x_{n_2}$. Prosseguindo assim, obtemos uma subsequência estritamente crescente:

$$x_{n_1} < x_{n_2} < x_{n_3} < \cdots.$$

Em ambos os casos, obtemos de (x_n) uma subsequência monótona. Portanto, toda sequência de números reais possui uma subsequência monótona.

$\square$

Teorema 2.1.7 *Se $\lim x_n = 0$ e (y_n) é uma sequência limitada (convergente ou não), então $\lim(x_n y_n) = 0$.*
Demonstração: *Existe $c > 0$ tal que $|y_n| \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |x_n| < \varepsilon/c$. Então, $n > n_0 \Rightarrow |x_n \cdot y_n| = |x_n| \cdot |y_n| < (\varepsilon/c) \cdot c = \varepsilon$, logo lim$(x_n y_n) = 0$.* $\square$

Exemplo 2.1.11 *Se $x_n = \frac{1}{n}$ e $y_n = sen(n)$, então (y_n) não converge, mas, como $-1 \leq y_n \leq 1$, tem-se $\lim(x_n y_n) = \lim(sen(n)/n) = 0$. Por outro lado, se $\lim x_n = 0$ mas y_n não é limitada, o produto $x_n y_n$ pode divergir (tome $x_n = 1/n$, $y_n = n^2$) ou convergir para um valor qualquer (tome $x_n = 1/n$ e $y_n = c \cdot n$).*

Teorema 2.1.8 *Se $\lim x_n = a$ e $\lim y_n = b$, então:*

$$1. \lim(x_n \pm y_n) = a \pm b$$

$$2. \lim(x_n y_n) = ab$$

$$3. \lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b} \qquad se \quad b \neq 0$$

Demonstração:

1. *Dado arbitrariamente* $\varepsilon > 0$*, existem* $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ *tais que* $n > n_1 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon/2$ *e* $n > n_2 \Rightarrow |y_n - b| < \varepsilon/2$*. Seja* $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$*. Então, se* $n > n_0$*, temos* $n > n_1$ *e* $n > n_2$*, logo*

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

   Portanto, $\lim(x_n + y_n) = a + b$*. O mesmo argumento vale para* $\lim(x_n - y_n) = a - b$*.*

2. *Temos* $x_n y_n - ab = x_n y_n - x_n b + x_n b - ab = x_n(y_n - b) + (x_n - a)b$*. Pelo teorema 2.1.2,* (x_n) *é limitada. Além disso,* $\lim(y_n - b) = \lim(x_n - a) = 0$*. Segue-se do Teorema 2.1.7 e da parte 1 que*

$$\lim(x_n y_n - ab) = \lim\big[x_n(y_n - b)\big] + \lim\big[(x_n - a)b\big] = 0,$$

   donde $\lim(x_n y_n) = ab$*.*

3. *Vale*

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{x_n b - y_n a}{y_n b}.$$

   Como $\lim(x_n b - y_n a) = ab - ba = 0$*, basta provar que* $\left(\dfrac{1}{y_n b}\right)$ *é uma sequência limitada para concluir que*

$$\lim\left(\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right) = 0$$

   e portanto $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$*. Ora, pondo* $c = \dfrac{b^2}{2}$*, temos* $0 < c < b^2$*. Como* $\lim y_n b = b^2$*, segue-se do teorema 2.1.3 que, para todo* n *suficientemente grande, tem-se* $c < y_n b$ *e portanto* $\dfrac{1}{y_n b} < \dfrac{1}{c}$*, completando a demonstração.* □

Exemplo 2.1.12 *Seja* $0 < a < 1$*. A sequência cujo termo geral é*

$$x_n = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

é crescente e limitada, pois $x_n < 1/(1 - a)$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*. Além disso,*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1-a} - x_n\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+1}}{1-a} = 0,$$

portanto,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}(1 + a + \cdots + a^n) = \frac{1}{1-a}.$$

A igualdade acima vale ainda quando se tem $-1 < a < 1$*, isto é,* $|a| < 1$*. Com efeito, o argumento se baseou no fato de que* $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$*, que persiste quando se tem apenas* $|a| < 1$*, pois*

$$\lim |a|^n = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim a^n = 0.$$

Exemplo 2.1.13 *A sequência cujo termo geral é*

$$a_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

é evidentemente crescente. Ela também é limitada, pois

$$2 \leq a_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

Escreveremos $\lim a_n = e$. *O número* e *é uma das constantes mais importantes da Análise Real. Como vimos, tem-se* $2 < e < 3$. *Na realidade, o valor aproximado é* $e = 2{,}7182$, *com quatro decimais exatos.*

A seguir veremos o **Teorema do Sanduíche** que é amplamente utilizado no estudo de funções além de servir como fundamento para diversas demonstrações mais avançadas dentro da Análise Real.

Teorema 2.1.9 *Se* $\lim x_n = \lim y_n = a$ *e* $x_n \leq z_n \leq y_n$ *para todo* n *suficientemente grande então* $\lim z_n = a$.
Demonstração: *Seja* $\varepsilon > 0$. *Como* $x_n \to a$, *existe* $n_1 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$n > n_1 \;\Rightarrow\; |x_n - a| < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon.$$

De modo análogo, como $y_n \to a$, *existe* $n_2 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$n > n_2 \;\Rightarrow\; a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon.$$

Defina então $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. *Para todo* $n > n_0$, *ambas as desigualdades acima valem, e como* $x_n \leq z_n \leq y_n$, *obtemos*

$$a - \varepsilon < x_n \leq z_n \leq y_n < a + \varepsilon.$$

Assim, $z_n \in (a - \varepsilon,\, a + \varepsilon)$ *para todo* $n > n_0$, *o que prova que* $\lim z_n = a$. □

2.2 Séries Numéricas

Nesta seção será apresentada uma breve introdução às séries numéricas. Os tópicos abordados servirão como base para o estudo de séries de funções.

Uma série é uma soma $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ com um número infinito de parcelas. Para que isto faça sentido, poremos $s = \lim\limits_{n\to\infty} (a_1 + \cdots + a_n)$. Como todo limite, este pode existir ou não. Por isso há séries convergentes e séries divergentes.

A partir dos estudos sobre sequências numéricas definiremos o que vem a ser uma série numérica.

Definição 2.2.1 *Dada uma sequência (a_n) de números reais, a partir dela formamos uma nova sequência (s_n) onde*

$$s_1 = a_1,$$

$$s_2 = s_1 + a_2,$$

$$\dots$$

$$s_n = s_{n-1} + a_n,$$

$$\dots$$

Os números s_n chamam-se as ***reduzidas*** *ou* ***somas parciais*** *da série $\sum a_n$. A parcela a_n é o n-ésimo termo ou termo geral da série.*

Se existir o limite $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, diremos que a série $\sum a_n$ é **convergente** e

$$s = \sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

será chamado de soma da série. Se $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ não existir, diremos que $\sum a_n$ é uma série **divergente**.

Às vezes é conveniente considerar séries do tipo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, que começam com a_0 em vez de a_1.

Exemplo 2.2.1 *Como já vimos no Exemplo 2.1.12 e Exemplo 2.1.13, quando $|a| < 1$, a série geométrica*

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^n + \cdots$$

é convergente, com soma igual a $\dfrac{1}{1-a}$, e a série

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$$

também converge, com soma igual a e.

Exemplo 2.2.2 *A série $\sum a_n = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$, de termo geral $a_n = (-1)^{n+1}$, é divergente, pois a soma parcial s_n é igual a zero quando n é par, e igual a 1 quando n é ímpar. Portanto não existe $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$.*

Exemplo 2.2.3 *A série $\sum \dfrac{1}{n(n+1)}$, cujo termo geral é $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{(n+1)}$, tem n-ésima soma parcial*

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Portanto $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 1$, isto é, $\sum \dfrac{1}{n(n+1)} = 1$.

Se $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, as reduzidas da série $\sum a_n$ formam uma sequência não-decrescente. Portanto, uma série $\sum a_n$, de termos não negativos, converge se, e somente se, existe uma constante k tal que

$$a_1 + \cdots + a_n \leq k \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Por isso usamos a notação

$$\sum a_n < +\infty$$

para significar que a série $\sum a_n$, com $a_n \geq 0$, é convergente.

Se $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e (a'_n) é uma subsequência de (a_n), então

$$\sum a_n < +\infty \quad \Rightarrow \quad \sum a'_n < +\infty.$$

Exemplo 2.2.4 (Série Harmônica) *A série* $\sum \frac{1}{n}$ *é divergente. De fato, se* $\sum \frac{1}{n} = s$ *fosse convergente, então* $\sum \frac{1}{2n} = t$ *e* $\sum \frac{1}{2n-1} = u$ *também seriam convergentes. Além disso, como* $s_{2n} = t_n + u_n$*, fazendo* $n \to \infty$ *teríamos* $s = t + u$*. Mas*

$$t = \sum \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \sum \frac{1}{n} = \frac{s}{2},$$

portanto $u = t = \frac{s}{2}$*. Por outro lado,*

$$\begin{aligned} u - t &= \lim_{n\to\infty} (u_n - t_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) \right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n)} \right) > 0, \end{aligned}$$

logo $u > t$*, contradição.*

Teorema 2.2.1 *Sejam* $\sum a_n$ *e* $\sum b_n$ *séries de termos não negativos. Se existem* $c > 0$ *e* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tais que* $a_n \leq cb_n$ *para todo* $n > n_0$*, então a convergência de* $\sum b_n$ *implica a de* $\sum a_n$*, enquanto a divergência de* $\sum a_n$ *implica a de* $\sum b_n$*.*

Demonstração: *Sem perda de generalidade, podemos supor* $a_n \leq cb_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*. Então as reduzidas* s_n *e* t_n*, de* $\sum a_n$ *e* $\sum b_n$ *respectivamente, formam sequências crescentes tais que* $s_n \leq ct_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*. Como* $c > 0$*,* (t_n) *limitada implica* (s_n) *limitada, e* (s_n) *ilimitada implica* (t_n) *ilimitada, pois*

$$t_n \geq \frac{s_n}{c}$$

o que finaliza a demonstração. $\square$

Exemplo 2.2.5 *Se* $r > 1$*, a série* $\sum \frac{1}{n^r}$ *converge. Com efeito, seja* c *a soma da série geométrica*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{2^r}\right)^n.$$

Mostraremos que toda reduzida s_m *da série* $\sum \frac{1}{n^r}$ *é* $< c$. *Seja* n *tal que* $m \leq 2^n - 1$. *Então*

$$\begin{aligned} s_m \leq 1 &+ \left(\frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r}\right) + \left(\frac{1}{4^r} + \frac{1}{5^r} + \frac{1}{6^r} + \frac{1}{7^r}\right) + \\ &\cdots + \left(\frac{1}{(2^{n-1})^r} + \cdots + \frac{1}{(2^n - 1)^r}\right), \end{aligned}$$

$$s_m < 1 + \frac{2}{2^r} + \frac{4}{4^r} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{2^{(n-1)r}} = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{2}{2^r}\right)^i < c.$$

Como a série harmônica diverge, resulta do critério de comparação que

$$\sum \frac{1}{n^r}$$

diverge quando $r < 1$, *pois, neste caso,* $\frac{1}{n^r} > \frac{1}{n}$.

Teorema 2.2.2 *O termo geral de uma série convergente tem limite zero.*

Demonstração: *Se a série* $\sum a_n$ *é convergente então, pondo* $s_n = a_1 + \cdots + a_n$, *existe* $\lim_{n\to\infty} s_n = s$. *Consideremos a sequência* (t_n), *com* $t_1 = 0$, $t_n = s_{n-1}$ *quando* $n > 1$. *Evidentemente,* $\lim t_n = s$ *e* $s_n - t_n = a_n$. *Portanto,*

$$\lim a_n = \lim(s_n - t_n) = \lim s_n - \lim t_n = s - s = 0.$$

$\square$

O critério contido no Teorema 2.2.2 constitui a primeira coisa a verificar quando se quer saber se uma série é ou não convergente. Se o termo geral não tende a zero, a série diverge. A série harmônica mostra que a condição $\lim a_n = 0$ não é suficiente para a convergência de $\sum a_n$.

A seguir definiremos as **Séries Absolutamente Convergentes**, entendidas como séries numéricas que convergem mesmo quando substituímos todos os seus termos pelos valores absolutos. Esse tipo de convergência indica um comportamento mais estável e robusto, pois garante que a soma infinita permanece finita independentemente do sinal de cada termo.

Definição 2.2.2 *Uma série* $\sum a_n$ *diz-se* absolutamente convergente *quando* $\sum |a_n|$ *converge.*

Exemplo 2.2.6 *Uma série convergente cujos termos não mudam de sinal é absolutamente convergente. Quando* $-1 < a < 1$, *a série geométrica*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n$$

é absolutamente convergente, pois $|a^n| = |a|^n$, *com* $0 \leq |a| < 1$.

O exemplo clássico de uma série convergente $\sum a_n$ tal que

$$\sum |a_n| = +\infty$$

é dado por

$$\sum (-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots .$$

Quando tomamos a soma dos valores absolutos, obtemos a série harmônica, que diverge. A convergência da série dada segue-se do próximo Teorema.

Teorema 2.2.3 (Leibniz) *Se (a_n) é uma sequência monótona decrescente que tende para zero, então a série $\sum(-1)^{n+1}a_n$ é convergente.*

Demonstração: *Seja $s_n = a_1 - a_2 + \cdots + (-1)^{n+1}a_n$. Então*

$$s_{2n} = s_{2n-2} + a_{2n-1} - a_{2n},$$

$$s_{2n+1} = s_{2n-1} - a_{2n} + a_{2n+1}.$$

Como $a_{2n-1} - a_{2n} \geq 0$, segue que (s_{2n}) é crescente. Como $-a_{2n} + a_{2n+1} \leq 0$, segue que (s_{2n+1}) é decrescente. Além disso,

$$s_{2n-1} - s_{2n} = a_{2n} \geq 0,$$

o que mostra que

$$s_2 \leq s_4 \leq \cdots \leq s_{2n} \leq \cdots \leq s_{2n-1} \leq \cdots \leq s_3 \leq s_1.$$

Como $\lim a_n = 0$, temos

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n} = \lim_{n\to\infty} s_{2n-1}.$$

Logo, (s_n) converge e o teorema está provado. $\square$

Exemplo 2.2.7 *Pelo Teorema 2.2.3, a série*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

é convergente. Contudo, ela não é absolutamente convergente, pois a série reduzida de ordem n é

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}\log\left(\frac{k+1}{k}\right).$$

Observe que

$$\begin{aligned} s_n &= \log 2 + \log\left(\frac{3}{2}\right) + \log\left(\frac{4}{3}\right) + \cdots + \log\left(\frac{n+1}{n}\right), \\ &= \log 2 + \log 3 - \log 2 + \log 4 - \log 3 + \cdots + \log(n+1) - \log n \\ &= \log(n+1) \end{aligned}$$

e ocorre um cancelamento telescópico. Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty.$$

Uma série convergente $\sum a_n$ tal que $\sum |a_n| = +\infty$ chama-se condicionalmente convergente.

A partir deste ponto, estudaremos o **Teste de d'Alembert** e o **Teste de Cauchy**, analisando separadamente suas aplicações e critérios de convergência. Posteriormente, esses dois resultados serão unificados em um único teorema, evidenciando a relação entre ambos.

Teorema 2.2.4 *Seja $\sum b_n$ uma série absolutamente convergente, com $b_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se a sequência (a_n/b_n) for limitada (em particular, se for convergente), então a série $\sum a_n$ será absolutamente convergente.*

Demonstração: *Se, para algum $c > 0$, tivermos $|a_n/b_n| \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $|a_n| \leq c|b_n|$. Pelo critério de comparação descrito no Teorema 2.2.1, a série $\sum a_n$ é absolutamente convergente.*

□

Corolário 2.2.1 (Teste de d'Alembert) *Seja $a_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se existir uma constante c tal que*

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq c < 1$$

para todo n suficientemente grande (em particular, se $\lim |a_{n+1}/a_n| < 1$), então a série $\sum a_n$ será absolutamente convergente.

Demonstração: *De fato, se para todo n suficientemente grande vale*

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq c = \frac{c^{n+1}}{c^n},$$

então

$$\frac{|a_{n+1}|}{c^{n+1}} \leq \frac{|a_n|}{c^n}.$$

Assim, a sequência $\left(\frac{|a_n|}{c^n}\right)$, formada por números não-negativos, é decrescente a partir de certa ordem, logo é limitada. Como a série $\sum c^n$ é absolutamente convergente, segue do Teorema 2.2.4 que a série $\sum a_n$ também converge absolutamente. No caso particular em que

$$\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L < 1,$$

escolhemos um número c tal que $L < c < 1$ e teremos $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < c$ para todo n suficientemente grande (Teorema 2.1.3 da Seção 2.1). Então caímos no caso já demonstrado. □

Observação 2.2.1 *Quando se aplica o teste de d'Alembert, usualmente se procura calcular $\lim |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = L$. Se $L > 1$ então a série diverge pois se tem $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| > 1$, donde $|a_{n+1}| > |a_n|$ para todo n suficientemente grande e daí resulta que o termo geral a_n não tende para zero. Se $L = 1$, o teste é inconclusivo. A série pode convergir (como no caso $\sum \frac{1}{n^2}$) ou divergente (como no caso $\sum \frac{1}{n}$).*

Exemplo 2.2.8 *Seja* $a_n = \dfrac{1}{n^2 - 3n + 1}$. *Considerando a série convergente*

$$\sum \frac{1}{n^2},$$

temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2 - 3n + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}} = 1.$$

Como $\sum \frac{1}{n^2}$ *é convergente, concluímos que* $\sum a_n$ *também converge.*

Teorema 2.2.5 (Teste de Cauchy) *Se existe um número real* c *tal que* $\sqrt[n]{|a_n|} \leq c < 1$, *para todo* n *suficientemente grande (em particular, se* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$*), então a série* $\sum a_n$ *é absolutamente convergente.*

Demonstração: *Se* $\sqrt[n]{|a_n|} \leq c < 1$, *então* $|a_n| \leq c^n$ *para todo* n *suficientemente grande. Como a série geométrica* $\sum c^n$ *é convergente, segue do teste de comparação que* $\sum a_n$ *converge absolutamente. No caso em que existe o limite* $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$, *escolhemos* c *com* $L < c < 1$. *Assim, para* n *suficientemente grande, temos* $\sqrt[n]{|a_n|} < c$, *e reduzimos ao caso anterior.* $\square$

Observação 2.2.2 *No teste de Cauchy, costuma-se calcular o limite* $(\lim \sqrt[n]{|a_n|} = L)$. *Se* $L > 1$, *então* $\sum a_n$ *diverge, pois os termos não tendem a zero. Se* $L = 1$, *o teste é inconclusivo: a série pode convergir ou divergir.*

Exemplo 2.2.9 *Considere a série* $\sum a_n$, *onde* $a_n = \left(\dfrac{\log n}{n}\right)^n$. *Aplicando o Teste de Cauchy, calculamos a raiz enésima do termo geral:*

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{\log n}{n}.$$

Como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} = 0,$$

existe um número real c, *com* $0 \leq c < 1$, *tal que* $\sqrt[n]{|a_n|} \leq c$ *para todo* n *suficientemente grande. Portanto, pelo Teste de Cauchy, a série* $\sum a_n$ *é absolutamente convergente*

Relacionamos aqui o Teste de d'Alembert com o Teste de Cauchy neste teorema.

Teorema 2.2.6 *Seja* (a_n) *uma sequência de termos não nulos. Se*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L.$$

Demonstração: *Suponhamos inicialmente que* $a_n > 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Seja* $\varepsilon > 0$. *Escolhemos constantes* K *e* M *tais que*

$$L - \varepsilon < K < L < M < L + \varepsilon.$$

Como $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = L$*, existe* $p \in \mathbb{N}$ *tal que, para todo* $n \geq p$*,*

$$K < \frac{a_{n+1}}{a_n} < M.$$

Multiplicando essas desigualdades desde $n = p+1$ *até* n*, obtemos*

$$K^{n-p} < \frac{a_n}{a_p} < M^{n-p}.$$

Reescrevendo,

$$K^n \alpha < a_n < M^n \beta, \qquad \text{onde} \quad \alpha = \frac{a_p}{K^p},\ \beta = \frac{a_p}{M^p}.$$

Extraindo a raiz n*-ésima,* $K\sqrt[n]{\alpha} < \sqrt[n]{a_n} < M\sqrt[n]{\beta}$*. Como* α *e* β *são constantes, temos*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha} = 1 \qquad e \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\beta} = 1.$$

Assim, para n *suficientemente grande,*

$$L - \varepsilon < K\sqrt[n]{\alpha} \quad e \quad M\sqrt[n]{\beta} < L + \varepsilon,$$

o que implica

$$L - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < L + \varepsilon.$$

Portanto, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$*, quando* $L > 0$*. Se* $L = 0$*, o argumento é análogo, bastando considerar apenas* M*.* □

Exemplo 2.2.10 *Resulta do Teorema 2.2.6 que* $\lim \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$*. Com efeito, pondo* $a_n = \dfrac{n^n}{n!}$ *vem* $\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \sqrt[n]{a_n}$*. Ora*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)(n+1)^n}{(n+1)\cdot n!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n,$$

logo $\lim(\frac{a_{n+1}}{a_n}) = e$*, e daí* $\lim \sqrt[n]{a_n} = e$*.*

2.3 Sequências e Séries de Funções

Neste capítulo, apresentamos as definições fundamentais, exemplos clássicos e principais resultados envolvendo convergência pontual, convergência uniforme e séries de potências, destacando suas propriedades e implicações analíticas. A abordagem aqui adotada segue uma progressão lógica: inicia-se com sequências de funções, avança para a análise da convergência e, por fim, examina séries de potências e aplicações.

Seja X um conjunto de números reais. Uma sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ é uma correspondência que associa a cada número natural $n \in \mathbb{N}$ uma função f_n, definida em X e tomando valores reais.

Apresentaremos duas noções diferentes de convergência para uma sequência de funções, a convergência pontual e a convergência uniforme com a segunda tendo uma atenção maior.

Definição 2.3.1 *Diz-se que uma sequência de funções* $f_n : X \to \mathbb{R},\ (n = 1, 2, \ldots)$ ***converge simplesmente*** *para a função* $f : X \to \mathbb{R}$ *quando, para todo* $x \in X$*, a sequência de números* $f_1(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ *converge para* $f(x)$*.*

Assim $f_n \to f$ simplesmente em X quando, dados $\varepsilon > 0$ e $x \in X$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, (dependendo de ε e de x) tal que $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

A convergência simples também pode ser chamada de convergência *ponto a ponto* ou convergência *pontual*.

Exemplo 2.3.1 *A sequência de funções* $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, onde* $f_n(x) = x/n$*, converge simplesmente para a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *que é identicamente nula, pois para todo* $x \in \mathbb{R}$ *fixado tem-se* $\lim_{n\to+\infty}(x/n) = 0$.

Um tipo de convergência de funções mais restrito do que a convergência simples, é a convergência uniforme, que definiremos a seguir.

Definição 2.3.2 *Uma sequência de funções* $f_n : X \to \mathbb{R}$ ***converge uniformemente*** *para a função* $f : X \to \mathbb{R}$ *quando, para todo* $\varepsilon > 0$ *dado, existe* $n_0 \in \mathbb{N}$*, dependendo apenas de* ε*, tal que* $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ *seja qual for* $x \in X$*.*

No plano $\mathbb{R}^2$, dado $\varepsilon > 0$, a faixa de raio ε em torno do gráfico de f é o conjunto

$$F(f;\varepsilon) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \in X,\ f(x) - \varepsilon < y < f(x) + \varepsilon\}.$$

Dizer que $f_n \to f$ uniformemente em X significa que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que o gráfico de f_n, para todo $n > n_0$, está contido na faixa de raio ε em torno do gráfico de f.

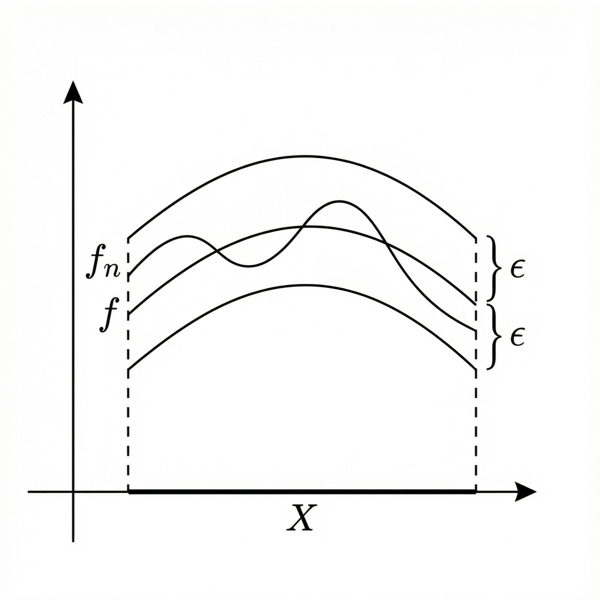

Figura 1 – O gráfico de f_n está contido na faixa $F(f;\varepsilon)$

Exemplo 2.3.2 *A sequência (f_n) do Exemplo 2.3.1 não converge uniformemente para zero em $\mathbb{R}$. Por outro lado, se $X \subset \mathbb{R}$ é um conjunto limitado, digamos $|x| \leq c$ para todo $x \in X$, então $f_n \to 0$ uniformemente em X. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, basta tomar $n_0 > c/\varepsilon$. Então $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x)| = |x|/n < c/n_0 < \varepsilon$.*

Exemplo 2.3.3 *Seja a sequência de funções contínuas $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$, $(n = 1, 2, 3, \cdots)$. Então (f_n) converge simplesmente para a função descontínua $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 0$ se $0 \leq x < 1$ e $f(1) = 1$. Com efeito, para cada $x \in [0,1)$ temos $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$ enquanto $\lim\limits_{n\to\infty} 1^n = 1$. Mas ela não converge uniformemente no intervalo $[0,1]$, pois, fixando $\varepsilon = 1/2$, seja qual for $n_0 \in \mathbb{N}$, existem pontos $x \in [0,1)$ tais que $|f_{n_0}(x) - f(x)| \geq 1/2$, ou seja $x^{n_0} \geq 1/2$. Observe que $\lim\limits_{x\to 1^-} x^{n_0} = 1$. Logo, existe $\delta > 0$ tal que $1 - \delta < x < 1 \Rightarrow x^{n_0} > 1/2$. Mostraremos agora que (f_n) converge uniformemente para a função identicamente nula f em cada intervalo $[0, 1-\delta]$ onde $0 < \delta < 1$. Com efeito, sendo $\lim\limits_{n\to\infty} (1-\delta)^n = 0$, dado qualquer $\varepsilon > 0$, podemos achar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow (1-\delta)^n < \varepsilon$. Então, para todo $x \in [0, 1-\delta]$, temos $0 < x^n \leq (1-\delta)^n < \varepsilon$, desde que $n > n_0$. E isso prova a nossa afirmação.*

A soma $f = \sum f_n$ de uma série de funções é um caso particular de um limite de sequência: $f = \lim_{n\to\infty} s_n$, onde $s_n = f_1 + \cdots + f_n$. Tem sentido, portanto, dizer que a série $\sum f_n$ converge simplesmente ou uniformemente no conjunto X.

Reciprocamente, todo limite $\varphi = \lim_{n\to\infty} \varphi_n$ de uma sequência de funções $\varphi_n : X \to \mathbb{R}$ também pode ser obtido como soma de uma série. Basta pôr $f_1 = \varphi_1$, $f_2 = \varphi_2 - \varphi_1$, $f_3 = \varphi_3 - \varphi_2, \cdots$, tem-se, então, $f_1 + f_2 + \cdots + f_n = \varphi_n$, de modo que $\varphi = \sum f_n$.

Definição 2.3.3 *A série $\sum f_n$ converge uniformemente num conjunto X se, e somente se, a sequência de suas reduzidas $s_n = f_1 + \cdots + f_n$ é uniformemente convergente em X.*

Assim, dizer que $\sum f_n$ converge uniformemente para f em X significa que, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que o "resto" $r_n(x)$, definido por $f(x) = f_1(x) + \cdots + f_n(x) + r_n(x)$, cumpre a condição $|r_n(x)| < \varepsilon$ para todo $n > n_0$ e todo $x \in X$.

Todas as considerações feitas até então para sequência de funções correspondem a um análogo a propósito de séries. A seguir apresentaremos algumas **propriedades da convergência uniforme**.

Teorema 2.3.1 *Se uma sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ converge uniformemente para $f : X \to \mathbb{R}$ e cada f_n é contínua no ponto $a \in X$ então f é contínua no ponto a.*

Demonstração: *Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3$ para todo $x \in X$. Fixemos um número natural $n > n_0$. Como f_n é contínua no ponto a, existe $\delta > 0$ tal que $x \in X;\ |x - a| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(a)| < \varepsilon/3$, donde*

$$|f(x) - f(a)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Isso prova que a função f é contínua no ponto a. □

Exemplo 2.3.4 *A sequência apresentada no Exemplo 2.3.3, $f_n(x) = x^n$ não converge uniformemente em $[0, 1]$, pois converge simplesmente para a função descontínua $f : [0, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = 0$ se $0 \leq x < 1,\ f(1) = 1$.*

Definição 2.3.4 *Diz-se que uma sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ **converge monotonicamente** para a função $f : X \to \mathbb{R}$ quando, para cada $x \in X$, a sequência $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é monótona e converge para $f(x)$.*

As sequências de funções dos Exemplos 2.3.1 e 2.3.3 convergem monotonicamente. Note que, se $f_n \to f$ monotonicamente em X, então

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq |f_n(x) - f(x)|$$

para todo $x \in X$ e todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.3.2 (Dini) *Se a sequência de funções contínuas $f_n : X \to \mathbb{R}$ converge monotonicamente para a função contínua $f : X \to \mathbb{R}$ no conjunto compacto X, então a convergência é uniforme.*

Demonstração. *Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina*

$$X_n = \{x \in X\,;\, |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}.$$

Como as funções f_n e f são contínuas e X é compacto, cada conjunto X_n é fechado em X e, portanto, compacto. Além disso, como a sequência (f_n) converge monotonicamente para f, os conjuntos X_n formam uma família decrescente:

$$X_1 \supset X_2 \supset X_3 \supset \cdots .$$

Pela convergência pontual de f_n para f, para cada $x \in X$ existe $n_x \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todo $n \geq n_x$. Logo, nenhum ponto $x \in X$ pertence a todos os conjuntos X_n, o que implica

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n = \varnothing.$$

Como X é compacto e (X_n) é uma sequência decrescente de subconjuntos compactos com interseção vazia, segue que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$X_{n_0} = \varnothing.$$

Consequentemente, $X_n = \varnothing$ para todo $n > n_0$. Isso significa que, para todo $x \in X$ e todo $n > n_0$,

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Portanto, a sequência (f_n) converge uniformemente para f em X.

Teorema 2.3.3 (Passagem ao limite sob o sinal de integral) *Se a sequência de funções integráveis $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ converge uniformemente para $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ então f é integrável e*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Noutras palavras: $\int_a^b \lim_n f_n = \lim_n \int_a^b f_n$ *se a convergência é uniforme.*

Demonstração: *Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon/4(b-a)$ para todo $x \in [a,b]$. Fixemos $m > n_0$. Como f_m é integrável, existe uma partição P de $[a,b]$ tal que, indicando com ω_i e ω_i' respectivamente as oscilações de f e de f_m no intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ de P, tem-se*

$$\sum \omega_i'(t_i - t_{i-1}) < \varepsilon/2.$$

Mas, para $x, y \in [t_{i-1}, t_i]$ quaisquer, vale:

$$|f(y) - f(x)| \leq |f(y) - f_m(y)| + |f_m(y) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \omega_i' + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Portanto $\omega_i \leq \omega_i' + \varepsilon/2(b-a)$. Segue-se que

$$\sum \omega_i(t_i - t_{i-1}) \leq \sum \omega_i'(t_i - t_{i-1}) + \left[\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\right] \sum (t_i - t_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Isto mostra que f é integrável. Além disso,

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f_n(x)\,dx \right| &= \left| \int_a^b [f(x) - f_n(x)]\,dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)|\,dx \leq \frac{(b-a)\varepsilon}{4(b-a)} < \varepsilon \end{aligned}$$

se $n > n_0$. Consequentemente, $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$ □

Exemplo 2.3.5 *Se uma sequência de funções integráveis $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ converge simplesmente para $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, pode ocorrer que f não seja integrável. Por exemplo, se $\{r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots\}$ for uma enumeração dos números racionais de $[a,b]$ e definimos f_n como a função que assume o valor 1 nos pontos $r_1, \cdots, r_n$ e é zero nos demais pontos de $[a,b]$ então (f_n) converge simplesmente para uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 1$ se $x \in \mathbb{Q} \cap [a,b]$ e $f(x) = 0$ se x é irracional. Podemos observar que cada f_n é integrável, mas f não é.*

Os dois teoremas acima, no caso de uma série $\sum f_n$, assumem as seguintes formas:

1. Se $\sum f_n$ converge uniformemente para f e cada f_n é contínua no ponto a então f é contínua no ponto a.

2. Se cada termo $f_n : X \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, com $f_n(x) \geq 0$ para todo $x \in X$ e a série $\sum f_n$ converge para uma função contínua $f : X \to \mathbb{R}$ no compacto X então a convergência é uniforme.

3. Se cada $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável e $\sum f_n$ converge uniformemente para $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ então f é integrável e $\int_a^b \sum f_n(x)dx = \sum \int_a^b f_n(x)dx$.

Exemplo 2.3.6 *A série $\sum_{n=0}^{\infty} x^2/(1+x^2)^n$, cujos termos são funções contínuas, definidas em toda a reta, converge para a soma $1+x^2$, para todo $x \neq 0$. No ponto $x = 0$, todos os termos da série se anulam, logo sua soma é zero. Segue-se que a série dada converge simplesmente em toda a reta mas a convergência não é uniforme, pois a soma é uma função descontínua.*

Daremos agora uma propriedade e um resultado de séries de funções que não têm análogo para sequências.

Definição 2.3.5 *Uma série de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ diz-se* ***normalmente convergente*** *quando existe uma sequência de constantes $a_n \geq 0$ tais que $\sum a_n$ converge e $|f_n(x)| \leq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in X$.*

Exemplo 2.3.7 *A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$ é normalmente convergente pois as funções $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas por $f_n(x) = \sin(nx)/n^2$, satisfazem as relações $|f_n(x)| \leq 1/n^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in \mathbb{R}$, pois $\sum \frac{1}{n^2}$ é uma série convergente de números reais.*

O **Teste de Weierstrass** constitui um dos principais critérios para garantir a convergência uniforme de séries de funções. Ele assegura propriedades como continuidade, integrabilidade e derivabilidade do limite obtido.

Teorema 2.3.4 (Teste de Weierstrass) *Dada a sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$, seja $\sum a_n$ uma série convergente de números reais $a_n \geq 0$ tal que $|f_n(x)| \leq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in X$. Nestas condições, as séries $\sum |f_n|$ e $\sum f_n$ são uniformemente convergentes.*

Demonstração: *Pelo critério de comparação, para todo $x \in X$ a série $\sum |f_n(x)|$ é convergente; em particular, a série $\sum f_n(x)$ é pontualmente convergente. Seja $\varepsilon > 0$. Como $\sum a_n$ é convergente, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\sum_{k>n_0} a_k < \varepsilon.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos os restos

$$R_n(x) = \sum_{k>n} |f_k(x)| \qquad e \qquad r_n(x) = \sum_{k>n} f_k(x).$$

Pelo critério de comparação termo a termo, temos

$$|r_n(x)| \leq R_n(x) \leq \sum_{k>n} a_k \qquad \text{para todo } x \in X.$$

Portanto, se $n > n_0$, $|r_n(x)| \leq \sum_{k>n} a_k < \varepsilon$, então $\sum |f_n|$ e $\sum f_n$ são uniformemente convergentes. □

Exemplo 2.3.8 *A série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$ *converge uniformemente em* $\mathbb{R}$*, o mesmo ocorrendo com* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(nx)|}{n^2}$.

De forma intuitiva, (LIMA, 1999) apresenta as séries de potência como "polinômios infinitos" capazes de aproximar muito bem funções dentro de um certo intervalo. Cada termo acrescentado melhora a precisão, e, dentro do raio de convergência, podemos somar, derivar e integrar como se fossem polinômios usuais.

Funções importantes podem ser expressas como somas do tipo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots ,$$

que constituem uma generalização natural dos polinômios e recebem o nome de séries de potência.

Para simplificar a notação, é comum considerar o caso particular $(x_0 = 0)$, onde a série assume a forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots$.

O caso geral reduz-se a este por meio da mudança de variável $y = x - x_0$. Assim, todos os resultados obtidos para séries da forma $\sum a_n x^n$ podem ser adaptados, sem dificuldade, para $\sum a_n(x - x_0)^n$.

O primeiro fato a destacar sobre uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ é que o conjunto dos valores de x para os quais ela converge é um intervalo de centro x_0. Esse intervalo pode ser limitado (aberto, fechado ou semiaberto), igual a $\mathbb{R}$ ou até mesmo reduzir-se a um único ponto. Isto será demonstrado logo a seguir. Antes vejamos um exemplo que ilustra todas essas possibilidades.

Exemplo 2.3.9 *Pelo teste de d'Alembert, a série*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

converge para todo valor de x*. A série*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

converge se, e somente se, $x \in [-1, 1]$*. A série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$

converge se $x \in (-1, 1)$ *e diverge fora desse intervalo. O conjunto dos pontos* $x \in \mathbb{R}$ *para os quais a série geométrica* $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ *converge é o intervalo aberto* $(-1, 1)$*. Finalmente, a série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$$

converge apenas no ponto $x = 0$.

Dada uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, a localização dos pontos x para os quais ela converge se faz por meio do teste de Cauchy (Teorema 6, Capítulo 4), o qual põe em evidência o comportamento da sequência $\sqrt[n]{|a_n|}$.

Se a sequência $\sqrt[n]{|a_n|}$ é ilimitada, então a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge apenas quando $x = 0$. Com efeito, para todo $x \neq 0$ a sequência de números

$$\sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \sqrt[n]{|a_n|}$$

é ilimitada e o mesmo ocorre com $|a_n x^n|$, logo o termo geral da série $\sum a_n x^n$ não tende a zero.

Se, entretanto, a sequência $\sqrt[n]{|a_n|}$ é limitada, então o conjunto

$$R = \left\{ \rho > 0\,;\ \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{\rho} \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ suficientemente grande} \right\}$$

é não vazio. Na realidade, é fácil ver que se $\rho \in R$ e $0 < x < \rho$ então $x \in R$. Logo R é um intervalo, do tipo $(0, r)$, $(0, r]$ ou $(0, +\infty)$, onde $r = \sup R$. O número r é chamado o *raio de convergência* da série $\sum a_n x^n$. (Convencionaremos escrever $r = +\infty$ quando R for ilimitado.)

O raio de convergência r da série de potências $\sum a_n x^n$ goza das seguintes propriedades:

1. Para todo $x \in (-r, r)$ a série $\sum a_n x^n$ *converge absolutamente*. Com efeito, tomando ρ tal que $|x| < \rho < r$, temos
$$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{\rho},$$
e consequentemente
$$\sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{|x|}{\rho} < 1,$$
para todo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Logo $\sum a_n x^n$ converge absolutamente, pelo teste de Cauchy.

2. Se $|x| > r$ então a série $\sum a_n x^n$ *diverge*. Com efeito, neste caso $|x| \notin R$, logo não se tem
$$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{|x|}$$
para todo n suficientemente grande. Isto significa que
$$\sqrt[n]{|a_n|} \geq \frac{1}{|x|},$$
e consequentemente $|a_n x^n| \geq 1$ para uma infinidade de valores de n. Logo, o termo geral da série $\sum a_n x^n$ não tende a zero, e ela diverge.

3. Se $x = \pm r$, nada se pode dizer em geral: a série $\sum a_n x^n$ pode convergir ou divergir, conforme o caso.

4. Se existir $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$ então $r = 1/L$ (entendendo-se que $r = +\infty$ se $L = 0$). Com efeito, para todo $\rho \in R$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n > n_0$,
$$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{\rho}.$$
Fazendo $n \to \infty$ obtemos $L \leq 1/\rho$, donde $\rho \leq 1/L$. Segue-se que
$$r = \sup R \leq \frac{1}{L}.$$
Supondo, por absurdo, que fosse $r < 1/L$, tomaríamos c tal que
$$r < c < \frac{1}{L},$$
donde $L < 1/c$. Pela definição de limite, teríamos
$$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{c}$$
para todo n suficientemente grande, donde $c \in R$ e daí $c < r$, uma contradição. Logo, $r = 1/L$.

Podemos resumir a análise feita acima no

Teorema 2.3.5 *Uma série de potências $\sum a_n x^n$, ou converge apenas para $x = 0$ ou existe r, com $0 < r \leq +\infty$, tal que a série converge absolutamente no intervalo aberto $(-r, r)$ e diverge fora do intervalo fechado $[-r, r]$. Nos extremos $-r$ e r, a série pode convergir ou divergir. Se existir*
$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$
então $r = 1/L$. O número r chama-se o raio de convergência *da série. Além disso, tem-se*
$$0 < \rho < r \iff \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{\rho} \quad \textit{para todo } n \in \mathbb{N} \textit{ suficientemente grande}.$$

Demonstração: *Ver em (LIMA, 2014).*

Observação 2.3.1 *Segue-se do Teorema 2.2.6, que se os coeficientes a_n forem diferentes de zero e existir*
$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L,$$
então o raio de convergência da série $\sum a_n x^n$ é $r = 1/L$.

Teorema 2.3.6 *Uma série de potências $\sum a_n x^n$ converge uniformemente em todo intervalo compacto $[-\rho, \rho]$, onde $0 < \rho <$ raio de convergência.*

Demonstração: *A série $\sum a_n \rho^n$ é absolutamente convergente e, para todo $x \in [-\rho, \rho]$, tem-se $|a_n x^n| \leq |a_n|\rho^n$. Pelo Teorema 2.3.4 teste de Weierstrass, segue-se que a série $\sum a_n x^n$ converge uniformemente no intervalo $[-\rho, \rho]$.* $\square$

Corolário 2.3.1 *Se $r > 0$ é o raio de convergência da série $\sum a_n x^n$, a função $f : (-r, r) \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sum a_n x^n$, é contínua.*

Exemplo 2.3.10 *A série $\sum a_n x^n$ pode não convergir uniformemente em todo o intervalo $(-r, r)$, onde r é o raio de convergência. Isto é claro no caso da série $\sum x^n/n!$, cujo raio de convergência é infinito, para a qual $r_n(x) = \sum_{k>n} \frac{x^k}{k!} = x^{n+1}/(n+1)!$ quando x é positivo. Dado $\varepsilon > 0$, não importa qual n se tome, é impossível ter $r_n(x) < \varepsilon$ para todo x positivo.*

Teorema 2.3.7 (Integração termo a termo) *Seja r o raio de convergência da série de potências $\sum a_n x^n$. Se $[\alpha, \beta] \subset (-r, r)$ então*

$$\int_\alpha^\beta \Big(\sum a_n x^n\Big) dx = \sum \frac{a_n}{n+1}(\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}).$$

Demonstração: *A convergência de $\sum a_n x^n$ é uniforme no intervalo $[\alpha, \beta]$ pois se escrevermos $\rho = \max\{|\alpha|, |\beta|\} < r$ teremos $[\alpha, \beta] \subset [-\rho, \rho]$. Logo é permitido integrar termo a termo, pelo Teorema 2.3.3.* □

Teorema 2.3.8 (Derivação termo a termo) *Seja r o raio de convergência da série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. A função $f : (-r, r) \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, é derivável, com $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1}$ e a série de potências de $f'(x)$ ainda tem raio de convergência r.*

Demonstração: *Seja r' o raio de convergência da série $\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$, a qual converge se, e somente se, $x \cdot \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1} = \sum_{n\geq 1} n a_n x^n$ converge. Logo r' é também o raio de convergência desta última série. Abreviemos a expressão "para todo n suficientemente grande" por "$n \gg 1$". Se $0 < \rho < r$ então, tomando c com $0 < \rho < c < r$, temos $\sqrt[n]{|a_n|} < 1/c$, $n \gg 1$. Por outro lado, como $\lim \sqrt[n]{n} = 1$, vale $\sqrt[n]{n} < c/\rho$, $n \gg 1$. Multiplicando as duas últimas desigualdades, vem $\sqrt[n]{n a_n} < 1/\rho$, $n \gg 1$. Portanto, $0 < \rho < r'$ e, $0 < \rho < r'$. Como é óbvio que $0 < \rho < r'$ então $0 < \rho < r$, concluímos que $r = r'$. Assim, as séries de potências $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ e $\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$ têm o mesmo raio de convergência. Fixado qualquer $x \in (-r, r)$, tomamos o ρ tal que $|x| < \rho < r$. Ambas as séries convergem uniformemente em $[-\rho, \rho]$ logo temos*

$$f'(x) = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}.$$

□

Corolário 2.3.2 *Seja r o raio de convergência da série de potências $\sum a_n x^n$. A função $f : (-r, r) \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sum a_n x^n$, é de classe C^∞. Para quaisquer $x \in (-r, r)$ e $k \in \mathbb{N}$ tem-se*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n\geq k} n(n-1)\dots(n-k+1) a_n x^{n-k}.$$

Em particular, $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$.

Portanto, $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ é o polinômio de Taylor de ordem n da função $f(x) = \sum a_nx^n$ em torno do ponto $x = 0$.

Corolário 2.3.3 (Unicidade da representação em Série de Potências) *Sejam $\sum a_nx^n$ e $\sum b_nx^n$ séries de potências convergentes no intervalo $(-r, r)$ e $X \subset (-r, r)$ um conjunto tendo 0 como ponto de acumulação. Se $\sum a_nx^n = \sum b_nx^n$ para todo $x \in X$ então $a_n = b_n$ para todo $n \geq 0$.*

Com efeito, a hipótese assegura que as funções $f, g : (-r, r) \to \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = \sum a_nx^n$ e $g(x) = \sum b_nx^n$, têm as mesmas derivadas, $f^{(n)}(0) = g^{(n)}(0)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Logo $a_n = f^{(n)}(0)/n! = g^{(n)}(0)/n! = b_n$ para todo $n \geq 0$.

3 Metodologia

Neste capítulo, serão apresentadas propostas metodológicas voltadas para o ensino dos conceitos introdutórios de sequências numéricas, séries numéricas, sequências de funções e séries de funções nos cursos iniciais de Cálculo. As sugestões didáticas utilizam palitos de fósforo, formas geométricas, tecnologias assistivas e outros materiais manipuláveis como recursos pedagógicos.

> Materiais manipuláveis são objetos ou coisas que o aluno seja capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar. Podem ser objetos reais que têm aplicação nos afazeres do dia-a-dia ou podem ser objetos que são usados para representar uma ideia (VALE, 2002, p. 5).

3.1 Fundamentos

A estratégia fundamenta-se na ideia de que a construção visual de padrões favorece o raciocínio indutivo, promove a aprendizagem significativa e possibilita ao estudante compreender conteúdos abstratos de maneira mais concreta e intuitiva.

> O uso de materiais manipuláveis nas aulas de matemática promove vantagens na aprendizagem pois oportuniza a construção do conhecimento de maneira ativa, permitindo ao aluno uma atribuição de significado, de sentido no que se aprende (BORGES; GUIMARÃES, 2025, p. 4).

O uso de materiais concretos no ensino de Matemática apoia-se em princípios de aprendizagem ativa, nos quais o estudante deixa de ser mero receptor de fórmulas prontas e passa a observar, manipular, comparar e formular hipóteses.

Além disso, o processo de indução informal, observar casos particulares e propor uma regra geral, aproxima o estudante do método matemático de construção e generalização, favorecendo a compreensão de como as leis de formação surgem a partir de regularidades.

3.2 Proposta Didática para o Ensino de Sequências Numéricas

A utilização de materiais manipulativos no ensino da Matemática tem se mostrado uma estratégia eficiente para favorecer a aprendizagem significativa, especialmente em conteúdos de maior nível de abstração, como as sequências numéricas.

Entre tais materiais, os palitos de madeira se destacam pela simplicidade, acessibilidade e potencial para visualização de padrões. Nesta subseção, apresenta-se uma proposta metodológica que utiliza palitos como recurso didático para a representação de sequências figurais, permitindo que os estudantes identifiquem regularidades, formulem hipóteses e construam a lei de formação dos termos de forma intuitiva e investigativa.

Objetivo Geral:

Desenvolver no estudante o pensamento matemático por meio da exploração de sequências, estimulando a identificação de padrões, a integração entre representações visuais e algébricas, e a compreensão dos conceitos iniciais de sequências numéricas.

Objetivos Específicos:

1. Reconhecer padrões numéricos e estruturais.
2. Favorecer a construção do termo geral de uma sequência a partir de exemplos concretos.
3. Relacionar representações visuais e algébricas.
4. Estimular o pensamento indutivo e argumentativo.
5. Promover autonomia intelectual na descoberta de relações matemáticas.
6. Introduzir o conceito intuitivo de limite de sequência.

Materiais Necessários: Palitos de madeira (palitos de picolé ou fósforo sem ponta), Cartolina ou folhas A4 para apoio às construções, Cola (opcional), Quadro e marcadores.

Desenvolvimento: A atividade proposta será realizada em duas aulas. Na prineira aula o professor iniciará a atividade apresentando a noção de sequências como arranjos que seguem uma lógica ou padrão segundo a BNCC. Em seguida, exibirá representações iniciais de uma sequência utilizando palitos, como figuras geométricas crescentes. Nesta etapa, não será apresentado o termo geral da sequência, a ideia é estimular a observação e o questionamento.

Os estudantes serão organizados em grupos para reproduzirem com palitos os primeiros 5 ou 7 termos da sequência fornecida pelo professor como é mostrado na Figura 2.

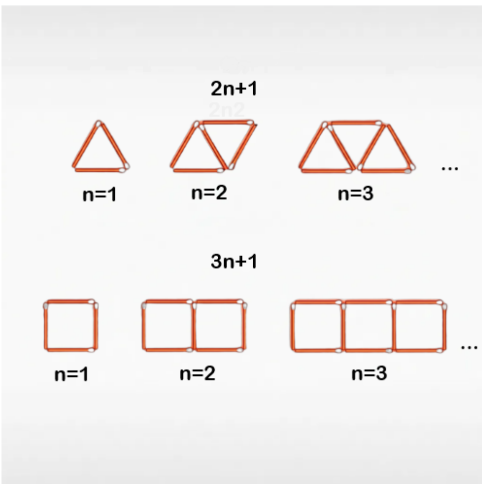

Figura 2 – Exemplos de sequências

A construção visual irá favorecer a percepção da regularidade no crescimento da sequência. Após a construção dos modelos, os grupos serão orientados a contar o número de palitos utilizados em cada termo e logo em seguida irão registrar os valores em tabelas como as apresentadas a seguir:

Termo (n)	**Representação**	**Número de palitos**
1	a_1	3
2	a_2	5
3	a_3	7
4	a_4	9
5	a_5	
6	a_6	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	a_n	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tabela 1 – Tabela de termos da sequência $a_n = 2n + 1$.

Termo (n)	**Representação**	**Número de palitos**
1	a_1	4
2	a_2	7
3	a_3	10
4	a_4	13
5	a_5	
6	a_6	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	a_n	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tabela 2 – Tabela de termos da sequência $a_n = 3n + 1$.

Dessa maneira os alunos analisarão a variação entre os termos e serão direcionados a formular hipóteses sobre o termo geral a_n.

O papel do professor será mediar o processo investigativo por meio de questionamentos orientadores, tais como: “Quantos palitos são acrescentados de um termo para outro?” ou “É possível relacionar o número do termo com a quantidade total de palitos?”. Assim, os estudantes poderão inferir, por exemplo, que a sequência cresce de três em três palitos, chegando a uma expressão do tipo $a_n = 3n + 1$.

Na segunda aula o professor conduzirá os alunos à formalização, a determinação da lei explícita de formação, a construção de representações algébricas, gráficas e tabulares, e a generalização do padrão inicialmente observado de forma concreta. Podem ser propostas atividades adicionais, tais como a criação de novas sequências pelos próprios alunos utilizando palitos, a resolução de problemas (por exemplo: “Quantos palitos são necessários para construir o décimo termo?”) e a comparação de diferentes sequências representáveis com palitos, como lineares e quadráticas.

Avaliação: A avaliação contemplará a participação e o envolvimento na construção das representações, a clareza e a coerência na argumentação sobre o padrão identificado, a correção e a adequação da formulação do termo geral, a resolução de questões aplicadas a termos específicos e a elaboração de um pequeno relatório descritivo sobre o processo de descoberta.

3.3 Proposta Didática para o Ensino de Séries Numéricas

O ensino de séries numéricas costuma representar um desafio significativo para estudantes dos cursos introdutórios de Cálculo, devido ao caráter abstrato do conceito de soma infinita. Para amenizar esse obstáculo, propõe-se uma abordagem didática que utiliza representações visuais e manipulativas, permitindo que os alunos construam uma intuição mais sólida sobre convergência, limites parciais e comportamento das séries.

O estudo de séries demanda a compreensão de acúmulo progressivo. "O material manipulável é um recurso inicial, que exerce a função de mediar a construção do conhecimento"(BORGES; GUIMARÃES, 2025, p. 6). Assim, são sugeridos recursos visuais como blocos geométricos, tiras de papel, áreas coloridas, e ferramentas digitais de simulação. Esses instrumentos possibilitam que o estudante veja a soma se aproximando de um valor limite, favorecendo uma aprendizagem significativa e investigativa.

Objetivo Geral:

Promover a compreensão conceitual e visual das séries numéricas, desenvolvendo uma intuição sólida sobre soma infinita e convergência, por meio da exploração geométrica, análise de somatórios parciais e formalização matemática

Objetivos específicos:

1. Desenvolver uma intuição concreta sobre a ideia de soma infinita.

2. Visualizar, por meio de representações geométricas, o comportamento dos termos parciais.

3. Compreender o conceito de convergência e divergência.

4. Relacionar representações geométricas, tabelas de somatórios e formalização matemática.

5. Estimular o raciocínio investigativo na análise de séries clássicas.

Materiais Necessários: Tiras de papel coloridas com comprimentos proporcionais aos termos da série, quadrados ou retângulos de papel representando áreas, folhas quadriculadas ou malhas cartesianas, régua, tesoura, projetor e software de simulação (GeoGebra).

Desenvolvimento: A proposta apresentada será realizada em duas aulas. Na primeira aula o professor apresentará a pergunta norteadora: “É possível somar infinitos termos e obter um resultado finito?”. A partir disso, mostrará um exemplo clássico:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$$

Sem revelar o resultado, ele irá propor que os alunos investiguem o comportamento da soma parcial até um termo específico.

Os estudantes receberão dois quadrados de papel, um servirá como base e o outro será recortado em tiras para representar os termos da soma. Os termos da série geométrica serão representados da seguinte maneira: o primeiro termo é metade do quadrado, o segundo é metade da metade, o terceiro é metade do termo anterior, e assim sucessivamente. Os alunos irão colar ou posicionar as figuras uma ao lado da outra em cima do quadrado que será a base de acordo com a ordem de cada termo, observando que sempre sobra espaço de maneira que cada novo termo preenche uma parte menor e que a soma se aproxima, mas nunca prenche a área total do quadrado. Essa visualização permite compreender geometricamente que a série converge para 1.

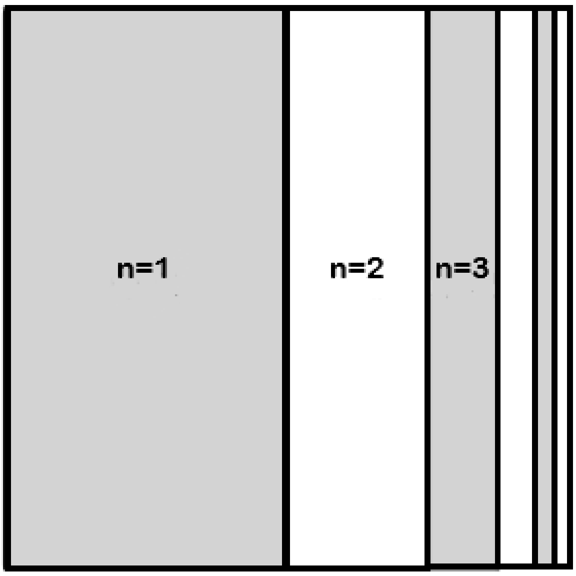

Figura 3 – Atividade visual de séries

Após a manipulação visual, o professor orientará os alunos a construirem uma tabela como:

n	a_n	$s_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$
1	$\frac{1}{2}$	0,5
2	$\frac{1}{4}$	0,75
3	$\frac{1}{8}$	0,875
4		
5		
6		
7		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tabela 3 – Tabela de termos da série

Dessa forma, os alunos serão induzidos a relacionar a representação concreta da área com os valores numéricos da soma. Assim, poderão ser capazes de perceber que o acréscimo em s_n vai se tornando cada vez menor à medida que novos termos são somados e que a sequência das somas parciais se aproxima cada vez mais de um valor limite, o qual corresponde ao valor da série.

Na segunda aula será apresentada os conceitos de limite da séries e sendo a mesma convergente quando possui um limite e divergente, caso contrário. O professor conduzirá a discussão inicial com perguntas do tipo “Os termos estão ficando menores ou maiores?”, “O que aconteceria se continuássemos somando?” e “O espaço restante tende a desaparecer?”. Desta maneira levará os alunos a perceberem que a série converge porque seus termos diminuem e tendem a zero, enquanto a área ocupada pela soma se aproxima de 1 quadrado sem ultrapassar. Esse momento irá prepara o terreno para a apresentar a divergência.
Após compreenderem a convergência, o professor propõe outra série:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + n + \cdots .$$

Usando tiras de papel todas de mesmo tamanho, os alunos rapidamente perceberão que a soma cresce indefinidamente, que a “área total” não pode conter todas as partes e, portanto, que a série diverge; esse contraste visual e intuitivo ajuda a solidificar o conceito de divergência. O professor poderá complementar a atividade utilizando simulações no GeoGebra, apresentando animações das somas parciais, o gráfico da sequência s_n se aproximando do limite. Esses recursos tecnológicos enriquecem a compreensão dos alunos ao tornarem mais clara a dinâmica.

Avaliação: A avaliação da aprendizagem incluirá a produção de relatórios nos quais os alunos descreverão a experiência realizada, a participação em discussões orais com justificativas sobre o fenômeno da convergência, a resolução de exercícios envolvendo o cálculo de somas parciais e a classificação de séries como convergentes ou divergentes com base nas representações visuais construídas em sala; desse modo, será verificado não apenas a compreensão técnica, mas também a capacidade de interpretar e argumentar sobre o comportamento das séries.

3.4 Proposta Didática para o Ensino de Sequências de Funções

O ensino de sequências de funções apresenta desafios específicos, pois envolve duas camadas de abstração: a compreensão das funções individualmente e a análise do comportamento coletivo dessas funções ao longo do índice n. Para minimizar essas dificuldades, recomenda-se empregar atividades que associem representações gráficas, manipulação digital e construção conceitual gradual, de modo que os alunos possam visualizar, comparar e inferir propriedades da convergência pontual e uniforme e por isso "O Geogebra é um aplicativo que só tem a contribuir, além de disponibilizar uma variedade de ferramentas e possibilidades de visualização do conteúdo trabalhado"(OLIVEIRA, 2021, p. 23).

Objetivo Geral:

Promover a compreensão conceitual das sequências de funções por meio de abordagens investigativas e representações gráficas, permitindo que desenvolvam a habilidade de identificar padrões de convergência e construam, de forma intuitiva e fundamentada, os conceitos de convergência pontual e convergência uniforme.

Objetivos Específicos:

1. Desenvolver nos estudantes a capacidade de analisar o comportamento de funções ao longo de uma sequência.

2. Favorecer a diferenciação entre convergência pontual e convergência uniforme de maneira intuitiva.

3. Promover habilidades de interpretação gráfica e reflexão conceitual.

4. Estimular a investigação matemática por meio de recursos digitais, como GeoGebra.

5. Auxiliar na construção do conceito de limite de uma sequência de funções.

Materiais Necessários: Computadores, celulares ou tablets com acesso ao GeoGebra (clássico ou gráfico), quadro branco ou projetor digital, papel milimetrado (opcional, para representações manuais), roteiro impresso com atividades (opcional).

Desenvolvimento: A seguinte proposta será implementada em quatro aulas. Na primeira aula o professor iniciará apresentando um problema visual simples: “Observe a sequência de gráficos abaixo. O que acontece com essas funções à medida que n cresce?"Em seguida, irá exibir um exemplo concreto de sequência de funções, como

$$f_n(x) = x^n$$

mostrando no GeoGebra os gráficos de f_1, f_2, f_3, f_5, f_{10} e assim por diante. A partir das representações, o docente conduzirá a análise por meio de perguntas norteadoras, como: “O gráfico está se aproximando de alguma função?”, “Todos os valores de x se aproximam igualmente rápido?”, “O que acontece quando $n \to \infty$?". Essa abordagem intuitiva introduzirá a ideia de comportamento do limite de funções e prepara os alunos para as definições formais de convergência pontual e uniforme que serão estudadas posteriormente.

A segunda aula será destinada a observação do comportamentos de sequências de funções. O professor exibirá sequências de gráficos no GeoGebra, como por exemplo:

1. $f_n(x) = x^n$ em $[0, 1]$

2. $g_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$

3. $g_n(x) = \frac{1}{1+n^2x^2}$

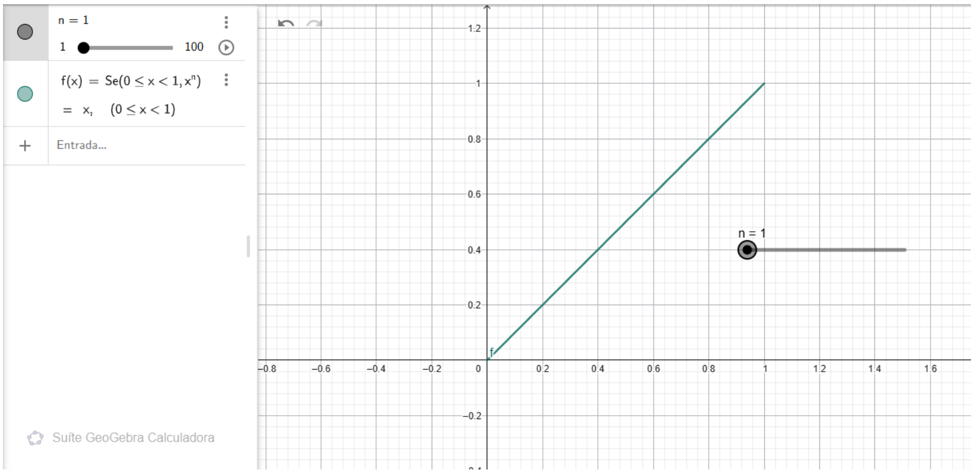

Figura 4 – x^n em $(0, 1]$ quando $n = 1$

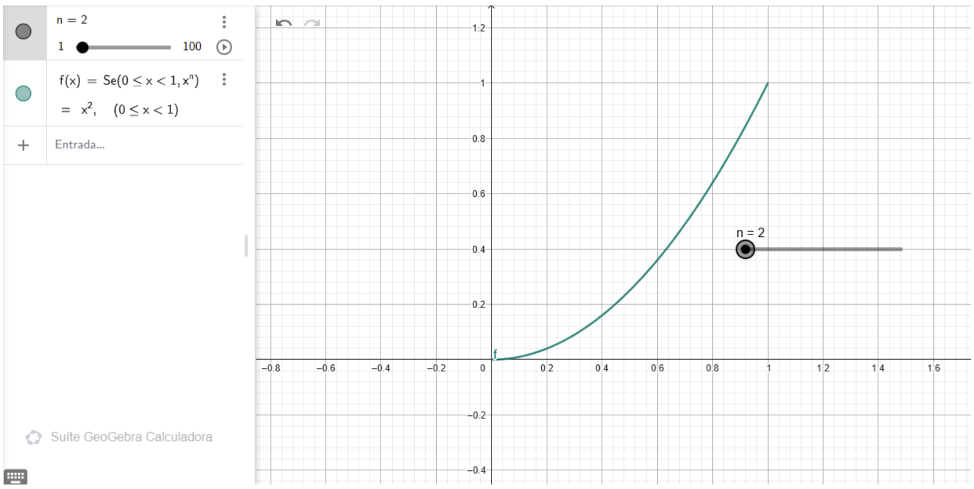

Figura 5 – x^n em $(0, 1]$ quando $n = 2$

Figura 6 – x^n em $(0, 1]$ quando $n = 100$

Os alunos deverão observar, comparar e registrar características essenciais dos gráficos, como a forma da curva, a rapidez com que determinadas regiões se modificam e se a convergência ocorre em todo o intervalo ou apenas em pontos específicos. Para isto o professor irá orientar a análise, propondo indagações como: “A sequência converge? Para qual função?”, “Para quais valores de x a convergência ocorre mais rapidamente?” e “Há pontos em que não ocorre convergência?”. Essa etapa será fundamental para desenvolver a intuição visual dos estudantes, preparando-os para compreender, mais pra frente, as definições formais de convergência pontual e uniforme.

Na terceira aula acontecerá o momento da investigação guiada, os alunos serão separados em grupos e cada grupo receberá uma sequência de funções e deverão fazer a manipulação no GeoGebra. Exemplo Sugerido

$$f_n(x) = \frac{x}{1+nx},$$

a partir da sequência os alunos irão representar f_1, f_2, f_3, f_5, f_10 elaborando uma tabela com valores numéricos, além de descreverem verbalmente o comportamento de $f_n(x)$ para valores pequenos e grandes de x. Os alunos seraõ induzidos a formular hipóteses sobre o limite da sequência de funções. As atividades realizadas nessa aula desenvolverá nos alunos a capacidade de generalização baseada em dados.

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_5(x)$	$f_{10}(x)$	Tendência

Tabela 4 – Exemplo de tabela de representação

Por fim, na quarta aula ocorrerá a generalização, o professor irá conduzir o processo para a definição formal. Discussões importantes serão desenvolvidas a partir das observações dos alunos. Primeiro, será abordada a convergência pontual, destacando que, em muitos exemplos, as funções realmente se aproximam da função-limite para cada ponto do domínio, mas essa aproximação não ocorre com a mesma intensidade em todo o intervalo. Em seguida, o professor introduzirá a ideia de convergência uniforme e questionará se “todas as partes do gráfico” se aproximam com a mesma rapidez. Por fim, o docente evidenciará a diferença entre os dois tipos de convergência por meio de exemplos visuais, como a sequência $f_n(x) = x^n$ no intervalo $[0, 1]$, que converge pontualmente, mas não uniformemente, ressaltando como o comportamento gráfico ajuda a compreender essa distinção.

Avaliação: A avaliação da aprendizagem será conduzida de forma integrada, valorizando tanto a análise conceitual quanto a interpretação visual dos estudantes. Relatórios escritos podem registrar a evolução das sequências de funções, permitindo que os alunos descrevam, com suas próprias palavras, os comportamentos observados. Além disso, justificativas orais sobre convergência pontual e uniforme ajudam a verificar a compreensão teórica e a capacidade de argumentação matemática. Exercícios envolvendo tabelas e gráficos permitirão explorar a leitura e comparação de diferentes sequências, enquanto atividades de classificação, identificando quais sequências convergem ou divergem com base nas representações visuais, consolidarão a interpretação intuitiva e formal dos conteúdos.

3.5 Proposta Didática para o Ensino de Séries de Funções

O estudo de séries de funções está entre os temas mais abstratos do currículo de Cálculo e Análise, pois exige do estudante a compreensão simultânea de três ideias fundamentais: a soma infinita, a variação funcional e os diferentes tipos de convergência. Para reduzir a carga cognitiva associada a esses conceitos e favorecer uma aprendizagem mais autônoma, propõe-se uma abordagem didática que integra visualização, experimentação, manipulação algébrica gradual e interpretação gráfica. Essa proposta dialoga diretamente com a necessidade de apoiar o estudante no enfrentamento das dificuldades típicas desse conteúdo, uma vez que

> (...) o estudo da Matemática é algo que deixa a maioria dos alunos bem preocupados isso é fato, pois, sabe-se que alguns apresentam muitas dificuldades em aprender certos conteúdos. É aí que entra o uso de um recurso tecnológico para auxiliar o aluno no conteúdo em que o mesmo não está conseguindo compreender da maneira tradicional mostrada pelo professor (OLIVEIRA, 2021, p. 13).

> O software educativo proporciona aos alunos uma melhor visualização do conteúdo abordado levando o mesmo a pensar e refletir sobre o que está sendo trabalhado naquele momento em sala de aula, isso faz com que o aluno tire suas próprias conclusões sobre o conteúdo exposto e que ele aprenda a pensar e não espere que o professor já venha com suas respostas prontas e acabadas (OLIVEIRA, 2021, p. 9).

Dessa forma, o uso de tecnologias e recursos visuais torna-se um componente essencial para tornar o estudo das séries de funções mais acessível, significativo e alinhado às necessidades reais dos estudantes.

Objetivo Geral:

Levar o estudante a compreender o comportamento de séries de funções a partir da análise de suas somas parciais, investigando critérios de convergência pontual e uniforme em séries de potências, de modo a desenvolver intuição sobre soma infinita.

Objetivos Específicos:

1. Desenvolver a intuição sobre soma sucessiva de funções.
2. Compreender quando uma série de funções converge ou diverge.
3. Visualizar como as parcelas (termos parciais) aproximam o somatório final.

4. Diferenciar convergência pontual e convergência uniforme.

5. Construir a ideia de intervalo de convergência (no caso de séries de potências).

6. Promover a compreensão do comportamento global e local da série.

Materiais Necessários: GeoGebra (versão gráfica ou clássica), projetor multimídia ou lousa digital, Computadores, tablets ou celulares com acesso ao software, folhas de registro, tabelas e cadernos para cálculos.

Desenvolvimento: Essa proposta administrada em duas aulas. Na primeira aula o professor iniciará com uma pergunta simples, mas instigante: “É possível somar infinitas funções e ainda obter algo que faça sentido? Como saber se essa soma infinita realmente se comporta como uma função definida?” Em seguida, apresentará uma série de funções que os alunos já conhecem intuitivamente, como por exemplo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

O professor fará as seguintes indagações para os alunos, "Para quais valores de x essa soma faz sentido?O que significa ’somar infinitos termos’ nesse contexto?"e "O que significa “somar infinitos termos” nesse contexto?", assim, os alunos começarão a reconhecer a dificuldade real: como visualizar algo infinito?

Utilizando o GeoGebra, o professor irá exibir a soma parcial geometrica

$$s_n(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4.$$

Os estudantes deverão observar como o gráfico do termo parcial $s_n(x)$ se transforma conforme o valor de n aumenta. Uma análise guiada será conduzida por meio de perguntas norteadoras que estimulam a reflexão dos alunos sobre o comportamento das séries de funções. O professor fará questionamentos de como o gráfico se modifica à medida que n cresce e se a curva parece estabilizar para determinados valores de x, incentivando dessa maneira a percepção de padrões visuais de convergência. Também será investigado pelos alunos se existem valores de x para os quais o gráfico se torna instável ou “explode”, promovendo a identificação de regiões onde não há convergência. Por fim, o docente questionará para quais valores de x os somatórios parciais convergem, o docente direcionará os estudantes à compreensão do intervalo de convergência. Essa etapa é essencial para o desenvolvimento da intuição dos alunos sobre o comportamento local e global das séries de funções.

Na segunda aula haverá uma investigação guiada em grupos. Os estudantes são organizados em equipes e recebem diferentes séries de funções para análise, como uma série de potências simples $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$, uma série trigonométrica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$ e uma série alternada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+1}$. Cada grupo construirá gráficos dos termos parciais no GeoGebra, preencherão tabelas com valores de $s_n(x)$ para diversos pontos x.

Os alunos observarão se há indícios de convergência e irão conjecturar, quando possível, a função-limite. Além disso, os estudantes farão a comparação do comportamento da série para

x	$\sum f_1(x)$	$\sum f_2(x)$	$\sum f_5(x)$	$\sum f_{10}(x)$	Tendência

Tabela 5 – Exemplo de tabela de representação

diferentes valores de x e verificarão se a convergência ocorre de modo uniforme ou apenas pontual. Espera-se estimula a autonomia, o raciocínio investigativo e a capacidade de formular hipóteses fundamentadas em evidências visuais e numéricas.

Após a exploração visual, o professor retomará a discussão e conduzirá os estudantes para a fundamentação teórica. Nesse momento, será destacado que uma série de funções converge pontualmente em um ponto x sempre que a sequência de somatórios parciais $s_n(x)$ converge.

Em contraste, a convergência uniforme exige uma condição mais forte, a aproximação ocorre de maneira homogênea em todo o intervalo considerado. O professor também evidenciará fenômenos importantes observados anteriormente nos gráficos, tais como convergência apenas em pontos isolados, convergência restrita a certos intervalos, divergência fora do intervalo de convergência e até mesmo a perda de propriedades como continuidade ou derivabilidade quando a convergência não é uniforme. Assim, esta etapa formalizará teoricamente aquilo que os alunos já haviam percebido empiricamente, consolidando a ponte entre intuição visual e rigor matemático.

Avaliação: A avaliação da aprendizagem envolverá a análise dos relatórios produzidos pelos estudantes, verificando a qualidade das conjecturas formuladas e a consistência das justificativas apresentadas. Incluirá também a interpretação dos gráficos dos somatórios parciais, permitindo avaliar se o aluno compreende o comportamento da série ao longo do domínio. Outro aspecto importante será o reconhecimento correto do intervalo de convergência e a capacidade de classificar a convergência como pontual ou uniforme. Por fim, espera-se que o estudante seja capaz de explicar com clareza a diferença entre uma série numérica e uma série de funções, evidenciando compreensão conceitual sólida.

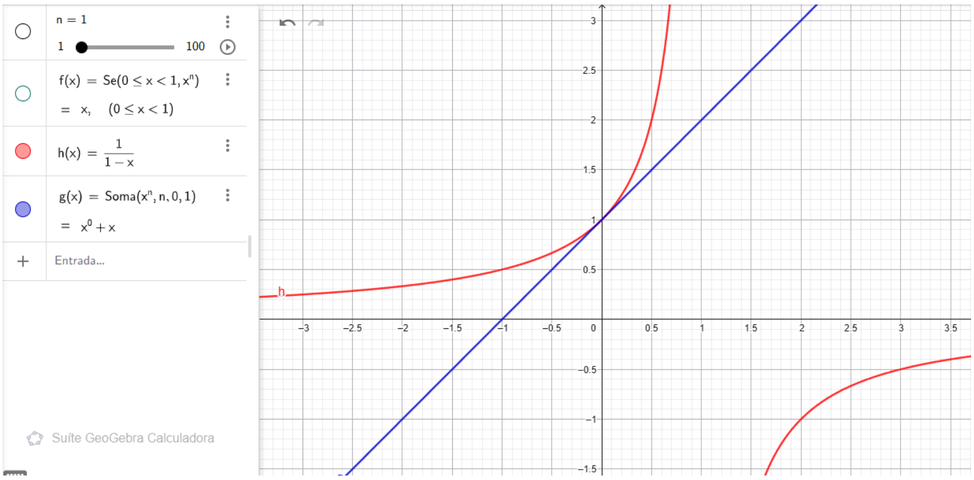

Figura 7 – Gráfico da soma parcial de x^n quando $n = 1$ e de $\dfrac{1}{1-x}$

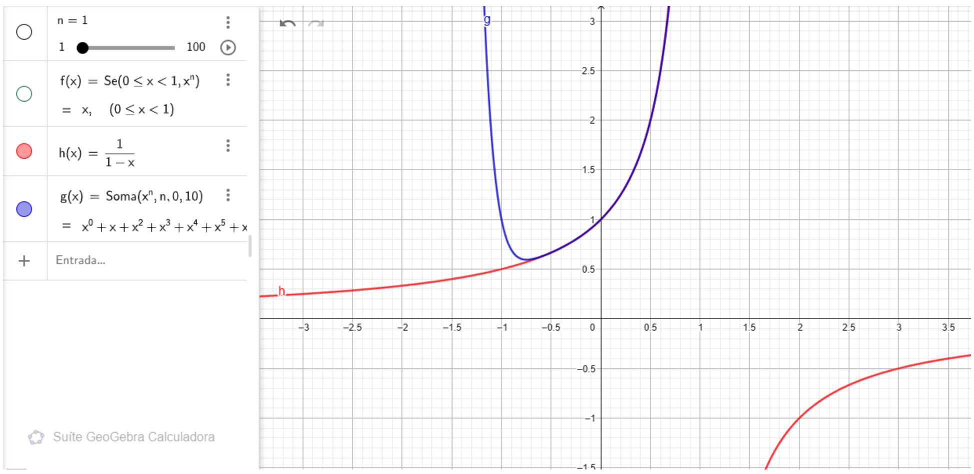

Figura 8 – Gráfico da soma parcial de x^n quando $n = 10$ e de $\dfrac{1}{1-x}$

Figura 9 – Gráfico da soma parcial de x^n quando $n = 100$ e de $\dfrac{1}{1-x}$

4 Análise e Discussão

A análise dos fundamentos teóricos e das propostas metodológicas apresentadas neste trabalho permite observar a relevância de integrar o rigor matemático da Análise Real com estratégias didáticas acessíveis e coerentes com os processos de aprendizagem. Este capítulo irá dispor sobre como os conceitos de sequências e séries poderiam ser melhor compreendidos por meio de abordagens visuais, manipulativas e investigativas, com a finalidade de ampliar a compreensão conceitual dos estudantes e favorecer uma aprendizagem significativa.

4.1 Contribuições da Abordagem Teórica

A fundamentação teórica exprlorada no segundo capítulo mostrou que sequências e séries constituem uma estrutura matemática essencial para a compreensão dos conceitos de limite e continuidade, afinal "A aquisição do pensamento matemático acontece sistematicamente, ou seja, só posso acompanhar um pensamento se compreender outro."(BONFIM, 2019, p. 4). A análise formal desses objetos, como critérios de convergência, teoremas de comparação, propriedades de sequências monótonas, convergência absoluta e uniforme, evidencia o papel central dessas ideias na formação matemática rigorosa.

Esse aprofundamento teórico é indispensável tanto para professores quanto para estudantes, pois fornece os fundamentos necessário para compreender fenômenos mais complexos no Cálculo e na Análise Real.

4.2 Análise de Materiais Didáticos

Dentre os livros didáticos mais utilizados no ensino de cálculo realizou-se uma revisão bibliográfica de dois livros didáticos, (STEWART, 2014) e (GUIDORIZZI, 2011). A obra de Stewart apresenta os temas de sequências e séries de maneira progressiva, o livro oferece uma abordagem clara o que facilita a transição entre cálculo e conceitos mais abstratos. Em termos de profundidade, Stewart evita demonstrações formais longas, privilegiando justificativas intuitivas e exemplos visuais, o que torna o texto acessível a estudantes iniciantes. Os exemplos costumam relacionar séries a problemas físicos, geométricos ou tecnológicos. A obra utiliza abundantes recursos gráficos e tabelas para ilustrar convergência, somatórios parciais e comportamento de funções aproximadas por séries, o que reforça seu caráter pedagógico e orientado ao aprendizado visual.

Por outro lado, a obra de Guidorizzi adota uma abordagem mais formal e teórica, ainda que acessível, seguindo uma estrutura rígida, o exemplar segue a seguinte ordem começando por sequências, desenvolve séries numéricas e posteriormente séries de funções, com atenção especial à convergência uniforme e séries de potências. O autor oferece definições mais rigorosas e inclui demonstrações completas de resultados importantes. Os exemplos apresentados tendem a ser mais abstratos, com aplicações ocasionais, mas geralmente voltados à compreensão estrutural dos conceitos. O livro utiliza gráficos e comparações de forma mais pontual. Apesar disso, sua abordagem pedagógica é organizada e sistemática, destinada ao desenvolvimento do rigor conceitual.

Contudo os conceitos como convergência, divergência, aproximação e comportamento assintótico não são intuitivos para grande parte dos alunos, o que torna o estudo inicial de Análise Real especialmente desafiador. Essa dificuldade é reforçada pela observação de que "É muitas vezes mais fácil para os alunos falar de modelos físicos ou pictoriais do que de ideias abstratas."(VALE, 2002, p. 6), evidenciando a importância de estratégias didáticas que tornem esses conceitos mais concretos e acessíveis.

Além disso, conteúdos como convergência uniforme, raio de convergência de séries de potências ou testes como o da razão e o da raiz exigem habilidades de visualização e análise que nem sempre são estimuladas no ensino tradicional. Muitos estudantes compreendem os cálculos, mas não compreendem o significado matemático subjacente. Esse cenário indica que estratégias exclusivamente algébricas não são suficientes para garantir compreensão profunda. Portanto, a análise dos materiais didáticos reforça a importância de propostas pedagógicas que articulem rigor e intuição, aproximando o estudante das ideias fundamentais da Análise Real sem desprezar os recursos didáticos que tornam o tema mais concreto e acessível no ensino de Cálculo.

4.3 Potencial Pedagógico dos Materiais Manipuláveis

> Os materiais manipuláveis são objetos disponíveis para o professor e alunos, com o intuito de trabalhar com conceitos matemáticos de forma que venha a facilitar a compreensão e o desenvolvimento do aluno, além de trabalhar de forma prazerosa (ALVES, 2016, p. 6).

As propostas metodológicas apresentadas no Capítulo 3 pretedem suprir as lacunas causadas pelas limitações do ensino tradicional de sequências e séries. Para isto, se faz necessário a utilização de palitos, formas geométricas, quadros visuais e tecnologias assistivas como ferramentas para explorar padrões e induzir a formalização matemática. Espera-se com a implementação dessas atividades a constatação de que o uso de materiais manipuláveis pode contribuir significativamente para o desenvolvimento do pensamento indutivo e da percepção estrutural dos conceitos estudados, afinal "(..) ensinar não é transferir conhecimento, mas criar possibilidades para sua própria produção ou sua construção” (FREIRE, 1996, p. 12).
Por exemplo:

- **Sequências numéricas**: podem ser representadas por figuras construídas com palitos, permitindo ao estudante visualizar progressões aritméticas e geométricas, ou identificar comportamentos de crescimento e estabilização.

- **Séries numéricas**: especialmente as parciais, podem ser apresentadas como composições acumulativas de elementos, facilitando a compreensão do processo de soma infinita.
- **Sequências de funções**: podem ser exploradas por meio de gráficos sobrepostos, evidenciando visualmente a aproximação funcional e o papel da convergência pontual e uniforme.
- **Séries de funções**: como as séries de potências, podem ser trabalhadas com softwares como o GeoGebra, permitindo manipular dinamicamente o número de termos e observar o impacto sobre a aproximação da função.

Os recursos físicos podem promover maior engajamento e reduzir a ansiedade matemática, além de criarem um ambiente de descoberta ativa, favorecendo a internalização dos conceitos. Essa percepção está alinhada à ideia de que “Os materiais concretos permitem que os alunos trabalhem em contato direto com eles; permitem uma representação de uma ideia matemática através de objetos a três dimensões"(VALE, 2002, p. 7). Dessa maneira poderá ser reforçado mediante a implementação das propostas que a interação direta com representações físicas contribui bastante para a compreensão dos conteúdos e para a construção de significados.

4.4 Avaliação das Propostas Didáticas

As propostas metodológicas apresentam potencial para melhorar o desempenho e a compreensão dos estudantes, especialmente em conteúdos tradicionalmente considerados de difícil abstração. As atividades permitirão uma maior participação ativa dos estudantes, estímulo ao pensamento investigativo, construção de conexões entre diferentes representações matemáticas, desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo, compreensão mais intuitiva dos conceitos de convergência, transição facilitada para o formalismo da Análise Real.

> No contexto da Matemática, a aprendizagem nesta perspectiva depende de ações que caracterizam o fazer matemática: experimentar, interpretar, visualizar, induzir, conjecturar, abstrair, generalizar e enfim demonstrar. É o aluno agindo, diferentemente de seu papel passivo frente a uma apresentação formal do conhecimento, a qual é baseada essencialmente na transmissão ordenada de ’fatos’, geralmente na forma de definições e propriedades. (GRAVINA; SANTAROSA, 1999, p. 16)

As tecnologias assistivas, como o GeoGebra, mostram-se altamente eficazes para a visualização do comportamento de funções e para a manipulação dos termos das séries, favorecendo a construção gradual de conceitos abstratos a partir de representações exploráveis. Tal perspectiva dialoga diretamente com a afirmação de que "A tecnologia é essencial para a educação e deve sim estar presente nas aulas de Matemática"(OLIVEIRA, 2021, p. 13). Sendo assim reforçado que sua presença não é apenas desejável, mas necessária ao processo de aprendizagem. Complementarmente, a ideia de mediação tecnológica é aprofundada quando se reconhece que "A tecnologia digital coloca à nossa disposição ferramentas interativas que incorporam sistemas dinâmicos de representação na forma de objetos concreto-abstratos"(GRAVINA; BASSO, 2012, p. 14)

4.5 Considerações Sobre as Limitações

Apesar de seus benefícios, reconhece-se que as propostas metodológicas não eliminam a necessidade do estudo formal além de que nem sempre é possível representar conceitos abstratos. O rigor técinico continua tendo sua importância na Análise Real. Conteúdos como demonstrações, propriedades teóricas e critérios rigorosos de convergência continuam exigindo dedicação e aprofundamento.

Além disso, "O uso de materiais manipuláveis pressupõe planejamento, intencionalidade de modo a interligá-los aos conceitos matemáticos, avaliando se atende aos objetivos estabelecidos."(BORGES; GUIMARÃES, 2025, p. 3). No entanto, tais limitações não reduzem o valor pedagógico das atividades, que se mostram altamente vantajosas quando integradas de forma coerente ao processo de ensino.

5 Considerações finais

O presente trabalho teve como objetivo investigar fundamentos teóricos e propostas metodológicas voltadas ao ensino de sequências numéricas, séries numéricas, sequências de funções e séries de funções nos cursos introdutórios de Cálculo. Para isso, analisaram-se definições, propriedades, exemplos e critérios de convergência desses objetos matemáticos. Complementarmente, foram apresentadas e analisadas propostas metodológicas baseadas em materiais manipuláveis, recursos visuais e tecnologias assistivas, buscando aproximar o rigor matemático da Análise Real de estratégias de ensino mais acessíveis, intuitivas e investigativas.

As atividades sugeridas permitiram ao estudante visualizar padrões, estabelecer relações e construir significados mais sólidos antes de entrar na formalização completa. Essa abordagem está em consonância com a perspectiva defendida pela Base Nacional Comum Curricular, que orienta o desenvolvimento de práticas investigativas, reflexivas e criativas na construção do conhecimento matemático: "exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade" (Brasil. Ministério da Educação, 2018, p. 9).

Ao longo do trabalho, ficou evidente que o ensino tradicional, baseado quase exclusivamente na repetição de técnicas e exercícios mecânicos, não atende às demandas da educação contemporânea nem ao perfil atual dos estudantes. Como afirma Bonfim (2019), a metodologia tradicionalista empregada com mais intensidade no ensino da matemática, não acompanha o desenvolvimento tecnológico da sociedade e menos ainda as exigências da pedagogia moderna, exigindo dos alunos excesso de técnicas operatórias sem que sejam justificadas. Essa constatação reforça a importância de metodologias que promovam a compreensão conceitual e o pensamento crítico.

Também se observou que o papel do professor é fundamental nesse processo. Como destaca Oliveira (2021), cabe ao professor levar o aluno a construir o seu próprio pensamento e conhecimento sobre a explicação do conteúdo abordado. Assim, ao oferecer atividades investigativas, recursos manipuláveis e ambientes de experimentação, o docente possibilita ao estudante desenvolver autonomia, testar hipóteses e estabelecer conexões significativas entre diferentes representações matemáticas. Ainda segundo Oliveira (2021), sabe-se que a Matemática é um dos componentes curriculares em que os alunos apresentam mais dificuldades na aprendizagem de certos conteúdos, dessa forma, cabe ao professor procurar o melhor meio de poder contribuir com o aprendizado do estudante, o que reforça a relevância das propostas apresentadas neste trabalho.

Conclui-se, portanto, que a integração entre rigor teórico e metodologias ativas constitui um caminho promissor para o ensino de sequências e séries. A abordagem aqui discutida contribuirá para a aprendizagem significativa, fortalecerá a compreensão dos processos matemáticos e oferecerá subsídios para que o estudante desenvolva competências analíticas e investigativas.

Referências

ALVES, L. L. **A importância da matemática nos anos iniciais**. *EREMATSUL–Encontro Regional de Estudantes de Matemática do Sul*, v. 22, 2016.

BARTLE, R. G.; SHERBERT, D. R. **Introduction to Real Analysis by**. John Wiley & Sons, Inc.„ 2020.

BONFIM, W. L. **O Letramento matemático e as dificuldades de abstração no processo de ensino e aprendizagem**. *Revista Acadêmica Online*, v. 5, n. 29, p. e691–e691, 2019.

BORGES, R.; GUIMARÃES, S. **MATERIAIS MANIPULÁVEIS NO ENSINO DE NÚMEROS**. *Anais do Seminário Sul-Mato-Grossense de Pesquisa em Educação Matemática*, v. 19, n. 1, p. 1–10, 2025.

Brasil. Ministério da Educação. ***Base Nacional Comum Curricular***. Brasília: Ministério da Educação, 2018.

DAMAZIO, A.; MADEIRA, S. C. **Reflexiones sobre"práctica"en la enseñanza de la matemática: perspectiva histórico-crítica**. *Contrapontos*, v. 19, n. 1, p. 104–125, 2019.

FREIRE, P. ***Pedagogia da autonomia***. [S.l.: s.n.], 1996.

GRAVINA, M. A.; BASSO, M. V. d. A. **Mídias digitais na educação matemática**. *Matemática, mídias digitais e didática: tripé para formação do professor de matemática. Porto Alegre: Evangraf, 2012. p. 11-35*, 2012.

GRAVINA, M. A.; SANTAROSA, L. M. C. **A aprendizagem da matemática em ambientes informatizados**. *Informática na educação: teoria e prática. Porto Alegre. Vol. 1, n. 2 (abr. 1999), p. 73-88*, 1999.

GUIDORIZZI, H. L. ***Um curso de cálculo, vol. 4***. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2011.

LIMA, E. Lages. ***Curso de Análise***, Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

LIMA, E. L. ***Análise Real: Funções de uma Variável***. 4. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1999. v. 1.

OLIVEIRA, E. R. d. ***O uso da tecnologia no ensino da matemática contribuições do software GeoGebra no ensino da função do 1º grau***. Dissertação (Mestrado), 2021.

PASSOS, É. O.; TAKAHASHI, E. K. **Recursos didáticos nas aulas de matemática nos anos iniciais: critérios que orientam a escolha eo uso por parte de professores**. *Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos*, SciELO Brasil, v. 99, n. 251, p. 172–188, 2018.

STEWART, J. ***Cálculo***. [S.l.]: Cengage Learning São Paulo, 2014. v. 2.

VALE, I. **Materiais manipuláveis**. 2002.