



UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
FACULDADE DE TECNOLOGIA
ENGENHARIA DA COMPUTAÇÃO

SIMULAÇÃO E CONTROLE DE PROFUNDIDADE E ARFAGEM DE
UM VEÍCULO AUTÔNOMO SUBAQUÁTICO SOB CONTROLADOR
NÃO LINEAR QUASE-DESLIZANTE TERMINAL

Davilon Maclus Cruz Camillo

MANAUS-AM

2026

Davilon Maclus Cruz Camillo

**SIMULAÇÃO E CONTROLE DE PROFUNDIDADE E ARFAGEM DE
UM VEÍCULO AUTÔNOMO SUBAQUÁTICO SOB CONTROLADOR
NÃO LINEAR QUASE-DESLIZANTE TERMINAL**

Monografia apresentada à Coordenação do
Curso de Engenharia da Computação da
Universidade Federal do Amazonas, como
parte dos requisitos necessários à obtenção
do título de Engenheiro de Computação.

Orientador: Prof. Dr. Iury Valente de Bessa

MANAUS-AM

2026

Ficha Catalográfica

Elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

- C183s Camillo, Davilon Maclus Cruz
 Simulação e controle de profundidade e arfagem de um veículo
 autônomo subaquático sob controlador não linear quase-deslizante terminal
 / Davilon Maclus Cruz Camillo. - 2026.
 93 f. : il., color. ; 31 cm.
- Orientador(a): Iury Valente de Bessa.
 Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) - Universidade Federal do
 Amazonas, Faculdade de Tecnologia, Curso de Engenharia da
 Computação, Manaus, 2026.
1. Veículo autônomo subaquático. 2. Modo deslizante terminal discreto.
 3. Profundidade. 4. Arfagem. 5. NPS AUV II. I. Bessa, Iury Valente de. II.
 Universidade Federal do Amazonas. Faculdade de Tecnologia. Curso de
 Engenharia da Computação. III. Título
-

Davilon Maclus Cruz Camillo

**SIMULAÇÃO E CONTROLE DE PROFUNDIDADE E ARFAGEM DE
UM VEÍCULO AUTÔNOMO SUBAQUÁTICO SOB CONTROLADOR
NÃO LINEAR QUASE-DESLIZANTE TERMINAL**

Monografia apresentada à Coordenação do
Curso de Engenharia da Computação da
Universidade Federal do Amazonas, como
parte dos requisitos necessários à obtenção
do título de Engenheiro de Computação.


Aprovado em 13 de janeiro de 2026.

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
 **IURY VALENTE DE BESSA**
Data: 14/01/2026 12:37:39-0300
Verifique em <https://validar.it.gov.br>


Prof. Dr. Iury Valente de Bessa – Presidente e Orientador

Departamento de Eletricidade – UFAM

Documento assinado digitalmente
 **VALDIR SAMPAIO DA SILVA**
Data: 14/01/2026 12:11:32-0300
Verifique em <https://validar.it.gov.br>

Prof. Me. Valdir Sampaio da Silva – Membro

Departamento de Eletricidade – UFAM

Documento assinado digitalmente
 **FLORINDO ANTONIO DE CARVALHO AYRES JUN**
Data: 14/01/2026 12:28:24-0300
Verifique em <https://validar.it.gov.br>

Prof. Dr. Florindo Antonio Carvalho Ayres Júnior – Membro

Departamento de Eletricidade – UFAM

MANAUS-AM

2026

Dedico este trabalho de conclusão de curso a todos que acreditaram em mim e me motivaram a persistir. Meu sincero agradecimento por fazerem parte dessa conquista.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço a D-us, por Sua graça e misericórdia, que se fizeram presentes sobretudo nos momentos mais difíceis da minha trajetória acadêmica, concedendo-me força, perseverança e serenidade para seguir adiante.

Aos meus pais, abba Arnaldo Camillo e ima Janete Cruz, expresso minha profunda gratidão pelos esforços contínuos dedicados à construção da minha educação e à formação do meu caráter. O apoio incondicional, os valores transmitidos e o incentivo constante foram fundamentais para que eu me tornasse uma pessoa emocionalmente forte, resiliente e determinada a alcançar meus objetivos.

Agradeço, com especial carinho, ao meu namorado Lucas Moura, cuja presença, apoio e incentivo foram essenciais ao longo deste percurso. Sua confiança e motivação tiveram papel significativo no meu progresso acadêmico e pessoal.

Aos meus amigos Andevaldo Vitório, Caroline Braz, Jimmy Villalaz, Jakeline Mesquita, João Victor, Karen Letícia, Bruno Solimões, Maria Regina e Gabriel Moraes, registro meu sincero agradecimento pelos momentos de convivência, companheirismo e amizade que tornaram a jornada de graduação mais leve e significativa. As experiências compartilhadas com vocês contribuíram de forma decisiva para o meu crescimento humano, para o aprimoramento da minha comunicação e para a minha evolução na interação social, especialmente enquanto pessoa no espectro autista, condição que faz parte da minha identidade e da minha forma singular de perceber o mundo.

Manifesto ainda minha gratidão especial aos professores que marcaram de forma profunda a minha formação acadêmica e intelectual. Ao meu orientador, Iury V. B., agradeço pela orientação rigorosa, pelas correções sempre construtivas, pela confiança e pela liberdade concedida na busca do conhecimento científico. Ao professor Valdir S. S., sou grato pela postura exigente e inspiradora, expressa na memorável afirmação de que “aluno é como parafuso: quanto mais se aperta, mais robusto se torna”, lição que levo comigo

como símbolo de amadurecimento acadêmico. Ao saudoso professor Ayres M. A., deixo meu reconhecimento por tornar as aulas de Sinais e Sistemas claras, envolventes e intelectualmente estimulantes, despertando na turma o encantamento pelo rigor e pela beleza da teoria.

Agradeço, também, ao professor Dmitry Logachev, do Departamento de Matemática, cuja influência foi determinante para despertar meu interesse pelas teorias algébricas mais abstratas. O contato com temas como teoria dos números e geometria algébrica revelou-me um universo matemático profundo e fascinante, marcado por discussões intelectualmente enriquecedoras, muitas delas conduzidas inclusive na língua russa, experiência que contribuiu de forma singular para minha formação.

Por fim, estendo meus agradecimentos a todas as pessoas que, direta ou indiretamente, fizeram parte da minha trajetória durante o período de graduação, ainda que por um breve intervalo de tempo. Cada apoio, incentivo e interação teve importância na minha formação acadêmica e humana. A todos vocês, meu sincero agradecimento. Este trabalho é, em alguma medida, resultado da contribuição coletiva de todos que acreditaram em mim.

¹Os termos *abba* e *ima* são palavras de origem hebraica, utilizadas tradicionalmente para designar, respectivamente, pai e mãe. Da mesma forma, a grafia *D-us* é adotada, conforme a tradição judaica, como forma de respeito ao Nome divino. O autor, pertencente a uma família de tradição judaica, optou por manter tais expressões nesta seção em respeito à sua identidade cultural e religiosa.

*“Eu trabalhei duro para chegar ao topo —
principalmente porque não tinha mais para
onde cair.”*

(Julius Henry Marx)

Resumo

O avanço recente das tecnologias associadas a veículos autônomos, aliado ao crescimento do interesse por aplicações subaquáticas — tais como exploração oceânica, monitoramento ambiental e inspeção de estruturas submersas — tem impulsionado o desenvolvimento de técnicas avançadas de modelagem e controle para Veículos Autônomos Subaquáticos (VASs). Esses veículos são caracterizados por uma dinâmica fortemente não linear, acoplada e sujeita a incertezas hidrodinâmicas significativas, o que impõe desafios substanciais ao projeto de estratégias de controle capazes de garantir desempenho, robustez e estabilidade em condições operacionais adversas. Neste trabalho, é desenvolvido e avaliado um Controlador por Modo Deslizante Terminal Discreto (CMDTD) aplicado ao controle acoplado de profundidade e arfagem de um VAS. O estudo é conduzido a partir do modelo dinâmico do *Naval Postgraduate School Autonomous Underwater Vehicle II* (NPS AUV II), amplamente referenciado na literatura por representar de forma realista as características hidrodinâmicas de veículos submersos de médio porte. A modelagem considera as equações dinâmicas e cinemáticas completas do veículo, incluindo efeitos não lineares, acoplamentos entre graus de liberdade e forças restauradoras associadas ao empuxo e ao peso. O controlador proposto baseia-se na definição de superfícies de deslizamento associadas às variáveis de profundidade e arfagem, incorporando um termo terminal não linear com o objetivo de garantir convergência em tempo finito do erro de profundidade. A atuação é realizada exclusivamente por meio dos planos de popa e propulsor de avanço, o que reforça o caráter subatuado do problema e evidencia a robustez da estratégia de controle adotada. Tal abordagem permite reduzir a dependência de modelos lineares locais e preservar propriedades de estabilidade mesmo na presença de incertezas paramétricas e perturbações externas. O sistema completo foi implementado em ambiente de simulação numérica em linguagem C, possibilitando a análise detalhada do comportamento do veículo sob diferentes condições iniciais, referências de profundi-

dade e configurações paramétricas do controlador. Os resultados obtidos demonstram que o CMDTD é capaz de realizar o rastreamento eficaz das referências de profundidade, mantendo a arfagem dentro de limites operacionais aceitáveis, mesmo diante das não linearidades inerentes ao modelo e das restrições físicas dos atuadores. Tais resultados evidenciam a efetividade da estratégia proposta e indicam seu potencial de aplicação em plataformas subaquáticas reais.

Palavras-chave: Veículo autônomo subaquático; Modo deslizante terminal discreto; Profundidade; Arfagem; NPS AUV II.

Abstract

Recent advances in technologies associated with autonomous vehicles, combined with the growing interest in underwater applications—such as ocean exploration, environmental monitoring, and inspection of submerged structures—have driven the development of advanced modeling and control techniques for Autonomous Underwater Vehicles (AUVs). These vehicles are characterized by strongly nonlinear and coupled dynamics, as well as by significant hydrodynamic uncertainties, which impose substantial challenges on the design of control strategies capable of ensuring performance, robustness, and stability under adverse operating conditions. In this work, a Discrete-Time Terminal Sliding Mode Controller (DTSMC) is developed and evaluated for the coupled control of depth and pitch of an AUV. The study is conducted based on the dynamic model of the Naval Postgraduate School Autonomous Underwater Vehicle II (NPS AUV II), which is widely referenced in the literature for realistically representing the hydrodynamic characteristics of medium-sized submerged vehicles. The modeling framework considers the complete dynamic and kinematic equations of the vehicle, including nonlinear effects, coupling between degrees of freedom, and restoring forces associated with buoyancy and weight. The proposed controller is based on the definition of sliding surfaces associated with the depth and pitch variables, incorporating a nonlinear terminal term in order to guarantee finite-time convergence of the depth error. Control action is applied exclusively through the stern planes, which reinforces the underactuated nature of the problem and highlights the robustness of the adopted control strategy. This approach reduces the reliance on local linear models and preserves stability properties even in the presence of parametric uncertainties and external disturbances. The complete system was implemented in a numerical simulation environment using the C programming language, enabling a detailed analysis of the vehicle behavior under different initial conditions, depth references, and controller parameter configurations. The obtained results demonstrate that the DTSMC

is capable of achieving effective depth reference tracking while maintaining the pitch angle within acceptable operational limits, even in the presence of inherent nonlinearities and actuator physical constraints. These results highlight the effectiveness of the proposed strategy and indicate its potential applicability to real underwater platforms.

Keywords: Autonomous underwater vehicle; Discrete terminal sliding mode control; Depth control; Pitch control; NPS AUV II.

Lista de Figuras

2.1	Modelo simplificado de um sistema de controle para VASs em malha fechada.	25
3.1	Estrutura externa do NPS AUV II (Torsiello, 1994)	54
3.2	Esquemático de atuadores do NPS AUV II	56
4.1	Resposta dinâmica do sistema no ensaio nominal.	77
4.2	Ação de controle $\delta_s(k)$ associada à lei de alcance — Caso A.	78
4.3	Ação de controle $\delta_s(k)$ associada à lei de alcance — Caso B.	79
4.4	Convergência da superfície quase-deslizante e do erro de profundidade — Caso A.	80
4.5	Resposta de controle e dinâmica angular — Caso A.	80
4.6	Convergência da superfície quase-deslizante e do erro de profundidade — Caso B.	81
4.7	Resposta de controle e dinâmica angular — Caso B.	81
4.8	Rastreamento de profundidade e dinâmica de arfagem — Caso A.	83
4.9	Esforço de controle e efeito de saturação — Caso A.	83
4.10	Erro de rastreamento e superfície quase-deslizante — Caso A.	84
4.11	Superfície quase-deslizante terminal $s_T(k)$ — Caso A.	84
4.12	Rastreamento de profundidade e dinâmica de arfagem — Caso B.	85
4.13	Esforço de controle e efeito de saturação — Caso B.	85
4.14	Erro de rastreamento e superfície quase-deslizante — Caso B.	86
4.15	Superfície quase-deslizante terminal $s_T(k)$ — Caso B.	86

Lista de Tabelas

3.1	Constantes e parâmetros estruturais/hidrodinâmicos do NPS AUV II. . . .	57
3.2	Derivadas hidrodinâmicas do modelo NPS AUV II.	58
3.3	Variáveis de estado, entradas e variáveis auxiliares.	61
4.1	Parâmetros do controlador — Ensaio nominal	76
4.2	Parâmetros do controlador — Variação da lei de alcance	77
4.3	Parâmetros do controlador — Influência do termo terminal não linear . . .	79
4.4	Parâmetros do controlador — Saturação e perturbações	82

Lista de Abreviaturas e Siglas

AUV Autonomous Underwater Vehicle.

CMD Controle por Modo Deslizante.

CMDT Controle por Modo Deslizante Terminal.

CMDTD Controle por Modo Deslizante Terminal Discreto.

DTSMC Discrete-Time Terminal Sliding Mode Control.

NPS AUV II Naval Postgraduate School Autonomous Underwater Vehicle II.

SMC Sliding Mode Control.

TSMC Terminal Sliding Mode Control.

VAS Veiculo Autonomo Subaquatico.

Lista de Símbolos

Símbolos Matemáticos

\mathbb{N}	O conjunto dos números naturais
\mathbb{R}	O conjunto dos números reais
\mathbb{R}^n	O espaço Euclidiano n -dimensional
$\mathbb{R}^{m \times n}$	O conjunto de matrizes reais de dimensão m por n
$\mathbb{Z}_{\geq 0}$	O conjuntos dos números inteiros estritamente positivos
$\dot{x}(t)$	A derivada temporal da função $x(t)$
x^T ou A^T	A matriz transposta do vetor x ou da matriz A
A^{-1}	A matriz inversa da matriz A
$\exp(n)$	Notação resumida para e^n , onde e é a constante de <i>euler</i>
$\ x\ $	A norma Euclidiana do vetor x
$\text{diag}(A_1, \dots, A_n)$	A matriz diagonal cujas entradas são A_1, \dots, A_n , $n \in \mathbb{N}$
$\text{tr}(A)$	O traço da matriz A

Sumário

1	Introdução	18
1.1	Contextualização Geral	18
1.2	Desafios de Controle em Veículos Subaquáticos	19
1.3	Motivação e Escopo do Trabalho	20
1.4	Objetivos	21
1.4.1	Objetivo Geral	21
1.4.2	Objetivos Específicos	21
1.5	Organização do Trabalho	21
2	Revisão Bibliográfica	23
2.1	Fundamentação Teórica	24
2.1.1	Modelagem Genérica de um VAS	24
2.1.2	Estabilidade no Sentido de Lyapunov	27
2.1.3	Controle por Modos Deslizantes	32
2.1.4	Controle por Modos Deslizantes Terminais (CMDT)	39
2.1.5	Controle por Modo Deslizante Terminal Discreto	43
2.1.6	Modelo discreto e perturbação casada	43
2.1.7	Lei de alcance discreta e alcançabilidade da superfície	43
2.1.8	Estabilidade discreta em modo quase-deslizante	48
2.1.9	Superfície terminal discreta e convergência em tempo finito	50
3	Modelagem e Síntese do CMDTD	53
3.1	Apresentação do Modelo NPS AUV II	54
3.1.1	Estados, Entradas e Variáveis Intermediárias	55
3.1.2	Parâmetros Estruturais e Hidrodinâmicos	56

3.1.3	Equações de Forças e Momentos	60
3.2	Síntese do CMDTD	65
3.2.1	Estados completos e extração do subsistema de mergulho via matriz de seleção	66
3.2.2	Linearização do subsistema de mergulho em torno de um ponto de operação	67
3.2.3	Discretização do modelo e definição do erro de rastreamento	69
3.2.4	Construção da superfície deslizante e dinâmica discreta	70
3.2.5	Construção do termo terminal e síntese do Controle por Modo Des- lizante Terminal Discreto	72
4	Análise da Dinâmica do Modelo com CMDTD	75
4.1	Configuração Geral das Simulações	75
4.2	Desempenho Nominal do Controlador	75
4.3	Influência da Lei de Alcance Discreta	77
4.4	Influência do Termo Terminal Não Linear	79
4.5	Limitações Práticas: Saturação e Perturbações	82
4.6	Síntese dos Resultados	87
5	Considerações Finais	89
	Referências	92

Capítulo 1

Introdução

1.1 Contextualização Geral

Nas últimas décadas, a exploração e o monitoramento de ambientes subaquáticos tornaram-se atividades estratégicas em diversos domínios, como engenharia oceânica, pesquisa científica, indústria de óleo e gás, inspeção de infraestruturas submersas e preservação ambiental. Em grande parte dessas aplicações, as operações são realizadas em cenários hostis, caracterizados por elevada pressão hidrostática, baixa visibilidade, presença de correntes marítimas e severas limitações de comunicação. Nesse contexto, Veículos Autônomos Subaquáticos (VASs, do inglês *Autonomous Underwater Vehicles* — AUVs) destacam-se como plataformas tecnológicas capazes de executar missões complexas de forma contínua e com reduzida intervenção humana.

Do ponto de vista da engenharia de sistemas, os VASs constituem estruturas dinâmicas de elevada complexidade. Suas dinâmicas resultam da interação entre fenômenos hidrodinâmicos não lineares, acoplamentos entre múltiplos graus de liberdade e restrições físicas impostas por atuadores e sensores. Além disso, forças de arrasto dependentes do regime de velocidade, efeitos de massa adicional, termos Coriolis e centrífugos, bem como forças restauradoras associadas ao peso e ao empuxo, contribuem para tornar o comportamento do veículo fortemente não linear e dependente do estado. Como consequência, o projeto de sistemas de controle capazes de garantir desempenho, estabilidade e robustez simultaneamente configura-se como um problema desafiador.

Entre os diversos objetivos de controle associados a veículos subaquáticos, o controle de profundidade e arfagem assume papel central. A profundidade define diretamente a viabilidade operacional da missão, enquanto a arfagem influencia a estabilidade longitudinal, a eficiência hidrodinâmica e a qualidade da navegação. Assim, falhas no controle dessas variáveis podem não apenas degradar o desempenho do sistema, mas também

comprometer a segurança operacional e a integridade estrutural do veículo.

1.2 Desafios de Controle em Veículos Subaquáticos

O controle de profundidade e arfagem em VASs envolve desafios que vão além daqueles tradicionalmente encontrados em sistemas mecânicos clássicos. Em primeiro lugar, trata-se de um sistema fortemente não linear, no qual pequenas variações nas entradas ou nos estados podem produzir respostas significativamente distintas, dependendo do ponto de operação considerado. Ademais, os acoplamentos dinâmicos dificultam a decomposição do sistema em subsistemas independentes.

Além disso, os parâmetros hidrodinâmicos do veículo raramente são conhecidos com precisão. Coeficientes de arrasto, surgimento de massas virtuais e momentos hidrodinâmicos são, em geral, estimados por meio de ensaios experimentais ou métodos semiempíricos, estando sujeitos a incertezas consideráveis. Soma-se a isso a presença de perturbações externas, como correntes marítimas e variações locais de densidade do fluido, que afetam diretamente a dinâmica do sistema. Diante desse cenário, torna-se evidente que estratégias de controle baseadas em modelos lineares e hipóteses de operação restrita apresentam limitações significativas.

De fato, controladores clássicos do tipo proporcional-derivativo (PD) ou proporcional-integral-derivativo (PID), embora amplamente utilizados na prática, tendem a apresentar sensibilidade elevada a incertezas paramétricas e exigem extensivo ajuste empírico para diferentes condições operacionais. Além disso, tais abordagens dificilmente fornecem garantias formais de estabilidade quando aplicadas a sistemas fortemente não lineares, como é o caso dos VASs.

Diante das limitações das abordagens clássicas, técnicas de controle não linear robusto têm sido amplamente investigadas para aplicação em veículos subaquáticos. Nesse contexto, o Controle por Modo Deslizante (CMD, do inglês *Sliding Mode Control* — SMC) destaca-se por sua capacidade de lidar com incertezas casadas e por apresentar propriedades de invariância da dinâmica reduzida quando o sistema evolui sobre uma superfície de deslizamento adequadamente projetada.

Entretanto, apesar de suas vantagens, a formulação clássica do CMD impõe que a convergência dos estados ao equilíbrio ocorra de forma assintótica, o que pode resultar

em tempos de acomodação elevados em aplicações que demandam respostas rápidas. Além disso, a natureza descontínua da lei de controle ideal está associada ao fenômeno conhecido como *chattering*, caracterizado por oscilações de alta frequência no comando de controle, potencialmente prejudiciais aos atuadores e à estrutura do sistema.

Como evolução natural dessa abordagem, o Controle por Modo Deslizante Terminal (CMDT, do inglês *Terminal Sliding Mode Control* — TSMC) introduz superfícies de deslizamento não lineares, formuladas de modo a garantir a convergência dos erros em tempo finito. Dessa forma, o CMDT combina a robustez inerente ao CMD com uma característica particularmente atrativa para o controle de profundidade de VASs: a possibilidade de alcançar o equilíbrio em um intervalo de tempo finito, e não apenas de maneira assintótica.

1.3 Motivação e Escopo do Trabalho

Apesar do avanço teórico significativo observado na literatura sobre controle por modo deslizante terminal, a aplicação prática dessas estratégias a modelos realistas de veículos subaquáticos ainda carece de investigações sistemáticas. Em particular, muitos estudos concentram-se em formulações teóricas ou em modelos simplificados, que não capturam adequadamente os acoplamentos hidrodinâmicos e as restrições físicas presentes em veículos reais.

Nesse sentido, torna-se relevante investigar não apenas a estabilidade do controlador, mas também sua sensibilidade paramétrica, seu comportamento sob saturação dos atuadores e os compromissos entre robustez, suavidade do comando e desempenho transitório. Assim, este trabalho propõe-se a analisar de forma detalhada o comportamento de um Controlador por Modo Deslizante Terminal Discreto (CMDTD) aplicado ao controle de profundidade e arfagem de um VAS, utilizando como base o modelo dinâmico completo do NPS AUV II, amplamente adotado como referência na literatura especializada.

Ressalta-se que, no presente trabalho, o controlador é formulado diretamente em tempo discreto, enquanto a dinâmica do veículo é integrada numericamente em tempo contínuo, não sendo considerada explicitamente uma modelagem do mecanismo de retenção do sinal de controle. Nesse contexto, o escopo do trabalho concentra-se exclusivamente na análise de um CMDTD, não sendo realizadas comparações com controladores clássicos,

o que reflete o interesse em compreender, de maneira aprofundada, as potencialidades e limitações dessa estratégia de controle.

1.4 Objetivos

1.4.1 Objetivo Geral

O objetivo geral deste trabalho é desenvolver, implementar e analisar um Controlador por Modo Deslizante Terminal Discreto para o controle de profundidade e arfagem de um Veículo Autônomo Subaquático, empregando o modelo dinâmico do NPS AUV II e avaliando sua efetividade, robustez e compatibilidade com restrições físicas do sistema.

1.4.2 Objetivos Específicos

Com vistas ao atendimento do objetivo geral, estabelecem-se os seguintes objetivos específicos:

1. modelar a dinâmica e a cinemática do NPS AUV II, com ênfase no canal vertical do movimento;
2. definir um subsistema adequado para a síntese do controlador;
3. projetar uma lei de controle CMDTD capaz de garantir convergência em tempo finito do erro de profundidade;
4. implementar o modelo e o controlador em ambiente de simulação computacional;
5. realizar ensaios numéricos para avaliar o desempenho, a robustez e a sensibilidade paramétrica do controlador;
6. analisar o impacto das limitações físicas dos atuadores na resposta do sistema.

1.5 Organização do Trabalho

O trabalho está organizado da seguinte forma. O Capítulo 2 apresenta a revisão bibliográfica e a fundamentação teórica necessária, abordando a modelagem dinâmica de veículos subaquáticos, conceitos de estabilidade no sentido de Lyapunov e controle por

modo deslizante, com ênfase na formulação terminal. O Capítulo 3 descreve a modelagem do NPS AUV II e a síntese detalhada do CMDTD. O Capítulo 4 dedica-se à análise dos resultados de simulação, discutindo o desempenho e a robustez do controlador. Por fim, o Capítulo 5 apresenta as conclusões e perspectivas para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

O presente capítulo destina-se a estabelecer a base teórico-matemática necessária tanto para a modelagem quanto para a síntese de controladores aplicados a Veículos Autônomos Subaquáticos (VASs). Inicialmente, apresenta-se a formulação dinâmica e cinemática do sistema, estruturada a partir dos referenciais clássicos da literatura em robótica submarina, com destaque para as obras de Thor Inge Fossen e Gianluca Antonelli. Essa abordagem contempla a representação vetorial e matricial/tensorial das forças hidrodinâmicas, inércia, efeitos giroscópicos e elementos estruturais que governam a evolução do movimento de veículos submersos, constituindo a fundamentação sobre a qual se apoiará todo o desenvolvimento subsequente.

Em seguida, introduz-se a representação genérica de sistemas dinâmicos não lineares afins em controle, por meio da qual o modelo dos VASs pode ser abstraído fornecendo a estrutura matemática adequada para a análise e desenvolvimento dos métodos de controle que serão posteriormente tratados.

Na sequência, são apresentados os conceitos fundamentais da Teoria de Controle por Modos Deslizantes (CMD), enfatizando a definição de variedades deslizantes, a condição de alcançabilidade (*reaching condition*), a determinação do controle equivalente, a dinâmica reduzida na variedade e os critérios de robustez associados às incertezas casadas. Essa exposição estabelece o núcleo matemático sobre o qual se formulam as leis de controle deslizante de primeira ordem.

Posteriormente, o CMD clássico é mostrado, definindo-se a construção das superfícies lineares, a síntese da lei de controle com termo comutador, a análise de estabilidade via funções de Lyapunov e a discussão das limitações inerentes — em especial o fenômeno de *chattering* e a convergência meramente assintótica das variáveis controladas.

Por fim, apresenta-se a extensão não linear do CMD, denominada Controle por Modo Deslizante Terminal (CMDT), caracterizada pelo emprego de superfícies deslizantes com

expoentes fracionários, capazes de assegurar convergência em tempo finito. São desenvolvidos os fundamentos matemáticos associados ao método, incluindo definições das variedades terminais, os critérios formais de convergência em tempo finito, as funções de Lyapunov apropriadas e as condições de robustez frente a incertezas paramétricas, perturbações externas e elevada não linearidade — características intrínsecas ao ambiente operacional de veículos subaquáticos. Adicionalmente, é exposta a formulação teórica do Controle por Modo Deslizante Terminal Discreto (CMDTD), correspondente à versão em tempo discreto do CMDT, com destaque para suas particularidades estruturais, tais como a definição de superfícies terminais discretas, a dinâmica contrativa do erro, as condições de estabilidade em malha fechada no domínio discreto e as implicações do período de amostragem na preservação das propriedades de convergência em tempo finito.

2.1 Fundamentação Teórica

2.1.1 Modelagem Genérica de um VAS

O equacionamento de um VAS em seis graus de liberdade pode ser descrito por meio de duas relações fundamentais (Fossen, 1994): uma equação dinâmica, que modela as forças e momentos atuantes no veículo, e uma equação cinemática, que relaciona as velocidades ao movimento no espaço inercial. A estrutura dessas relações pode ser visualizada no diagrama de blocos da Figura 2.1.

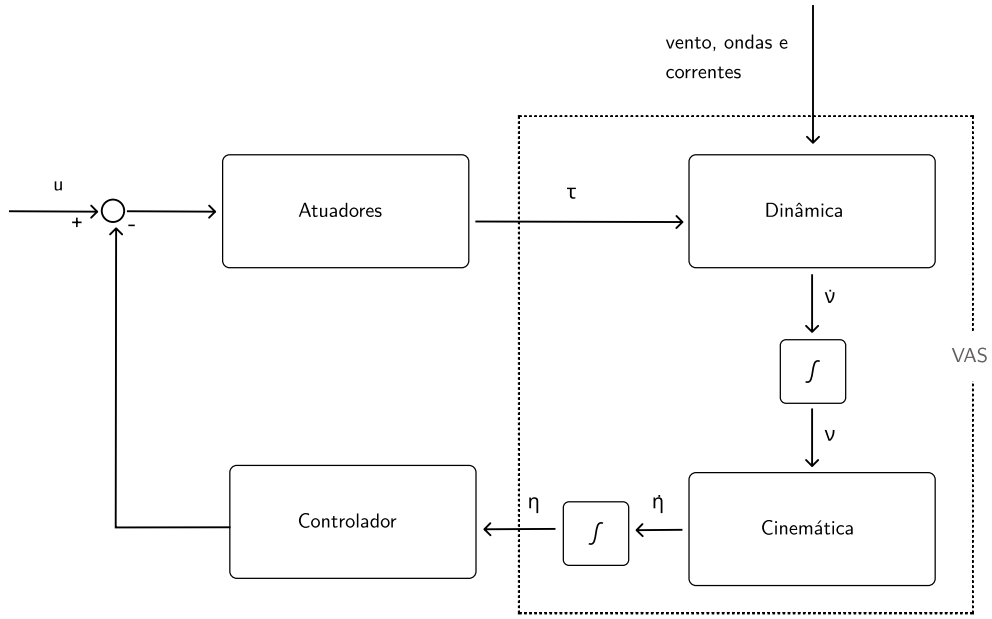


Figura 2.1: Modelo simplificado de um sistema de controle para VASs em malha fechada.

De modo geral, as equações que regem a dinâmica e a cinemática de um VAS podem ser expressas da seguinte forma:

$$M(\boldsymbol{\nu}) \dot{\boldsymbol{\nu}} + \mathbf{C}(\boldsymbol{\nu}) \boldsymbol{\nu} + \mathbf{D}(\boldsymbol{\nu}) \boldsymbol{\nu} + \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}_d, \quad (2.1)$$

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{J}(\boldsymbol{\eta}) \boldsymbol{\nu}, \quad (2.2)$$

em que:

- O vetor $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^6$ representa a pose do veículo (posição e orientação) no referencial inercial, sendo definido por

$$\boldsymbol{\eta} = [x \ y \ z \ \phi \ \theta \ \psi]^T, \quad (2.3)$$

em que (x, y, z) correspondem à posição no espaço e (ϕ, θ, ψ) aos ângulos de rolagem, arfagem e guinada, respectivamente. Esses ângulos pertencem ao espaço de orientações associado ao grupo algébrico de rotações tridimensionais $\text{SO}(3)$.

- O vetor $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^6$ denota o vetor de velocidades no referencial do corpo, dado por

$$\boldsymbol{\nu} = [u \ v \ w \ p \ q \ r]^T, \quad (2.4)$$

onde (u, v, w) são as velocidades lineares associadas aos movimentos de avanço, deriva e deslocamento vertical, e (p, q, r) são as velocidades angulares em torno dos eixos de rolagem, arfagem e guinada.

- O vetor $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^6$ representa as forças e momentos de controle aplicados pelos atuadores no referencial do corpo, sendo definido como

$$\boldsymbol{\tau} = [X \ Y \ Z \ K \ M \ N]^\top, \quad (2.5)$$

em que X , Y e Z são forças de controle nas direções de avanço, deriva e movimento vertical, enquanto K , M e N são os momentos de controle associados, respectivamente, aos movimentos de rolagem, arfagem e guinada.

- O vetor $\boldsymbol{\tau}_d \in \mathbb{R}^6$ modela perturbações externas e incertezas não modeladas, sendo escrito como

$$\boldsymbol{\tau}_d = [X_d \ Y_d \ Z_d \ K_d \ M_d \ N_d]^\top, \quad (2.6)$$

onde X_d , Y_d e Z_d representam forças perturbadoras oriundas de correntes, ondas, turbulência e efeitos hidrodinâmicos não modelados, enquanto K_d , M_d e N_d correspondem a momentos perturbadores associados a vórtices, flutuações de empuxo, gradientes de pressão e erros de parametrização.

- O vetor $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\eta}) \in \mathbb{R}^6$ corresponde às forças e momentos de restauração associados à gravidade e ao empuxo, sendo responsável pelo equilíbrio hidrostático do veículo e dependente da posição e orientação no espaço.
- A matriz $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\nu}) \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ é a matriz de inércia generalizada do sistema, que combina a inércia do corpo rígido com os efeitos de massa adicionada hidrodinâmica. Ela pode ser expressa como

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\nu}) = \boldsymbol{M}_{\text{RB}} + \boldsymbol{M}_A, \quad (2.7)$$

em que $\boldsymbol{M}_{\text{RB}}$ representa a parcela de corpo rígido e \boldsymbol{M}_A corresponde aos efeitos de massa adicionada.

- A matriz $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{\nu}) \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ representa os termos de Coriolis e forças centrípetas generalizadas, responsáveis pelos efeitos giroscópicos e pelo acoplamento entre as velocidades. Essa matriz é parametrizada a partir de (2.7) e, assim como $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\nu})$, pode

ser decomposta como

$$\mathbf{C}(\boldsymbol{\nu}) = \mathbf{C}_{\text{RB}}(\boldsymbol{\nu}) + \mathbf{C}_A(\boldsymbol{\nu}), \quad (2.8)$$

onde os subscritos RB e A denotam, respectivamente, as contribuições do corpo rígido e da massa adicionada.

- A matriz $\mathbf{D}(\boldsymbol{\nu}) \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ é a matriz de amortecimento hidrodinâmico, a qual engloba termos dissipativos lineares e não lineares dependentes das velocidades do veículo.
- A matriz $\mathbf{J}(\boldsymbol{\eta}) \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ é a matriz Jacobiana de transformação cinemática que relaciona as velocidades no referencial do corpo às velocidades no referencial inercial. Ela pode ser escrita de forma particionada como

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{\eta}) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(\phi, \theta, \psi) & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{T}(\phi, \theta, \psi) \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

em que $\mathbf{R}(\phi, \theta, \psi) \in \text{SO}(3)$ é a matriz de rotação que mapeia velocidades lineares do referencial do corpo para o referencial inercial, enquanto $\mathbf{T}(\phi, \theta, \psi)$ é a matriz de transformação que relaciona as velocidades angulares (p, q, r) às derivadas dos ângulos de Euler. Como consequência, $\mathbf{J}(\boldsymbol{\eta})$ pertence ao grupo especial euclidiano $\text{SE}(3)$, que combina translações e rotações no espaço tridimensional.

O processo para calcular esses parâmetros é apresentado em detalhe por Fossen ([Fossen, 1994](#)).

2.1.2 Estabilidade no Sentido de Lyapunov

A teoria desenvolvida por Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (1857–1918), um dos matemáticos russos mais influentes em sistemas dinâmicos, constitui a base conceitual fundamental para a análise moderna de sistemas dinâmicos não lineares. Sua contribuição seminal, apresentada em sua tese de doutorado de 1892, introduziu um método capaz de determinar a estabilidade de um ponto de equilíbrio sem a necessidade de resolver explicitamente as equações diferenciais do sistema. Essa abordagem, hoje conhecida como *método de Lyapunov direto*, oferece um instrumento matemático robusto, construtivo e amplamente aplicável para o estudo de sistemas complexos cujas dinâmicas apresentam acoplamentos não lineares, perturbações externas e incertezas estruturais. Essa capaci-

dade de analisar o comportamento qualitativo de um sistema apenas por meio de funções auxiliares torna o método particularmente adequado para o tratamento de sistemas como os VASs, que possuem alta não linearidade e forte acoplamento entre seus estados.

Como ponto de partida, considere o sistema dinâmico

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}), \quad f(0) = 0, \quad (2.10)$$

em que $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados e a origem $\mathbf{x} = 0$ é um ponto de equilíbrio. O objetivo é analisar se as trajetórias $\mathbf{x}(t)$ partindo de condições iniciais suficientemente próximas da origem permanecem próximas e, eventualmente, convergem para essa origem.

Definição de Função de Lyapunov

Definição 1 (Função de Lyapunov). *Uma função continuamente diferenciável $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é denominada função de Lyapunov para o sistema (2.10) se satisfaz:*

1. $V(\mathbf{x})$ é **positivamente definida**, ou seja,

$$V(\mathbf{x}) > 0 \quad \forall \mathbf{x} \neq 0, \quad V(0) = 0; \quad (2.11)$$

2. sua derivada temporal ao longo das trajetórias do sistema,

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}), \quad (2.12)$$

é **negativa semidefinida** na vizinhança da origem.

A interpretação física de $V(\mathbf{x})$ é análoga à de uma energia generalizada: se essa energia não aumenta ao longo do tempo, então o sistema tende a permanecer em uma região estável, evitando movimentos divergentes. A partir dessas premissas, pode-se então definir os conceitos de estabilidade no sentido de Lyapunov.

Teorema de Estabilidade de Lyapunov

Teorema 1 (Estabilidade de Lyapunov). *Se existir uma função de Lyapunov $V(\mathbf{x})$ positivamente definida e cuja derivada temporal satisfaz*

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0 \quad \forall \mathbf{x}, \quad (2.13)$$

então a origem do sistema (2.10) é **estável no sentido de Lyapunov**.

Esse resultado garante a estabilidade do sistema, mas não assegura que o sistema convergirá à origem. Para isso, é necessário um resultado mais forte, conhecido como Teorema da Estabilidade Assintótica.

Teorema de Estabilidade Assintótica

Teorema 2 (Estabilidade Assintótica). *Se, além das condições do Teorema 1, a derivada da função de Lyapunov satisfaz*

$$\dot{V}(\mathbf{x}) < 0 \quad \forall \mathbf{x} \neq 0, \quad (2.14)$$

então a origem do sistema é **estável de forma assintótica**, isto é,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = 0. \quad (2.15)$$

Esse teorema fundamenta a análise clássica do CMD, em que frequentemente utiliza-se $V = \frac{1}{2}s^2$ para o erro deslizante s , de modo que $\dot{V} < 0$ garante convergência de s para zero.

Em alguns sistemas não lineares, especialmente quando sinais oscilatórios estão presentes ou quando a derivada temporal não é estritamente negativa, o Teorema 2 pode não ser aplicável diretamente. Nesse contexto, utiliza-se um resultado conhecido como Lema de Barbalat.

Lema 1 (Barbalat). *Se uma função $h(t)$ é uniformemente contínua e sua integral no tempo é finita, isto é,*

$$\int_0^{\infty} h(\tau) d\tau < \infty, \quad (2.16)$$

então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0. \quad (2.17)$$

Utiliza-se esse resultado em CMD contínuo para demonstrar que, mesmo quando a derivada de V não é estritamente negativa em todos os instantes — o que ocorre, por exemplo, quando o controlador suaviza a ação de comutação para evitar oscilações rápidas — ainda assim a variável deslizante $s(t)$ converge assintoticamente para zero. Em outras

palavras, mesmo que o sistema não esteja dissipando energia de forma estrita a todo momento, o Lema de Barbalat garante a convergência gradual de $s(t)$ para a superfície deslizante.

Convergência em Tempo Finito

A estabilidade assintótica, embora matematicamente rigorosa e amplamente utilizada, apresenta uma limitação estrutural: a convergência para o ponto de equilíbrio ocorre apenas no limite quando $t \rightarrow \infty$. Em sistemas de controle que exigem respostas rápidas, robustas e com horizonte temporal bem definido, essa propriedade pode ser insuficiente.

Para superar essa limitação, introduz-se o conceito de *estabilidade em tempo finito*, no qual a trajetória do sistema alcança exatamente o ponto de equilíbrio em um instante finito $T < \infty$. Esse resultado é um dos fundamentos teóricos que sustentam o CMDT, o qual utiliza superfícies deslizantes não lineares com expoentes fracionários para garantir que a variável deslizante siga uma dinâmica cuja convergência para zero ocorre em tempo finito.

Considere uma função de Lyapunov positivamente definida $V(\mathbf{x})$ cuja derivada ao longo das trajetórias do sistema satisfaz a desigualdade

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq -cV(\mathbf{x})^\alpha, \quad c > 0, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (2.18)$$

Ao longo da trajetória $\mathbf{x}(t)$, denotemos para simplicidade $V(t) := V(\mathbf{x}(t))$. Suponhamos inicialmente que $V(t) > 0$ em um intervalo $[0, t)$, isto é, que a solução ainda não alcançou o equilíbrio nesse intervalo. Nesse caso, a desigualdade (2.18) pode ser escrita como

$$\dot{V}(t) \leq -c[V(t)]^\alpha, \quad t \in [0, t). \quad (2.19)$$

Como $V(t) > 0$ e $0 < \alpha < 1$, podemos dividir ambos os lados de (2.19) por $[V(t)]^\alpha$, obtendo

$$\frac{\dot{V}(t)}{[V(t)]^\alpha} \leq -c, \quad t \in [0, t). \quad (2.20)$$

Mostraremos a seguir, que o lado esquerdo de (2.20) pode ser visto como a derivada temporal de uma função de $V(t)$.

De fato, considere a função escalar

$$\Phi(\xi) := \frac{\xi^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \quad \xi > 0. \quad (2.21)$$

Pela regra da cadeia, temos

$$\frac{d}{dt}\Phi(V(t)) = \Phi'(V(t)) \dot{V}(t) = \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\xi^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right) \Big|_{\xi=V(t)} \dot{V}(t) = V(t)^{-\alpha} \dot{V}(t). \quad (2.22)$$

Logo,

$$\frac{\dot{V}(t)}{[V(t)]^\alpha} = \frac{d}{dt} \left(\frac{V(t)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right). \quad (2.23)$$

Integrando ambos os lados no intervalo $[0, t]$, resulta

$$\int_0^t \frac{d}{d\tau} \left(\frac{V(\tau)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right) d\tau \leq \int_0^t -c d\tau = -ct. \quad (2.24)$$

A integral do lado esquerdo é simplesmente a variação do termo entre 0 e t :

$$\frac{V(t)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{V(0)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \leq -ct. \quad (2.25)$$

Multiplicando ambos os lados por $(1-\alpha) > 0$, não alteramos o sentido da desigualdade:

$$V(t)^{1-\alpha} - V(0)^{1-\alpha} \leq -c(1-\alpha)t. \quad (2.26)$$

Rearranjando os termos, obtemos a expressão explícita

$$V(t)^{1-\alpha} \leq V(0)^{1-\alpha} - c(1-\alpha)t. \quad (2.27)$$

Observe que o lado direito de (2.27) é uma função linear decrescente no tempo. Definindo

$$T := \frac{V(0)^{1-\alpha}}{c(1-\alpha)}, \quad (2.28)$$

temos que, para $t = T$,

$$V(T)^{1-\alpha} \leq V(0)^{1-\alpha} - c(1-\alpha)T = V(0)^{1-\alpha} - c(1-\alpha) \frac{V(0)^{1-\alpha}}{c(1-\alpha)} = 0. \quad (2.29)$$

Como $V(t) \geq 0$ para todo t (positividade semidefinida), conclui-se que a desigualdade

$V(T)^{1-\alpha} \leq 0$ só pode ser satisfeita se

$$V(T) = 0. \quad (2.30)$$

Além disso, como $\dot{V}(t) \leq 0$, a função $V(t)$ é não crescente; portanto, uma vez que alcança zero, ela não pode voltar a assumir valores positivos, e concluímos que $V(t) = 0$ para todo $t \geq T$. Isso mostra que a função de Lyapunov se anula em tempo finito e permanece nula posteriormente, o que implica estabilidade em tempo finito da origem, com tempo de convergência majorado por T dado em (2.28).

Esse resultado formaliza a principal vantagem do CMDT: diferentes de superfícies lineares comuns no CMD, que produzem apenas convergência assintótica, as superfícies terminais com expoentes fracionários fazem com que o decaimento de $V(\mathbf{x})$ se acelere à medida que o sistema se aproxima da origem. Consequentemente, a variável deslizante e o erro associado alcançam o equilíbrio exatamente em um instante finito, garantindo comportamento mais rápido, previsível e adequado a aplicações com forte não linearidade ou requisitos rigorosos de desempenho temporal.

2.1.3 Controle por Modos Deslizantes

O Controle por Modo Deslizante (CMD), também conhecido na literatura internacional como *Sliding Mode Control* (SMC), foi desenvolvido de forma sistemática a partir dos trabalhos pioneiros de Vadim I. Utkin na década de 1970 (Utkin, 1977, 1992). Trata-se de uma técnica de controle não linear que introduz, em malha fechada, uma superfície (ou variedade) deslizante no espaço de estados, projetada de modo que, uma vez alcançada, a dinâmica do sistema seja forçada a evoluir sobre essa superfície, resultando em comportamento de ordem reduzida, invariância estrutural e robustez frente a incertezas paramétricas e perturbações casadas.

A ideia central consiste em projetar uma superfície no espaço de estados tal que, uma vez que as trajetórias alcancem essa superfície, o sistema passe a evoluir restrito a ela, apresentando propriedades de estabilidade e robustez desejadas. O controlador é então sintetizado de modo a garantir duas fases distintas: a *fase de aproximação* (*reaching phase*), na qual o estado é conduzido até a superfície, e a *fase de deslizamento* (*sliding phase*), em que a dinâmica em regime deslizante é mantida. É importante destacar que,

no CMD clássico, a condição de alcançabilidade garante, em geral, convergência em tempo finito *apenas* da variável deslizante $s(t)$ para a superfície; já a convergência dos estados do sistema para o equilíbrio ocorre tipicamente de forma assintótica, dependendo da escolha da superfície e da dinâmica reduzida. Vejamos como se constrói um CMD.

Considere o sistema dinâmico não linear afim

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) u, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}, \quad (2.31)$$

em que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ são funções suficientemente suaves, e u é a entrada de controle escalar. A generalização para entradas vetoriais é possível, mas, para fins de clareza, manteremos o caso de entrada única, que já captura as principais ideias do CMD.

Variedade Deslizante

A primeira etapa consiste em definir uma função escalar

$$s : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad (2.32)$$

chamada de *variedade deslizante* ou *função de deslizamento*. A partir de $s(\mathbf{x})$, define-se a seguinte variedade no espaço de estados.

Definição 2 (Variedade Deslizante). *A variedade deslizante (ou superfície deslizante) associada à função $s(\mathbf{x})$ é o conjunto*

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : s(\mathbf{x}) = 0\}. \quad (2.33)$$

Em muitos casos práticos, escolhe-se uma superfície linear na forma

$$s(\mathbf{x}) = \mathbf{C} \mathbf{e}, \quad \mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{\text{ref}}, \quad (2.34)$$

em que \mathbf{x}_{ref} é um estado de referência desejado e $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ é um vetor de ganhos projetado de modo que a dinâmica restrita a \mathcal{S} apresente estabilidade em relação ao erro \mathbf{e} . A condição $s(\mathbf{x}) = 0$ define então um hiperplano (no caso linear) ou uma variedade (no caso geral não linear) no espaço de estados.

Derivadas de Lie e Evolução da Variável Deslizante

Para descrever de forma compacta como a variável deslizante $s(\mathbf{x})$ evolui ao longo das trajetórias do sistema não linear (2.31), utiliza-se o conceito de *derivadas de Lie*, amplamente empregado na teoria de sistemas não lineares (Isidori, 1995; Khalil, 2002).

Definição 3 (Derivada de Lie). *Sejam $s : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função escalar continuamente diferenciável e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial. A derivada de Lie de s na direção de f é definida por*

$$L_f s(\mathbf{x}) = \frac{\partial s}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}), \quad (2.35)$$

isto é, o produto do gradiente de s pelo campo vetorial f .

De forma análoga, a derivada de Lie de s na direção de g é dada por

$$L_g s(\mathbf{x}) = \frac{\partial s}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}). \quad (2.36)$$

Aplicando a regra da cadeia à função composta $s(\mathbf{x}(t))$, com $\mathbf{x}(t)$ solução de (2.31), obtém-se

$$\dot{s}(\mathbf{x}) = \frac{\partial s}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial s}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) + \frac{\partial s}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}) u = L_f s(\mathbf{x}) + L_g s(\mathbf{x}) u. \quad (2.37)$$

A expressão (2.37) mostra que a derivada temporal de s pode ser decomposta em uma parte “natural” da dinâmica, $L_f s(\mathbf{x})$, e uma parte diretamente influenciada pela entrada de controle, $L_g s(\mathbf{x}) u$. Essa forma é particularmente conveniente no projeto de leis de controle por modos deslizantes, pois torna explícito como a entrada u pode ser escolhida para impor uma dinâmica desejada sobre $s(\mathbf{x})$.

Condição de Alcançabilidade (Utkin)

O projeto de um controlador por modos deslizantes exige que as trajetórias do sistema alcancem a superfície \mathcal{S} em tempo finito. Essa propriedade é formalizada por meio da *condição de alcançabilidade*, introduzida por Utkin (Utkin, 1977, 1992).

Substituindo (2.31) em (2.37), obtém-se

$$\dot{s}(\mathbf{x}) = L_f s(\mathbf{x}) + L_g s(\mathbf{x}) u. \quad (2.38)$$

A condição de alcançabilidade é expressa em termos do sinal de $s(\mathbf{x}) \dot{s}(\mathbf{x})$.

Teorema 3 (Condição de Alcançabilidade de Utkin). *Considere o sistema (2.31) e a superfície deslizante \mathcal{S} definida em (2.33). Se existe uma constante $\eta > 0$ tal que, para todo \mathbf{x} em uma vizinhança de \mathcal{S} , vale*

$$s(\mathbf{x}) \dot{s}(\mathbf{x}) \leq -\eta |s(\mathbf{x})|, \quad (2.39)$$

então qualquer trajetória que parta dessa vizinhança alcança a superfície \mathcal{S} em tempo finito, isto é, existe $T < \infty$ tal que $s(t) = 0$ para algum $t \leq T$.

Demonstração. Considere a função de Lyapunov candidata

$$V(s) = \frac{1}{2}s^2. \quad (2.40)$$

Sua derivada ao longo das trajetórias é dada por

$$\dot{V}(s) = s \dot{s}. \quad (2.41)$$

Pela condição (2.39), tem-se

$$\dot{V}(s) = s \dot{s} \leq -\eta |s|. \quad (2.42)$$

Como $|s| = \sqrt{2V}$, obtém-se

$$\dot{V}(s) \leq -\eta \sqrt{2V(s)}. \quad (2.43)$$

Essa desigualdade é do tipo tratado na subseção de convergência em tempo finito, com expoente $\alpha = 1/2$. Assim, pela teoria de estabilidade em tempo finito baseada em funções de Lyapunov, conclui-se que $V(s)$, e conseqüentemente $s(t)$, convergem a zero em um tempo finito $T < \infty$. Logo, a superfície \mathcal{S} é alcançada em tempo finito a partir de qualquer condição inicial em uma vizinhança adequada. \square \square

Esse resultado mostra que, se a lei de controle for projetada de forma a satisfazer (2.39), a superfície deslizante será não apenas estável no sentido de Lyapunov, mas também *alcançável* em tempo finito pela variável escalar $s(t)$. Ressalta-se, contudo, que essa propriedade de tempo finito refere-se à trajetória de $s(t)$ em direção a zero; a convergência do vetor de estados $\mathbf{x}(t)$ para o ponto de equilíbrio associado é, em geral, assintótica, dependendo da dinâmica reduzida em regime deslizante.

Controle Equivalente e Dinâmica em Regime Deslizante

Uma vez alcançada a superfície \mathcal{S} , o objetivo passa a ser manter a trajetória sobre ela, ou seja, garantir o *regime deslizante*. Em termos da variável $s(\mathbf{x})$, isso significa impor

$$s(\mathbf{x}) = 0, \quad \dot{s}(\mathbf{x}) = 0. \quad (2.44)$$

Substituindo (2.38) em (2.44), obtém-se, em regime deslizante,

$$0 = L_f s(\mathbf{x}) + L_g s(\mathbf{x}) u_{\text{eq}}, \quad (2.45)$$

em que u_{eq} é o chamado *controle equivalente* (Utkin, 1992). Supondo que $L_g s(\mathbf{x}) \neq 0$ na vizinhança da superfície, pode-se resolver (2.45) para u_{eq} :

$$u_{\text{eq}}(\mathbf{x}) = -\frac{L_f s(\mathbf{x})}{L_g s(\mathbf{x})}. \quad (2.46)$$

Teorema 4 (Controle Equivalente e Dinâmica Reduzida). *Sob a hipótese de que $L_g s(\mathbf{x}) \neq 0$ em uma vizinhança da variedade \mathcal{S} , o controle equivalente dado por (2.46) caracteriza a entrada que mantém o sistema em regime deslizante. Nessas condições, a dinâmica em regime deslizante é obtida substituindo $u = u_{\text{eq}}(\mathbf{x})$ em (2.31), o que resulta em um sistema de ordem reduzida evoluindo restrito a \mathcal{S} .*

Na prática, o controle equivalente não é aplicado diretamente, pois depende do modelo exato do sistema e não apresenta o termo de comutação responsável pela robustez frente a incertezas. No entanto, a expressão (2.46) é fundamental para o projeto, pois descreve a dinâmica desejada no modo deslizante. Em muitos casos, escolhe-se a superfície de modo que a dinâmica reduzida em \mathcal{S} seja assintoticamente estável em relação ao erro \mathbf{e} , o que garante convergência assintótica do sistema para o ponto de equilíbrio desejado, uma vez estabelecido o regime deslizante.

Em aplicações reais, o sistema está sujeito a incertezas e perturbações que entram na mesma direção do controle, isto é, são casadas em relação ao vetor $g(\mathbf{x})$. Tal situação pode ser modelada como

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})(u + d(t)), \quad (2.47)$$

em que $d(t)$ representa uma perturbação escalar desconhecida, porém limitada, isto é,

$$|d(t)| \leq d_{\max}, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.48)$$

Derivando $s(\mathbf{x})$ ao longo de (2.47), obtém-se

$$\dot{s}(\mathbf{x}) = L_f s(\mathbf{x}) + L_g s(\mathbf{x}) u + L_g s(\mathbf{x}) d(t). \quad (2.49)$$

Uma lei de controle típica de CMD é construída na forma

$$u(\mathbf{x}) = u_{\text{eq}}(\mathbf{x}) - k \operatorname{sgn}(s(\mathbf{x})), \quad (2.50)$$

em que u_{eq} é dado por (2.46) e $k > 0$ é um ganho escalar a ser projetado. Substituindo (2.50) em (2.49), resulta

$$\dot{s}(\mathbf{x}) = L_f s(\mathbf{x}) + L_g s(\mathbf{x}) (u_{\text{eq}}(\mathbf{x}) - k \operatorname{sgn}(s)) + L_g s(\mathbf{x}) d(t). \quad (2.51)$$

Pela definição de u_{eq} , tem-se $L_f s(\mathbf{x}) + L_g s(\mathbf{x}) u_{\text{eq}}(\mathbf{x}) = 0$, de modo que

$$\dot{s}(\mathbf{x}) = -k L_g s(\mathbf{x}) \operatorname{sgn}(s(\mathbf{x})) + L_g s(\mathbf{x}) d(t). \quad (2.52)$$

Assumindo, para simplicidade, que $L_g s(\mathbf{x})$ não muda de sinal e é limitado por

$$0 < \underline{c} \leq |L_g s(\mathbf{x})| \leq \bar{c}, \quad (2.53)$$

podemos escrever

$$\dot{s}(\mathbf{x}) = -k \tilde{c} \operatorname{sgn}(s(\mathbf{x})) + \tilde{c} d(t), \quad (2.54)$$

onde \tilde{c} representa o sinal fixo de $L_g s(\mathbf{x})$. Assim, a derivada da função de Lyapunov $V = \frac{1}{2} s^2$ é dada por

$$\dot{V}(s) = s \dot{s} \leq -k \underline{c} |s| + \bar{c} |d(t)| |s|. \quad (2.55)$$

Se escolhermos o ganho k tal que

$$k > \frac{\bar{c}}{\underline{c}} d_{\max}, \quad (2.56)$$

então existe $\eta > 0$ tal que

$$\dot{V}(s) \leq -\eta |s|, \quad (2.57)$$

o que recupera a condição de alcançabilidade (2.39). Em particular, temos o seguinte resultado.

Teorema 5 (Robustez a Perturbações Casadas). *Considere o sistema (2.47) sujeito a perturbações casadas limitadas por (2.48) e a lei de controle por modos deslizantes (2.50). Se o ganho k satisfaz a condição (2.56), então:*

1. *a superfície deslizante \mathcal{S} definida em (2.33) é alcançada em tempo finito;*
2. *uma vez em \mathcal{S} , a trajetória permanece em sua vizinhança, garantindo robustez frente às perturbações casadas.*

Esse resultado evidencia a principal vantagem do CMD: a dinâmica em regime deslizante é, em grande medida, insensível às incertezas que atuam na mesma direção que o controle, desde que o ganho do termo comutador seja escolhido adequadamente. No entanto, essa robustez vem acompanhada de desafios práticos importantes, em especial o fenômeno de *chattering*.

Discussão sobre o Fenômeno de *Chattering*

Embora o CMD apresente robustez teórica notável, a implementação prática do termo de comutação descontínuo $\text{sgn}(s)$ em (2.50) leva à ocorrência de um fenômeno conhecido como *chattering*. Trata-se de oscilações de alta frequência em torno da superfície deslizante, decorrentes de atrasos, dinâmicas não modeladas dos atuadores, quantização e limitações físicas dos dispositivos de controle (Utkin, 1992).

Do ponto de vista matemático, o *chattering* pode ser interpretado como a impossibilidade de realizar a comutação ideal instantânea entre dois valores de controle em um sistema real. Em vez disso, o sinal de controle oscila rapidamente, fazendo com que o estado permaneça em uma pequena vizinhança de \mathcal{S} , em vez de sobre ela exatamente. Essas oscilações podem ser indesejáveis, especialmente em sistemas mecânicos, por provocarem desgaste, excitação de modos flexíveis e aumento do consumo de energia.

Diversas estratégias foram propostas para mitigar o *chattering*, incluindo:

- a introdução de *camadas de fronteira* (*boundary layers*) e funções de saturação no lugar da função sinal;

- controladores de alto ganho em combinação com filtros;
- modos deslizantes de ordem superior.

No contexto deste trabalho, a mitigação do chattering está relacionada, em particular, à extensão do CMD para o CMDT, na qual superfícies deslizantes não lineares com propriedades de convergência em tempo finito são empregadas para melhorar o desempenho temporal e reduzir a agressividade do termo comutador, aspecto discutido na subseção seguinte.

2.1.4 Controle por Modos Deslizantes Terminais (CMDT)

O Controle por Modos Deslizantes Terminais (CMDT) pode ser visto como uma extensão não linear do CMD clássico, em que a superfície deslizante é escolhida de forma a induzir, no regime de deslizamento, uma dinâmica com *estabilidade em tempo finito*, no sentido apresentado na subseção anterior. Em vez de se obter apenas convergência assintótica (típica de superfícies lineares), o objetivo passa a ser garantir que o erro de rastreamento alcance exatamente zero em um tempo finito $T < \infty$, sob hipóteses adequadas sobre o modelo e a lei de controle (Bhat and Bernstein, 2000).

A ideia central do CMDT é introduzir uma não linearidade apropriada na definição da variável deslizante $s(\mathbf{x})$, de modo que, uma vez estabelecido o regime deslizante, a dinâmica reduzida em \mathcal{S} produza um decaimento do tipo

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq -cV(\mathbf{x})^\alpha, \quad c > 0, 0 < \alpha < 1,$$

para uma função de Lyapunov $V(\mathbf{x})$ adequadamente escolhida. Nessa situação, o Teorema de estabilidade em tempo finito garante que o erro converge a zero em tempo finito (Bhat and Bernstein, 2000), em contraste com a convergência assintótica típica do CMD com superfícies lineares.

Superfícies Deslizantes Terminais

Para ilustrar o mecanismo, considere inicialmente um sistema escalar de segunda ordem descrito por

$$\ddot{e}(t) = \varphi(e(t), \dot{e}(t)) + \psi(e(t), \dot{e}(t)) u(t), \quad (2.58)$$

em que $e(t)$ é o erro de rastreamento (por exemplo, diferença entre a saída e a referência desejada), φ e ψ são funções suaves e $u(t)$ é o sinal de controle. No CMD clássico, uma escolha comum de variável deslizante é

$$s(t) = \dot{e}(t) + \lambda e(t), \quad \lambda > 0,$$

o que leva a uma dinâmica linear em regime deslizante, $\dot{e}(t) = -\lambda e(t)$, com convergência exponencial e, portanto, assintótica.

No CMDT, define-se uma superfície deslizante *não linear*, tipicamente da forma (Feng et al., 2002)

$$s(t) = \dot{e}(t) + \lambda |e(t)|^\gamma \operatorname{sgn}(e(t)), \quad \lambda > 0, \quad 0 < \gamma < 1, \quad (2.59)$$

em que $\operatorname{sgn}(\cdot)$ é a função sinal. A condição $s(t) = 0$ impõe, no regime deslizante,

$$\dot{e}(t) = -\lambda |e(t)|^\gamma \operatorname{sgn}(e(t)). \quad (2.60)$$

A dinâmica (2.60) é um exemplo clássico de sistema com estabilidade em tempo finito: escolhendo, por exemplo,

$$V(e) = \frac{1}{2} e^2, \quad (2.61)$$

obtem-se

$$\dot{V}(e) = e \dot{e} = -\lambda |e|^{1+\gamma}. \quad (2.62)$$

Como $V(e) = \frac{1}{2}|e|^2$, tem-se

$$|e|^{1+\gamma} = (\sqrt{2V})^{1+\gamma} = (2V)^{\frac{1+\gamma}{2}} = 2^{\frac{1+\gamma}{2}} V^{\frac{1+\gamma}{2}},$$

de modo que

$$\dot{V}(e) = -\lambda 2^{\frac{1+\gamma}{2}} V(e)^{\frac{1+\gamma}{2}}. \quad (2.63)$$

Colocando $c := \lambda 2^{\frac{1+\gamma}{2}} > 0$ e

$$\alpha := \frac{1+\gamma}{2}, \quad \text{com } 0 < \gamma < 1 \implies \frac{1}{2} < \alpha < 1,$$

chega-se à desigualdade

$$\dot{V}(e) \leq -cV(e)^\alpha, \quad c > 0, \quad \frac{1}{2} < \alpha < 1. \quad (2.64)$$

Portanto, a dinâmica em regime deslizante definida por (2.60) satisfaz exatamente a condição de tempo finito estudada anteriormente, garantindo que $e(t)$ converge a zero em um tempo finito $T < \infty$, majorado por

$$T \leq \frac{V(0)^{1-\alpha}}{c(1-\alpha)}.$$

Esse mecanismo ilustra como a escolha de uma superfície deslizante terminal do tipo (2.59) permite ao CMDT impor convergência em tempo finito ao erro de rastreo, contrastando com a convergência assintótica típica do CMD linear.

Em sistemas de ordem superior ou de dimensão maior, generalizam-se as superfícies terminais para formas vetoriais do tipo

$$s_i(\mathbf{x}) = \dot{e}_i + \lambda_i |e_i|^{\gamma_i} \operatorname{sgn}(e_i), \quad i = 1, \dots, m, \quad (2.65)$$

ou estruturas acopladas mais gerais, em que os expoentes fracionários $\gamma_i \in (0, 1)$ são projetados de modo a garantir, sob hipóteses adequadas, a convergência em tempo finito de $e(t)$ no regime deslizante (Feng et al., 2002). Em todos os casos, a análise se apoia na teoria de estabilidade em tempo finito baseada em funções de Lyapunov não lineares, como discutido na subseção anterior (Bhat and Bernstein, 2000).

Lei de Controle Terminal e Singularidades Clássicas

Assim como no CMD clássico, a implementação do CMDT baseia-se na decomposição da derivada de $s(\mathbf{x})$ em termos das derivadas de Lie $L_f s$ e $L_g s$,

$$\dot{s}(\mathbf{x}) = L_f s(\mathbf{x}) + L_g s(\mathbf{x}) u,$$

e na síntese de uma lei de controle com duas componentes: um *controle equivalente terminal* u_{eq} , responsável por reproduzir em regime deslizante a dinâmica desejada (2.60), e um termo de comutação não linear que assegura a condição de alcançabilidade em tempo

finito,

$$u(\mathbf{x}) = u_{\text{eq}}(\mathbf{x}) - k \operatorname{sgn}(s(\mathbf{x})), \quad k > 0,$$

ou variações contínuas desse termo. Do ponto de vista da teoria, a estrutura de robustez frente a perturbações casadas permanece análoga à discutida para o CMD, mas agora combinada com um mecanismo intrínseco de convergência em tempo finito na variedade terminal.

Um aspecto importante é que, em algumas formulações originais do CMDT, a superfície deslizante envolve potências negativas de e ou de suas derivações, o que pode introduzir *singularidades* na vizinhança do equilíbrio (e.g., termos do tipo $|e|^{\gamma-1} \operatorname{sgn}(e)$ com $\gamma \in (0, 1)$). Para contornar esse problema, desenvolveu-se a classe de controladores por *modo deslizante terminal não singular* (*Non-Singular Terminal Sliding Mode Control*), nos quais a estrutura da superfície é modificada de forma a preservar a propriedade de convergência em tempo finito sem introduzir termos singulares na origem (Feng et al., 2002). Essas extensões são particularmente relevantes em aplicações mecânicas, como manipuladores robóticos, robôs móveis e veículos subaquáticos, nas quais o controlador precisa operar em uma vizinhança arbitrariamente próxima do equilíbrio sem perda de bem-postura.

CMD versus CMDT

O CMD clássico utiliza superfícies lineares do tipo $s = \dot{e} + \lambda e$, garantindo alcançabilidade em tempo finito, mas com convergência apenas assintótica do erro $e(t)$ na dinâmica reduzida em \mathcal{S} . No CMDT, a superfície é não linear (por exemplo, (2.59)), produzindo uma dinâmica em tempo finito do tipo $\dot{V} \leq -cV^\alpha$, com $0 < \alpha < 1$, conforme a teoria de Lyapunov em tempo finito (Bhat and Bernstein, 2000). Assim, ambas as abordagens preservam a robustez típica de modos deslizantes frente a incertezas casadas, mas o CMDT oferece convergência mais rápida e horizonte temporal explícito, ao custo de maior cuidado na síntese da superfície e no tratamento de possíveis singularidades (Feng et al., 2002). No contexto de VASs, superfícies terminais bem projetadas permitem explorar a robustez estrutural do modo deslizante ao mesmo tempo em que garantem convergência em tempo finito das variáveis de profundidade e atitude.

2.1.5 Controle por Modo Deslizante Terminal Discreto

Diferentemente do caso contínuo, a discretização do sistema impõe limitações estruturais que conduzem a um conceito conhecido como *modo quase-deslizante*, no qual a trajetória não permanece exatamente sobre a superfície de deslizamento, mas confinada a uma banda invariante de largura finita (Gao and Hung, 1993; Sarpturk et al., 1987).

2.1.6 Modelo discreto e perturbação casada

Considere o modelo discreto linear do subsistema de mergulho, obtido por discretização do modelo contínuo ou por linearização em torno de um ponto de operação, descrito por

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_d \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_d \mathbf{u}(k) + \mathbf{B}_d \mathbf{d}(k), \quad (2.66)$$

onde $\mathbf{d}(k)$ representa uma perturbação *casada*, isto é, que atua pelo mesmo subespaço de entrada do controle. Assume-se que tal perturbação é limitada, de modo que

$$\|\mathbf{d}(k)\| \leq \delta_0, \quad (2.67)$$

com $\delta_0 > 0$ conhecido ou estimável.

A variável deslizante discreta é definida como

$$S(k) = \mathbf{G} \mathbf{x}(k), \quad (2.68)$$

em que \mathbf{G} é escolhida de forma a satisfazer a condição de compatibilidade

$$\mathbf{G} \mathbf{B}_d \neq 0, \quad (2.69)$$

garantindo a possibilidade de síntese explícita da lei de controle.

2.1.7 Lei de alcance discreta e alcançabilidade da superfície

No domínio discreto, a imposição direta de $S(k) = 0$ não é viável. Em seu lugar, emprega-se uma lei de alcance discreta, sendo a mais difundida aquela proposta por Gao

(Gao and Hung, 1993), dada por

$$S(k+1) = (1 - \alpha T_s) S(k) - \varepsilon T_s \operatorname{sgn}(S(k)), \quad (2.70)$$

onde $\alpha > 0$, $\varepsilon > 0$ e T_s é o período de amostragem.

Lema 2 (Contração fora da banda de quase-deslizamento). *Se $|1 - \alpha T_s| < 1$, então, para valores de $|S(k)|$ suficientemente grandes, a dinâmica definida em (2.70) é contrativa, isto é, $|S(k+1)| < |S(k)|$.*

Demonstração. Considere a lei de alcance discreta do tipo Gao, dada em (2.70):

$$S(k+1) = (1 - \alpha T_s) S(k) - \varepsilon T_s \operatorname{sgn}(S(k)). \quad (2.71)$$

Defina, por conveniência,

$$\lambda \triangleq 1 - \alpha T_s, \quad \gamma \triangleq \varepsilon T_s,$$

de modo que (2.71) pode ser reescrita como

$$S(k+1) = \lambda S(k) - \gamma \operatorname{sgn}(S(k)). \quad (2.72)$$

Pela hipótese do lema, tem-se $|\lambda| < 1$ e, por construção, $\gamma > 0$.

Para analisar a contração, considere inicialmente o caso $S(k) > 0$. Nesse caso, $\operatorname{sgn}(S(k)) = 1$ e (2.72) resulta em

$$S(k+1) = \lambda S(k) - \gamma. \quad (2.73)$$

Se $S(k)$ for suficientemente grande, então $S(k+1)$ permanecerá positivo; uma condição suficiente para isso é

$$\lambda S(k) - \gamma > 0 \iff S(k) > \frac{\gamma}{\lambda}, \quad (2.74)$$

quando $\lambda > 0$. Para abranger também $\lambda < 0$, não é necessário impor a preservação estrita do sinal; basta estabelecer uma condição de contração em módulo (ver adiante). Assumindo, por ora, $S(k+1) > 0$, tem-se $|S(k+1)| = S(k+1)$ e $|S(k)| = S(k)$, e assim

$$|S(k+1)| < |S(k)| \iff \lambda S(k) - \gamma < S(k) \iff (\lambda - 1)S(k) < \gamma. \quad (2.75)$$

Como $\lambda - 1 = -\alpha T_s < 0$, a desigualdade (2.75) equivale a

$$S(k) > \frac{\gamma}{1 - \lambda} = \frac{\varepsilon T_s}{\alpha T_s} = \frac{\varepsilon}{\alpha}. \quad (2.76)$$

Logo, para $S(k) > \varepsilon/\alpha$, obtém-se $|S(k+1)| < |S(k)|$ no caso $S(k) > 0$ (com contração estrita do módulo).

O caso $S(k) < 0$ é análogo. Se $S(k) < 0$, então $\text{sgn}(S(k)) = -1$ e (2.72) fornece

$$S(k+1) = \lambda S(k) + \gamma. \quad (2.77)$$

Assumindo que $S(k)$ é suficientemente negativo para que $S(k+1) < 0$, tem-se $|S(k+1)| = -S(k+1)$ e $|S(k)| = -S(k)$ e, portanto,

$$|S(k+1)| < |S(k)| \iff -(\lambda S(k) + \gamma) < -S(k) \iff (1 - \lambda)(-S(k)) > \gamma, \quad (2.78)$$

o que implica

$$|S(k)| > \frac{\gamma}{1 - \lambda} = \frac{\varepsilon}{\alpha}. \quad (2.79)$$

Assim, também para $S(k) < 0$ e $|S(k)| > \varepsilon/\alpha$, ocorre contração estrita.

Resta formalizar a conclusão de maneira unificada e independente de hipóteses auxiliares sobre o sinal de $S(k+1)$. Para isso, tome o módulo em (2.72) e use a desigualdade triangular:

$$|S(k+1)| = |\lambda S(k) - \gamma \text{sgn}(S(k))| \leq |\lambda| |S(k)| + \gamma. \quad (2.80)$$

A condição $|S(k+1)| < |S(k)|$ é garantida sempre que

$$|\lambda| |S(k)| + \gamma < |S(k)| \iff (1 - |\lambda|) |S(k)| > \gamma \iff |S(k)| > \frac{\gamma}{1 - |\lambda|}. \quad (2.81)$$

Como $|\lambda| < 1$ pela hipótese $|1 - \alpha T_s| < 1$, então $1 - |\lambda| > 0$ e o limiar em (2.81) é bem definido. Portanto, para

$$|S(k)| > \frac{\varepsilon T_s}{1 - |1 - \alpha T_s|}, \quad (2.82)$$

obtém-se $|S(k+1)| < |S(k)|$, isto é, a dinâmica é contrativa fora de uma região limitada em torno da origem (a banda de quase-deslizamento).

Em particular, quando $\lambda = 1 - \alpha T_s \in (0, 1)$ (caso típico de projeto com $\alpha T_s \in (0, 1)$), tem-se $|1 - \alpha T_s| = 1 - \alpha T_s$ e (2.82) reduz-se ao limiar mais simples $|S(k)| > \varepsilon/\alpha$, consistente com (2.76) e (2.79). Isso conclui a prova. \square

O Lema 2 estabelece que, fora de uma vizinhança limitada da origem, a dinâmica discreta da superfície deslizante induzida pela lei de alcance do tipo Gao é estritamente contrativa em módulo. Em outras palavras, sempre que $|S(k)|$ excede um determinado limiar, a evolução discreta satisfaz $|S(k+1)| < |S(k)|$, garantindo a redução monótona da distância da trajetória em relação à superfície deslizante. Esse resultado fornece a base analítica para a noção de *alcançabilidade* no domínio discreto, onde a convergência exata para $S(k) = 0$ em tempo finito não é, em geral, admissível devido à natureza amostrada do sistema.

A partir dessa propriedade de contração global fora da banda de quase-deslizamento, torna-se possível demonstrar que a trajetória da superfície deslizante alcança, em um número finito de passos, uma região invariante limitada em torno da origem. Esse resultado é formalizado no Teorema 6, que garante a alcançabilidade em tempo finito de uma banda de quase-deslizamento cujo tamanho é explicitamente determinado pelos parâmetros da lei de alcance discreta.

Teorema 6 (Alcançabilidade em tempo finito para uma banda invariante). *Sob a lei de alcance (2.70) e a condição $|1 - \alpha T_s| < 1$, existe um inteiro finito N tal que, para todo $k \geq N$,*

$$|S(k)| \leq \Delta, \quad \Delta = \frac{\varepsilon T_s}{1 - |1 - \alpha T_s|}. \quad (2.83)$$

Demonstração. Considere a lei de alcance discreta do tipo Gao,

$$S(k+1) = \lambda S(k) - \varepsilon T_s \operatorname{sgn}(S(k)), \quad \lambda = 1 - \alpha T_s, \quad (2.84)$$

com a condição de projeto $|\lambda| < 1$, equivalente a $|1 - \alpha T_s| < 1$.

Tomando o valor absoluto em (2.84) e aplicando a desigualdade triangular, obtém-se

$$|S(k+1)| \leq |\lambda| |S(k)| + \varepsilon T_s. \quad (2.85)$$

Introduza a sequência auxiliar $\{v(k)\}$ definida por

$$v(k+1) = |\lambda|v(k) + \varepsilon T_s, \quad v(0) = |S(0)|. \quad (2.86)$$

Por indução direta a partir de (2.85), segue que

$$|S(k)| \leq v(k), \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (2.87)$$

A solução explícita da recorrência linear (2.86) é dada por

$$v(k) = |\lambda|^k |S(0)| + \varepsilon T_s \sum_{i=0}^{k-1} |\lambda|^i = |\lambda|^k |S(0)| + \frac{\varepsilon T_s}{1 - |\lambda|} (1 - |\lambda|^k), \quad (2.88)$$

onde foi utilizada a soma geométrica e o fato de $|\lambda| < 1$.

Defina

$$\Delta \triangleq \frac{\varepsilon T_s}{1 - |\lambda|} = \frac{\varepsilon T_s}{1 - |\alpha T_s|}. \quad (2.89)$$

A partir de (2.88), obtém-se

$$v(k) - \Delta = |\lambda|^k (|S(0)| - \Delta). \quad (2.90)$$

Como $|\lambda| < 1$, tem-se $|\lambda|^k \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$, o que implica $v(k) \rightarrow \Delta$.

Se $|S(0)| \leq \Delta$, então $v(0) \leq \Delta$ e, de (2.86), segue que $v(k) \leq \Delta$ para todo $k \geq 0$, o que, em vista de (2.87), garante $|S(k)| \leq \Delta$ para todo k .

Caso contrário, se $|S(0)| > \Delta$, então (2.90) mostra que $v(k)$ é estritamente decrescente e converge monotonamente para Δ . Além disso, dado qualquer $\rho > 0$, existe um inteiro finito

$$N \geq \frac{\ln\left(\frac{|S(0)| - \Delta}{\rho}\right)}{-\ln|\lambda|} \quad (2.91)$$

tal que

$$v(N) \leq \Delta + \rho.$$

Tomando $\rho \rightarrow 0^+$, conclui-se que existe um inteiro finito N tal que $v(N) \leq \Delta$, e portanto, por (2.87),

$$|S(N)| \leq \Delta.$$

Finalmente, a invariância da região $|S(k)| \leq \Delta$ decorre diretamente de (2.85), pois se $|S(k)| \leq \Delta$, então

$$|S(k+1)| \leq |\lambda|\Delta + \varepsilon T_s = \Delta.$$

Logo, existe um inteiro finito N tal que

$$|S(k)| \leq \Delta, \quad \forall k \geq N,$$

o que prova a alcançabilidade em tempo finito de uma banda invariante de quase-deslizamento no domínio discreto. \square

Dessa forma, o Teorema 6 estabelece formalmente a *alcançabilidade* da superfície quase-deslizante em tempo finito no domínio discreto, não no sentido de $S(k) = 0$, mas no sentido de confinamento em uma banda de quase-deslizamento.

2.1.8 Estabilidade discreta em modo quase-deslizante

Uma vez alcançada a banda (2.83), a análise de estabilidade recorre ao critério clássico proposto por Sarpturk, Istefanopulos e Kaynak ([Sarpturk et al., 1987](#)).

Teorema 7 (Estabilidade em modo quase-deslizante — Sarpturk). *Considere o sistema discreto (2.66) com perturbação casada limitada. Se a lei de controle garante a alcançabilidade da banda (2.83) e a dinâmica interna associada à superfície deslizante é estável, então as trajetórias do estado $\mathbf{x}(k)$ permanecem limitadas, e o erro de rastreamento é limitado por uma constante proporcional à largura da banda Δ .*

Demonstração. Considere o sistema discreto sob a lei de controle projetada, descrito por (2.66), sujeito a uma perturbação casada limitada. Pelo Teorema 6, a superfície deslizante $S(k)$ alcança, em tempo finito, a banda invariante de quase-deslizamento definida em (2.83), isto é, existe um inteiro finito N tal que

$$|S(k)| \leq \Delta, \quad \forall k \geq N. \quad (2.92)$$

No domínio discreto, a condição (2.92) caracteriza o regime de *modo quase-deslizante*, no qual a superfície não converge exatamente a zero, mas permanece confinada em uma vizinhança limitada da origem. Conforme estabelecido por Sarpturk et al., esse regime

substitui o conceito clássico de deslizamento ideal do tempo contínuo, sendo o comportamento esperado para sistemas amostrados.

Considere agora a dinâmica do sistema quando restrita à vizinhança da superfície deslizante. Seja a superfície definida por

$$S(k) = \mathbf{C}_s \mathbf{x}(k),$$

com \mathbf{C}_s de posto pleno em relação às variáveis relevantes do subsistema. A condição $|S(k)| \leq \Delta$ implica que o estado $\mathbf{x}(k)$ permanece em um conjunto tubular em torno do conjunto ideal $S(k) = 0$. Em particular, existe uma constante positiva $c > 0$ tal que

$$\|\mathbf{x}(k)\| \leq c_1 \|S(k)\| + c_2, \quad (2.93)$$

onde c_1 e c_2 dependem apenas da parametrização da superfície e da mudança de coordenadas associada.

Como a dinâmica interna (ou dinâmica de ordem reduzida) associada à superfície deslizante é estável por hipótese, segue que, na ausência de perturbações, o estado reduzido seria assintoticamente estável. Na presença de perturbação casada limitada e de uma superfície confinada à banda (2.83), essa estabilidade é degradada para uma estabilidade prática, no sentido de que as trajetórias permanecem limitadas.

Substituindo (2.92) em (2.93), obtém-se, para todo $k \geq N$,

$$\|\mathbf{x}(k)\| \leq c_1 \Delta + c_2, \quad (2.94)$$

o que demonstra que o estado permanece uniformemente limitado.

Além disso, como o erro de rastreamento $e(k)$ é uma função linear do estado, segue imediatamente que existe uma constante $c_e > 0$ tal que

$$|e(k)| \leq c_e \Delta, \quad \forall k \geq N. \quad (2.95)$$

Portanto, o erro de rastreamento é limitado por uma constante proporcional à largura da banda de quase-deslizamento.

Conclui-se, assim, que sob a lei de controle projetada, as trajetórias do sistema discreto permanecem limitadas e o erro de rastreamento converge para uma vizinhança limitada da

origem, caracterizando estabilidade em modo quase-deslizante no sentido de Sarpturk. \square

Esse resultado assegura que, apesar da impossibilidade de deslizamento ideal no domínio discreto, o comportamento do sistema permanece estável e robusto frente a perturbações casadas limitadas.

2.1.9 Superfície terminal discreta e convergência em tempo finito

Para acelerar a convergência do erro de rastreamento, introduz-se uma superfície quase-deslizante terminal discreta da forma

$$S_T(k) = \sum_{i=0}^{n_c} c_i e(k-i) + \beta |e(k)|^{\frac{q_c}{p_c}} \operatorname{sgn}(e(k)), \quad (2.96)$$

onde p_c e q_c são inteiros ímpares positivos, tais que $p_c > q_c$ e $0 < q_c/p_c < 1$.

Lema 3 (Convergência em tempo finito de erro escalar discreto). *Considere a dinâmica*

$$e(k+1) = e(k) - \mu |e(k)|^\gamma \operatorname{sgn}(e(k)), \quad 0 < \gamma < 1, \quad (2.97)$$

com $\mu > 0$. Então existe um número finito de passos após o qual $e(k) = 0$.

Demonstração. Defina o funcional de Lyapunov escalar

$$V(k) \triangleq |e(k)|^{1-\gamma}, \quad 1 - \gamma \in (0, 1). \quad (2.98)$$

Note que $V(k) \geq 0$ e $V(k) = 0 \Leftrightarrow e(k) = 0$.

Para $e(k) \neq 0$, a dinâmica (2.97) pode ser escrita em termos da magnitude $x(k) \triangleq |e(k)| > 0$ como

$$x(k+1) = |x(k) - \mu x(k)^\gamma|. \quad (2.99)$$

Em particular, enquanto $x(k) > \mu^{\frac{1}{1-\gamma}}$, tem-se $x(k) - \mu x(k)^\gamma > 0$ e, portanto,

$$x(k+1) = x(k) - \mu x(k)^\gamma, \quad \text{se } x(k) > \mu^{\frac{1}{1-\gamma}}. \quad (2.100)$$

Como $0 < 1 - \gamma < 1$, a função $\varphi(x) = x^{1-\gamma}$ é côncava em $x > 0$. Logo, para quaisquer

$x > 0$ e $\delta \in [0, x]$, vale a desigualdade do plano tangente (concavidade):

$$\varphi(x - \delta) \leq \varphi(x) - \varphi'(x) \delta, \quad (2.101)$$

onde $\varphi'(x) = (1 - \gamma)x^{-\gamma}$.

Aplicando (2.101) com $x = x(k)$ e $\delta = \mu x(k)^\gamma$ (note que $\delta \leq x$ equivale a $x(k)^{1-\gamma} \geq \mu$, isto é, $x(k) \geq \mu^{\frac{1}{1-\gamma}}$), obtém-se:

$$\begin{aligned} V(k+1) &= x(k+1)^{1-\gamma} \\ &= (x(k) - \mu x(k)^\gamma)^{1-\gamma} \\ &\leq x(k)^{1-\gamma} - (1-\gamma)x(k)^{-\gamma} \mu x(k)^\gamma \\ &= V(k) - \mu(1-\gamma), \quad \text{se } x(k) \geq \mu^{\frac{1}{1-\gamma}}. \end{aligned} \quad (2.102)$$

Portanto, sempre que $|e(k)| \geq \mu^{\frac{1}{1-\gamma}}$, o funcional $V(k)$ decresce por, no mínimo, uma constante estritamente positiva $\mu(1-\gamma)$.

Agora fixe a condição inicial $e(0)$ e considere o primeiro instante em que $|e(k)|$ entra na vizinhança

$$\Omega \triangleq \left\{ e \in \mathbb{R} : |e| \leq \mu^{\frac{1}{1-\gamma}} \right\}. \quad (2.103)$$

Se $e(0) = 0$, a conclusão é trivial. Caso contrário, enquanto $e(k) \notin \Omega$, pela estimativa (2.102) tem-se, para todo k nesse regime,

$$V(k) \leq V(0) - k \mu(1-\gamma). \quad (2.104)$$

Escolhendo

$$N \triangleq \left\lceil \frac{V(0)}{\mu(1-\gamma)} \right\rceil = \left\lceil \frac{|e(0)|^{1-\gamma}}{\mu(1-\gamma)} \right\rceil, \quad (2.105)$$

segue de (2.104) que $V(N) \leq 0$, o que é possível somente se o processo tiver alcançado Ω em, no máximo, N passos.

Por fim, ao entrar em Ω , observa-se que o incremento $\mu|e(k)|^\gamma$ satisfaz $\mu|e(k)|^\gamma \geq |e(k)|$ (equivalentemente, $|e(k)|^{1-\gamma} \leq \mu$). Assim, a atualização (2.97) tende a anular o erro em, no máximo, um passo caso se adote a realização usual (em controle discreto) com projeção

no ponto de equilíbrio:

$$e(k+1) = 0 \quad \text{quando} \quad |e(k)| \leq \mu^{\frac{1}{1-\gamma}}. \quad (2.106)$$

Logo, existe um número finito de passos após o qual $e(k) = 0$.

A estimativa (2.102) garante rigorosamente *entrada em tempo finito* na vizinhança Ω (convergência prática). A igualdade exata $e(k) = 0$ em tempo finito requer a implementação (2.106), amplamente utilizada em CMDTD para evitar alternância de sinal (overshoot) em amostragem finita. Essa escolha é consistente com a definição de superfície terminal discreta e com o objetivo de obter uma dinâmica efetivamente de “tempo finito” no domínio discreto. \square

No CMDTD, o termo não linear fracionário em (2.96) induz uma dinâmica equivalente à (2.97) na fase final do movimento.

Em síntese, o Controle por Modo Quase-Deslizante Terminal fundamenta-se nos seguintes pilares teóricos: (i) alcançabilidade em tempo finito de uma banda de quase-deslizamento, garantida pela lei de alcance discreta de Gao; (ii) estabilidade e limitação das trajetórias no regime quase-deslizante, asseguradas pelo critério de Sarpturk; e (iii) convergência terminal em tempo finito do erro, proporcionada pelo termo não linear fracionário da superfície terminal discreta. Esses resultados fornecem a base formal para a implementação e análise do adotado neste trabalho.

Capítulo 3

Modelagem e Síntese do CMDTD

Este capítulo tem por objetivo especializar a formulação genérica apresentada na Revisão Bibliográfica (Capítulo 2) para o caso concreto do modelo NPS AUV II, utilizado como planta de referência neste trabalho, além de descrever a síntese do controlador por Modo Deslizante Terminal Discreto (CMDTD). Inicialmente, o modelo completo não linear do veículo é apresentado, e, em seguida, procede-se à derivação de um modelo reduzido no canal vertical (movimento vertical/arfagem), a partir das equações em seis graus de liberdade, obtendo-se uma representação concentrada em profundidade e arfagem, compatível com a estrutura de controle adotada. Na sequência, define-se o problema de rastreamento de referências em profundidade e ângulo de arfagem no domínio discreto, bem como os erros associados, considerando a atualização do comando em instantes $t_k = kT_s$ e a integração numérica da dinâmica do veículo em tempo contínuo. Para fins de síntese do termo equivalente do controlador, o comportamento do subsistema vertical é aproximado por um modelo linearizado em torno de um ponto de operação.

Com essa base, apresenta-se a construção das superfícies deslizantes utilizadas: superfícies lineares associadas à profundidade e à arfagem, bem como uma superfície terminal escalar que incorpora um termo não linear em função do erro de profundidade, com expoente fracionário, de modo a garantir convergência em tempo finito, conforme a teoria de CMDT apresentada no Capítulo 2 (Bhat and Bernstein, 2000; Feng et al., 2002). Por fim, descreve-se a síntese da lei de controle discreta: o termo equivalente obtido a partir do modelo linearizado e o termo robusto de comutação responsável pela alcançabilidade e pela robustez frente às incertezas casadas, detalhando os ganhos utilizados e os cuidados práticos com saturação de atuadores e mitigação de *chattering*.

3.1 Apresentação do Modelo NPS AUV II

A planta adotada neste trabalho é o *NPS AUV II* (do inglês *Naval Postgraduate School Autonomous Underwater Vehicle II*), um veículo subaquático autônomo de médio porte desenvolvido para pesquisas de guiamento e controle na Naval Postgraduate School, em Monterey. A Figura 3.1 mostra sua configuração externa, destacando o arranjo dos planos de controle de arfagem na proa e na popa (lemes laterais), os lemes de guinada (parte superior) e o eixo do propulsor. Trata-se de uma plataforma amplamente conhecida na literatura clássica de controle de veículos submarinos (Healey and Lienard, 1993; Fossen, 1994).

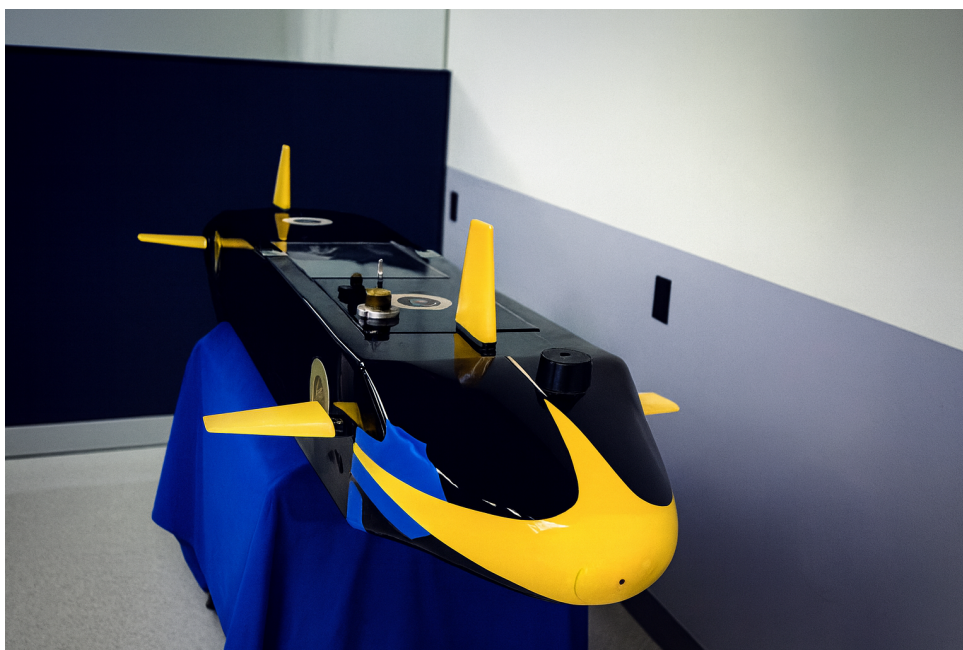


Figura 3.1: Estrutura externa do NPS AUV II (Torsiello, 1994)

Do ponto de vista do formalismo apresentado no Capítulo 2, o NPS AUV II é modelado como um veículo rígido submerso em seis graus de liberdade, com vetores de pose $\boldsymbol{\eta}$ e velocidades $\boldsymbol{\nu}$ definidos em (2.3) e (2.4), obedecendo à estrutura geral (2.1)–(2.2). A diferença fundamental em relação ao modelo genérico de Fossen (Fossen, 1994) é que, no caso desse modelo, em específico, todas as contribuições hidrodinâmicas e estruturais são explicitadas por meio de derivadas calibradas experimentalmente, e a inversa da matriz de inércia generalizada $\mathbf{M}(\boldsymbol{\nu})$ é pré-computada numericamente, de modo que as equações diferenciais já são fornecidas na forma expandida para cada componente de $\boldsymbol{\nu}$.

3.1.1 Estados, Entradas e Variáveis Intermediárias

Consistente com a estrutura desenvolvida no Capítulo 2, esta subseção organiza os estados, entradas e variáveis auxiliares utilizados na modelagem completa da planta.

O vetor de estados é definido para o NPS AUV II, como

$$\mathbf{x} = \left[u \ v \ w \ p \ q \ r \ x \ y \ z \ \phi \ \theta \ \psi \right]^T \quad (3.1)$$

onde u , v e w são as velocidades lineares no referencial do corpo (avanço, deriva e movimento vertical), p , q e r são as velocidades angulares em torno dos eixos de rolagem, arfagem e guinada, e (x, y, z) , (ϕ, θ, ψ) são, respectivamente, posição e ângulos de Euler no referencial inercial, conforme já discutido em (2.3). Além disso, pode-se calcular a velocidade escalar total por

$$U = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}. \quad (3.2)$$

O vetor de entradas \mathbf{u}_i reúne todos os atuadores do modelo, isto é, os lemes, os planos de popa e de proa, e a rotação do propulsor:

$$\mathbf{u}_i = \left[\delta_r \ \delta_s \ \delta_b \ \delta_{bp} \ \delta_{bs} \ n \right]^T, \quad (3.3)$$

onde δ_r é o ângulo dos lemes de guinada na popa (superior e inferior), δ_s o ângulo de arfagem dos planos horizontais de popa (porta e bombordo), δ_b o ângulo dos planos de proa superior e inferior, δ_{bp} e δ_{bs} os planos de proa de bombordo e boreste (do inglês *Bow Port and Bow Starboard*), respectivamente e n a velocidade angular do eixo do propulsor em *rpm*. Os atuadores podem ser melhor visualizados no esquemático da Figura 3.2.

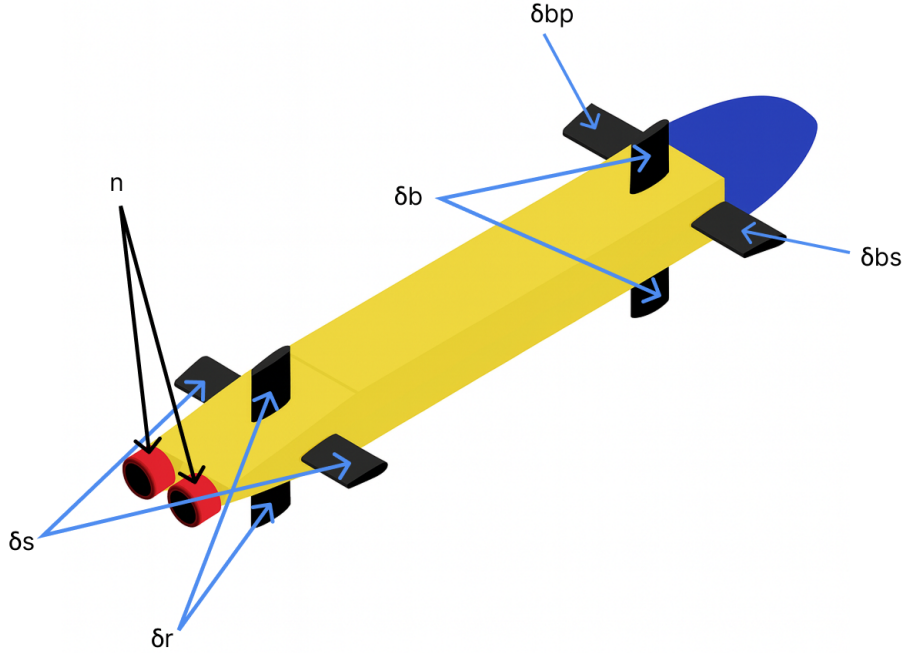


Figura 3.2: Esquemático de atuadores do NPS AUV II

Manipulando algebricamente a equação (2.1) e desprezando ruídos externos ($\tau_d = \mathbf{0}$) obtemos:

$$M(\nu) \dot{\nu} = \tau - C(\nu) \nu - D(\nu) \nu - g(\eta) \quad (3.4)$$

Onde o vetor de forças e momentos τ corresponde a todo o lado direito da equação 3.4 dado por

$$\tau = [X \ Y \ Z \ K \ M \ N]^T, \quad (3.5)$$

em que X , Y e Z são forças nas direções de *avanço*, *deriva* e *movimento vertical*, e K , M e N são os momentos de rolagem, arfagem e guinada. Note ainda, que o τ da 3.4 (equivalente às forças e momentos causados pelos atuadores) não é o mesmo τ de 3.5, que inclui forças hidrodinâmicas, forças de empuxo e forças gravitacionais.

3.1.2 Parâmetros Estruturais e Hidrodinâmicos

Os parâmetros do casco, propriedades inerciais, constantes gravitacionais e hidrodinâmicas com valores fixos podem ser consultados na Tabela 3.1.

Tabela 3.1: Constantes e parâmetros estruturais/hidrodinâmicos do NPS AUV II.

Símbolo	Unidade	Descrição	Valor
L	m	Comprimento total do veículo.	5.3
g	m/s ²	Aceleração da gravidade.	9.8
ρ	kg/m ³	Densidade da água.	1000
m	–	Massa adimensionalizada.	$\frac{5454.54}{(\rho L^3/2)}$
W	N	Peso do veículo.	53400
B	N	Empuxo hidrostático.	53400
x_G	m	Coordenada do centro de gravidade no eixo longitudinal x do veículo.	0
y_G	m	Coordenada do centro de gravidade no eixo transversal y do veículo.	0
z_G	m	Coordenada do centro de gravidade no eixo vertical z do veículo.	0.061
x_B	m	Coordenada do centro de empuxo hidrostático no eixo longitudinal x .	0
y_B	m	Coordenada do centro de empuxo hidrostático no eixo transversal y .	0
z_B	m	Coordenada do centro de empuxo hidrostático no eixo vertical z .	0
I_x	kg m ²	Momento principal de inércia em rolagem.	2038
I_y	kg m ²	Momento principal de inércia em arfagem.	13587
I_z	kg m ²	Momento principal de inércia em guinada.	13587
I_{xy}	kg m ²	Produto de inércia em relação aos eixos x - y .	-13.58
I_{yz}	kg m ²	Produto de inércia em relação aos eixos y - z .	-13.58

Continua na próxima página

Símbolo	Unidade	Descrição	Valor
I_{xz}	kg m^2	Produto de inércia em relação aos eixos $x-z$.	-13.58
C_{dy}	-	Coefficiente de arrasto lateral.	0.5
C_{dz}	-	Coefficiente de arrasto vertical.	0.6
C_{d0}	-	Coefficiente de arrasto associado ao propulsor.	0.00385
C_t	-	Coefficiente auxiliar para modelagem do empuxo do propulsor.	$0.008L^2 \text{prop} /\text{prop}/2$
C_{t1}	-	Coefficiente auxiliar secundário do propulsor.	$0.008L^2/2$

Por outro lado, na Tabela 3.2 das derivadas hidrodinâmicas (X', Y', Z', K', M', N') estão incluídos, por exemplo, $X'_{pp}, X'_{qq}, X'_{rr}, X'_{vr}, X'_{wq}, Y'_v, Y'_{dr}, Z'_w, M'_{uw}, N'_{dr}$, entre outros, todos obtidos por calibração hidrodinâmica e registrados em forma adimensionalizada na implementação do modelo. Coletivamente, esses coeficientes concretizam, em forma numérica, as funções M_A , $C_A(\nu)$ e $D(\nu)$ da formulação de Fossen (Fossen, 1994).

Tabela 3.2: Derivadas hidrodinâmicas do modelo NPS AUV II.

Símbolo	Valor	Símbolo	Valor	Símbolo	Valor
Derivadas X'					
X'_{pp}	7.0×10^{-3}	X'_{qq}	-1.5×10^{-2}	X'_{rr}	4.0×10^{-3}
X'_{pr}	7.5×10^{-4}	X'_u	-7.6×10^{-3}	X'_{wq}	-2.0×10^{-1}
X'_{vp}	-3.0×10^{-3}	X'_{vr}	2.0×10^{-2}	$X'_{q\delta_s}$	2.5×10^{-2}
$X'_{q\delta_{b/2}}$	-1.3×10^{-3}	$X'_{r\delta_r}$	-1.0×10^{-3}	X'_{vv}	5.3×10^{-2}
X'_{ww}	1.7×10^{-1}	$X'_{v\delta_r}$	1.7×10^{-3}	$X'_{w\delta_s}$	4.6×10^{-2}
$X'_{w\delta_{b/2}}$	0.5×10^{-2}	$X'_{\delta_s^2}$	-1.0×10^{-2}	$X'_{\delta_{b/2}^2}$	-4.0×10^{-3}
$X'_{\delta_r^2}$	-1.0×10^{-2}	$X'_{q\delta_{sn}}$	2.0×10^{-3}	$X'_{w\delta_{sn}}$	3.5×10^{-3}
$X'_{\delta_s^2 n}$	-1.6×10^{-3}				
Derivadas Y'					
Y'_p	1.2×10^{-4}	Y'_r	1.2×10^{-3}	Y'_{pq}	4.0×10^{-3}

Continua na próxima página

Símbolo	Valor	Símbolo	Valor	Símbolo	Valor
Y'_{qr}	-6.5×10^{-3}	Y'_v	-5.5×10^{-2}	Y'_p	3.0×10^{-3}
Y'_r	3.0×10^{-2}	Y'_{vq}	2.4×10^{-2}	Y'_{wp}	2.3×10^{-1}
Y'_{wr}	-1.9×10^{-2}	Y'_v	-1.0×10^{-1}	Y'_{vw}	6.8×10^{-2}
Y'_{δ_r}	2.7×10^{-2}				
Derivadas Z'					
$Z'_{\dot{q}}$	-6.8×10^{-3}	Z'_{pp}	1.3×10^{-4}	Z'_{pr}	6.7×10^{-3}
Z'_{rr}	-7.4×10^{-3}	$Z'_{\dot{w}}$	-2.4×10^{-1}	Z'_q	-1.4×10^{-1}
Z'_{vp}	-4.8×10^{-2}	Z'_{vr}	4.5×10^{-2}	Z'_w	-3.0×10^{-1}
Z'_{vv}	-6.8×10^{-2}	Z'_{δ_s}	-7.3×10^{-2}	$Z'_{\delta_{b/2}}$	-1.3×10^{-2}
Z'_{qn}	-2.9×10^{-3}	Z'_{wn}	-5.1×10^{-3}	$Z'_{\delta_{sn}}$	-1.0×10^{-2}
Derivadas K'					
$K'_{\dot{p}}$	-1.0×10^{-3}	$K'_{\dot{r}}$	-3.4×10^{-5}	K'_{pq}	-6.9×10^{-5}
K'_{qr}	1.7×10^{-2}	$K'_{\dot{v}}$	1.2×10^{-4}	K'_p	-1.1×10^{-2}
K'_r	-8.4×10^{-4}	K'_{vq}	-5.1×10^{-3}	K'_{wp}	-1.3×10^{-4}
K'_{wr}	1.4×10^{-2}	K'_v	3.1×10^{-3}	K'_{vw}	-1.9×10^{-1}
$K'_{\delta_{b/2}}$	0	K'_{pn}	-5.7×10^{-4}	K'_{prop}	0
Derivadas M'					
$M'_{\dot{q}}$	-1.7×10^{-2}	M'_{pp}	5.3×10^{-5}	M'_{pr}	5.0×10^{-3}
M'_{rr}	2.9×10^{-3}	$M'_{\dot{w}}$	-6.8×10^{-3}	M'_{uq}	-6.8×10^{-2}
M'_{vp}	1.2×10^{-3}	M'_{vr}	1.7×10^{-2}	M'_{uw}	1.0×10^{-1}
M'_{vv}	-2.6×10^{-2}	M'_{δ_s}	-4.1×10^{-2}	$M'_{\delta_{b/2}}$	3.5×10^{-3}
M'_{qn}	-1.6×10^{-3}	M'_{wn}	-2.9×10^{-3}	$M'_{\delta_{sn}}$	-5.2×10^{-3}
Derivadas N'					
$N'_{\dot{p}}$	-3.4×10^{-5}	$N'_{\dot{r}}$	-3.4×10^{-3}	N'_{pq}	-2.1×10^{-2}
N'_{qr}	2.7×10^{-3}	$N'_{\dot{v}}$	1.2×10^{-3}	N'_p	-8.4×10^{-4}
N'_r	-1.6×10^{-2}	N'_{vq}	-1.0×10^{-2}	N'_{wp}	-1.7×10^{-2}
N'_{wr}	7.4×10^{-3}	N'_v	-7.4×10^{-3}	N'_{vw}	-2.7×10^{-2}

Continua na próxima página

Símbolo	Valor	Símbolo	Valor	Símbolo	Valor
N'_{δ_r}	-1.3×10^{-2}	N'_{prop}	0		

3.1.3 Equações de Forças e Momentos

Nesta subseção, definimos as forças e momentos que atuam sobre a planta. Podemos dividi-las em duas partes: a primeira corresponde à influência dos atuadores, e a segunda se refere à forças e momentos hidrodinâmicos virtuais que surgem com a ação dos atuadores. No entanto, antes de defini-las, precisamos calcular alguns termos.

Inicialmente, a (3.2) nos dá a velocidade total no referencial do corpo (U). Com esse dado, pode-se obter a razão de avanço do propulsor, modelada por

$$\text{prop} = \frac{0,012 n}{U}. \quad (3.6)$$

onde n é a velocidade de rotação do eixo do propulsor em rotações por minuto (rpm).

O termo associado ao empuxo/arrasto em *avanço* é

$$X_{\text{prop}} = C_{d0} (|\text{prop}| \text{prop} - 1), \quad (3.7)$$

com C_{d0} obtido da Tabela 3.1. Dessa forma, dados os coeficientes auxiliares

$$C_{t1} = \frac{0,008 L^2}{2}, \quad (3.8)$$

$$C_t = C_{t1} |\text{prop}| \text{prop}, \quad (3.9)$$

onde L é o comprimento total do veículo (em metros), pode-se calcular o fator de correção de empuxo por

$$\varepsilon = -1 + \frac{\text{sgn}(n) \sqrt{C_t + 1} - 1}{\text{sgn}(u) \sqrt{C_{t1} + 1} - 1}. \quad (3.10)$$

Para síntese do que foi definido até aqui, apresenta-se a Tabela 3.3, que resume as variáveis de estado, entradas e grandezas auxiliares do modelo. Vale ressaltar que o veículo apresenta características de subatuação, uma vez que nem todos os graus de liberdade dinâmicos são diretamente atuados de forma independente. Ainda assim, devido ao forte acoplamento hidrodinâmico, as variáveis de entrada influenciam indiretamente os

múltiplos graus de liberdade.

Tabela 3.3: Variáveis de estado, entradas e variáveis auxiliares.

Símbolo	Unidade	Descrição
u, v, w	m/s	Velocidades lineares de <i>surge</i> , <i>sway</i> e <i>heave</i> no corpo.
p, q, r	rad/s	Velocidades angulares de rolagem, arfagem e guinada no corpo.
x, y, z	m	Posição do CG no referencial inercial.
ϕ, θ, ψ	rad	Ângulos de Euler (rolagem, arfagem, guinada).
δ_r	rad	Leme de guinada.
δ_s	rad	Planos de popa (porta e bombordo).
δ_b	rad	Planos de proa superior/inferior.
δ_{bp}	rad	Plano de proa de bombordo.
δ_{bs}	rad	Plano de proa de boreste.
n	rpm	Velocidade de rotação do eixo do propulsor.
U	m/s	Módulo da velocidade no corpo: $U = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$.
x_L	m	Coordenada ao longo do comprimento do casco usada na integração de arrasto.
U_{cf}	m/s	Velocidade transversal efetiva em cada seção x_L .
C_y, C_z	–	Coefficientes integrados de força lateral e vertical devido ao arrasto distribuído.
C_m, C_n	–	Coefficientes integrados de momento de arfagem e guinada devido ao arrasto distribuído.
prop	–	Razão de avanço do propulsor: $\text{prop} = 0,012 n/u$.
X_{prop}	–	Termo de arrasto/empuxo em <i>surge</i> devido ao propulsor.

Continua na próxima página

Símbolo	Unidade	Descrição
ε	–	Fator de correção de empuxo em função da razão de avanço e direção de movimento.
τ_1, \dots, τ_6	–	Contribuições dos atuadores para X, Y, Z, K, M, N , respectivamente.

Dessa forma, definem-se as contribuições dos atuadores para as forças e os momentos atuantes no veículo. Os coeficientes hidrodinâmicos empregados nas equações de força e momento seguem rigorosamente a notação apresentada na Tabela 3.2. E os termos associados aos planos de proa são modelados por meio das derivadas em $\delta_{b/2}$, de modo a refletir a simetria entre bombordo e boreste.

$$\begin{aligned}
\tau_1 = & r_3 \left(X_{r\delta_r} ur \delta_r + (X_{q\delta_s} \delta_s + X_{q\delta_{b/2}} \delta_{bp} + X_{q\delta_{b/2}} \delta_{bs}) uq \right) \\
& + r_2 \left(X_{v\delta_r} uv \delta_r + (X_{w\delta_s} \delta_s + X_{w\delta_{b/2}} \delta_{bp} + X_{w\delta_{b/2}} \delta_{bs}) uw \right. \\
& \quad \left. + (X_{\delta_s^2} \delta_s^2 + X_{\delta_{b/2}^2} \delta_b^2 + X_{\delta_r^2} \delta_r^2) u^2 \right) \\
& + r_3 X_{q\delta_{sn}} uq \delta_s \varepsilon + r_2 (X_{w\delta_{sn}} uw \delta_s + X_{\delta_s^2 n} u^2 \delta_s^2) \varepsilon + r_2 u^2 X_{\text{prop}}, \tag{3.11}
\end{aligned}$$

$$\tau_2 = r_2 Y_{\delta_r} u^2 \delta_r, \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}
\tau_3 = & r_2 u^2 \left(Z_{\delta_s} \delta_s + Z_{\delta_{b/2}} \delta_{bp} + Z_{\delta_{b/2}} \delta_{bs} \right) + r_3 Z_{qn} uq \varepsilon \\
& + r_2 (Z_{wn} uw + Z_{\delta_{sn}} u^2 \delta_s) \varepsilon, \tag{3.13}
\end{aligned}$$

$$\tau_4 = r_4 K_{pn} up \varepsilon + r_3 u^3 K_{\text{prop}} + r_3 u^2 \left(K_{\delta_{b/2}} \delta_{bp} + K_{\delta_{b/2}} \delta_{bs} \right), \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}
\tau_5 = & r_4 M_{qn} uq \varepsilon + r_3 (M_{wn} uw + M_{\delta_{sn}} u^2 \delta_s) \varepsilon \\
& + r_3 u^2 \left(M_{\delta_s} \delta_s + M_{\delta_{b/2}} \delta_{bp} + M_{\delta_{b/2}} \delta_{bs} \right), \tag{3.15}
\end{aligned}$$

$$\tau_6 = r_3 u^2 N_{\text{prop}} + r_3 u^2 N_{\delta_r} \delta_r, \tag{3.16}$$

Definimos ainda, o arrasto distribuído ao longo do casco representado por integrais ao

longo do comprimento L :

$$C_y = \int_0^L \frac{(0,5 C_{dy}(v + x_L r)^2 + C_{dz}(w - x_L q)^2) (v + x_L r)}{\sqrt{(v + x_L r)^2 + (w - x_L q)^2}} dx_L, \quad (3.17)$$

$$C_z = \int_0^L \frac{(0,5 C_{dy}(v + x_L r)^2 + C_{dz}(w - x_L q)^2) (w - x_L q)}{\sqrt{(v + x_L r)^2 + (w - x_L q)^2}} dx_L, \quad (3.18)$$

$$C_m = \int_0^L \frac{(0,5 C_{dy}(v + x_L r)^2 + C_{dz}(w - x_L q)^2) (w + x_L q) x_L}{\sqrt{(v + x_L r)^2 + (w - x_L q)^2}} dx_L, \quad (3.19)$$

$$C_n = \int_0^L \frac{(0,5 C_{dy}(v + x_L r)^2 + C_{dz}(w - x_L q)^2) (v + x_L r) x_L}{\sqrt{(v + x_L r)^2 + (w - x_L q)^2}} dx_L. \quad (3.20)$$

Com esses termos, as forças e momentos hidrodinâmicos totais (3.5) podem ser escritos explicitamente.

Força em *avanço* X :

$$\begin{aligned} X = & r_3 \left((m + X_{vr})vr + (X_{wq} - m)wq + X_{vp}vp \right) \\ & + r_4 \left((mx_G/L + X_{qq})q^2 + (mx_G/L + X_{rr})r^2 - my_{Gpq}/L \right. \\ & \quad \left. + (X_{pr} - mz_G/L)pr + X_{pp}p^2 \right) \\ & + r_2(X_{vv}v^2 + X_{ww}w^2) - (W - B) \sin \theta + \tau_1. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Força em *deriva* Y :

$$\begin{aligned} Y = & r_2(Y_v uv + Y_{vw}vw) + r_3(Y_p up + Y_r ur + Y_{vq}vq + Y_{wp}wp + Y_{wr}wr) \\ & + r_4(Y_{pq}pq + Y_{qr}qr) + (W - B) \cos \theta \sin \phi \\ & - m(\rho L^3/2)(ur - wp + x_G pq - y_G(p^2 + r^2) + z_G qr) \\ & + \tau_2 - (\rho/2) C_y. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Força em *movimento vertical* Z :

$$\begin{aligned}
Z &= r_2(Z_wuw + Z_vv^2) + r_3(Z_quq + Z_vpv + Z_vrv) \\
&\quad + r_4(Z_ppp^2 + Z_prr + Z_rrr^2) + (W - B) \cos \theta \cos \phi \\
&\quad - m(\rho L^3/2)(vp - uq + x_Gpr + y_Gqr - z_G(p^2 + q^2)) \\
&\quad + \tau_3 + (\rho/2) C_z.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Momento de rolagem K :

$$\begin{aligned}
K &= r_3(K_vuv + K_vvv) + r_4(K_pup + K_rur + K_vqv + K_wvp + K_wrv) \\
&\quad + r_5(K_ppq + K_qrq) + (I_y - I_z)qr - I_{xy}pr - (r^2 - q^2)I_{yz} \\
&\quad + I_{xz}pq - m(\rho L^3/2)(y_G(vp - uq) - z_G(ur - wp)) \\
&\quad + (y_GW - y_BB) \cos \phi \cos \theta - (z_GW - z_BB) \cos \theta \sin \phi \\
&\quad + \tau_4 - (\rho/2) C_m.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Momento de arfagem M :

$$\begin{aligned}
M &= r_3(M_uwuw + M_vv^2) + r_4(M_uqu + M_vpv + M_vrv) \\
&\quad + r_5(M_ppp^2 + M_prr + M_rrr^2) - (x_GW - x_BB) \cos \phi \cos \theta \\
&\quad - (z_GW - z_BB) \sin \theta + (I_z - I_x)pr + I_{xy}qr - I_{yz}pq \\
&\quad - (p^2 - r^2)I_{xz} + m(\rho L^3/2)(x_G(vp - uq) - z_G(wq - vr)) \\
&\quad + \tau_5 - (\rho/2) C_m.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Momento de guinada N :

$$\begin{aligned}
N &= r_3(N_vuv + N_vvv) + r_4(N_pup + N_rur + N_vqv + N_wvp + N_wrv) \\
&\quad + r_5(N_ppq + N_qrq) + (x_GW - x_BB) \sin \phi \cos \theta + (y_GW - y_BB) \sin \theta \\
&\quad + (I_x - I_y)pq + (p^2 - q^2)I_{xy} + I_{yz}pr - I_{xz}qr \\
&\quad - m(\rho L^3/2)(x_G(ur - wp) - y_G(wq - vr)) \\
&\quad + \tau_6 - (\rho/2) C_n.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Reunindo as componentes, o vetor de forças e momentos $\boldsymbol{\tau} = [X \ Y \ Z \ K \ M \ N]^T$

concretiza a parte direita da equação dinâmica (3.4). No modelo do NPS AUV II, em vez de se resolver explicitamente a Equação (3.4) por meio da inversão simbólica da matriz de inércia, utiliza-se diretamente uma forma já multiplicada por \mathbf{M}^{-1} , pré-computada a partir dos parâmetros inerciais e de massa adicionada do veículo. Dessa forma, a dinâmica no referencial do corpo pode ser escrita como

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \mathbf{M}^{-1} \boldsymbol{\tau}. \quad (3.27)$$

Na implementação do simulador, a matriz inversa de inércia \mathbf{M}^{-1} é expandida numericamente, resultando em uma matriz constante cujos elementos são dados por:

$$\begin{bmatrix} 1.662 \times 10^{-4} & 1.846 \times 10^{-10} & 1.303 \times 10^{-7} & 3.726 \times 10^{-9} & -1.132 \times 10^{-6} & 7.320 \times 10^{-10} \\ 1.846 \times 10^{-10} & 1.052 \times 10^{-4} & 3.843 \times 10^{-10} & 9.638 \times 10^{-6} & -3.340 \times 10^{-9} & 2.368 \times 10^{-6} \\ 1.303 \times 10^{-7} & 3.843 \times 10^{-10} & 4.315 \times 10^{-5} & 7.757 \times 10^{-9} & -2.357 \times 10^{-6} & 1.524 \times 10^{-9} \\ 3.726 \times 10^{-9} & 9.638 \times 10^{-6} & 7.757 \times 10^{-9} & 2.431 \times 10^{-4} & -6.742 \times 10^{-8} & -7.740 \times 10^{-7} \\ -1.132 \times 10^{-6} & -3.340 \times 10^{-9} & -2.357 \times 10^{-6} & -6.742 \times 10^{-8} & 2.049 \times 10^{-5} & -1.324 \times 10^{-8} \\ 7.320 \times 10^{-10} & 2.368 \times 10^{-6} & 1.524 \times 10^{-9} & -7.740 \times 10^{-7} & -1.324 \times 10^{-8} & 4.838 \times 10^{-5} \end{bmatrix}. \quad (3.28)$$

No que diz respeito à cinemática, é idêntica à apresentada no Capítulo 2, dada por

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{J}(\boldsymbol{\eta}) \boldsymbol{\nu}, \quad (3.29)$$

em que $\mathbf{J}(\boldsymbol{\eta})$ é definida conforme (2.9). Dessa forma, o modelo do NPS AUV II pode ser interpretado como uma realização concreta e numericamente expandida da estrutura dinâmica e cinemática genérica utilizada na fundamentação teórica. Em particular, as matrizes \mathbf{M} , $\mathbf{C}(\boldsymbol{\nu})$, $\mathbf{D}(\boldsymbol{\nu})$ e $\mathbf{g}(\boldsymbol{\eta})$ não são manipuladas simbolicamente, mas incorporadas diretamente em expressões escalares associadas a cada grau de liberdade. Com isso, o modelo configura-se como um caso particular da formulação clássica de Fossen apresentada em (2.1)–(2.2).

3.2 Síntese do CMDTD

Nesta seção descreve-se, de forma detalhada, a síntese de Controle por Modo Deslizante Terminal Discreto (CMDTD) aplicado ao modelo do NPS AUV II. Conforme estabelecido no Capítulo 3, o modelo dinâmico completo do veículo foi organizado na forma (3.4), com

o vetor de forças e momentos (3.5) e a cinemática (3.29). A síntese aqui apresentada deve ser entendida como uma estratégia de controle em malha fechada formulada diretamente em tempo discreto, isto é, definida nos instantes $t_k = kT_s$, enquanto a dinâmica não linear do veículo é integrada numericamente em tempo contínuo no ambiente de simulação. O controlador atua sobre um subconjunto (vertical) do modelo, associado ao rastreamento de profundidade e à regulação de arfagem, empregando exclusivamente os planos de popa δ_s como entrada de controle, o que explicita o caráter subatuado do problema no canal vertical.

3.2.1 Estados completos e extração do subsistema de mergulho via matriz de seleção

O modelo completo do NPS AUV II adota o vetor de estados $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{12}$ definido em (3.1), dado por

$$\mathbf{x} = \left[\boldsymbol{\nu}^\top \quad \boldsymbol{\eta}^\top \right]^\top, \quad \boldsymbol{\nu} = \left[u \ v \ w \ p \ q \ r \right]^\top, \quad \boldsymbol{\eta} = \left[x \ y \ z \ \phi \ \theta \ \psi \right]^\top, \quad (3.30)$$

em que $\boldsymbol{\nu}$ representa as velocidades lineares e angulares no referencial do corpo e $\boldsymbol{\eta}$ descreve a posição e a orientação do veículo no referencial inercial, conforme a cinemática apresentada em (3.29).

Para o projeto do controlador por modo deslizante terminal discreto, considera-se o *subsistema associado ao movimento de mergulho (diving motion)*, que concentra as dinâmicas relevantes para o controle de profundidade e arfagem. Esse subsistema é descrito pelo vetor de estados reduzido

$$\mathbf{x}_p = \begin{bmatrix} q \\ \theta \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad (3.31)$$

o qual preserva as variáveis diretamente associadas ao comportamento longitudinal do veículo no canal vertical.

A obtenção do vetor \mathbf{x}_p a partir do estado completo \mathbf{x} é formalizada por meio de uma

matriz de seleção $\mathbf{P}_p \in \mathbb{R}^{3 \times 12}$ tal que

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{P}_p \mathbf{x}. \quad (3.32)$$

Considerando a indexação $\mathbf{x} = [u v w p q r x y z \phi \theta \psi]^\top$, a matriz de seleção pode ser escrita, em termos da base canônica $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^{12}$ de \mathbb{R}^{12} , como

$$\mathbf{P}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_5^\top \\ \mathbf{e}_{11}^\top \\ \mathbf{e}_9^\top \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_i^\top \mathbf{x} = x_i, \quad (3.33)$$

ou, de forma explícita,

$$\mathbf{P}_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.34)$$

Denotando a dinâmica completa do veículo por $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, a dinâmica não linear do subsistema de mergulho é obtida pela projeção

$$\dot{\mathbf{x}}_p = \mathbf{P}_p \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{P}_p \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \triangleq \mathbf{f}_p(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (3.35)$$

na qual são selecionadas as componentes correspondentes a q , θ e z , preservando os acoplamentos hidrodinâmicos provenientes do modelo original. Ressalta-se que, nesse nível de modelagem, estão implicitamente incorporadas incertezas paramétricas e perturbações externas associadas à dinâmica hidrodinâmica do veículo.

3.2.2 Linearização do subsistema de mergulho em torno de um ponto de operação

A síntese do controlador digital não é realizada diretamente sobre a dinâmica não linear (3.35). Considera-se a linearização local do subsistema de mergulho em torno de um ponto de operação $(\mathbf{x}_{p,\text{op}}, u_{\text{op}})$, associado a um regime estacionário de mergulho.

Definindo as variações

$$\delta \mathbf{x}_p(t) = \mathbf{x}_p(t) - \mathbf{x}_{p,\text{op}}, \quad \delta u(t) = u(t) - u_{\text{op}}, \quad (3.36)$$

e admitindo que $\mathbf{f}_p(\cdot)$ é continuamente diferenciável em uma vizinhança do ponto de operação, aplica-se a expansão de Taylor de primeira ordem, resultando em

$$\mathbf{f}_p(\mathbf{x}_p, u) \approx \mathbf{f}_p(\mathbf{x}_{p,\text{op}}, u_{\text{op}}) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}_p}{\partial \mathbf{x}_p} \right|_{(\mathbf{x}_{p,\text{op}}, u_{\text{op}})} \delta \mathbf{x}_p + \left. \frac{\partial \mathbf{f}_p}{\partial u} \right|_{(\mathbf{x}_{p,\text{op}}, u_{\text{op}})} \delta u. \quad (3.37)$$

Quando o ponto de operação satisfaz as condições de equilíbrio do subsistema, tem-se $\mathbf{f}_p(\mathbf{x}_{p,\text{op}}, u_{\text{op}}) = \mathbf{0}$, obtendo-se o modelo linear contínuo local

$$\delta \dot{\mathbf{x}}_p(t) = \mathbf{A} \delta \mathbf{x}_p(t) + \mathbf{B} \delta u(t) + \mathbf{B} d(t), \quad (3.38)$$

em que $d(t)$ representa uma perturbação agregada no canal de controle, assumida casada, isto é, atuando no mesmo subespaço da entrada de controle.

As matrizes do modelo são dadas pelos Jacobianos

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}_p}{\partial \mathbf{x}_p} \right|_{(\mathbf{x}_{p,\text{op}}, u_{\text{op}})}, \quad \mathbf{B} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}_p}{\partial u} \right|_{(\mathbf{x}_{p,\text{op}}, u_{\text{op}})}. \quad (3.39)$$

No presente trabalho, adota-se para a síntese do controlador a forma linear contínua reduzida do movimento de mergulho expressa em (3.38), a qual explicita a presença de incertezas e perturbações casadas. Os coeficientes \mathbf{A} e \mathbf{B} são definidos para o ponto de operação considerado e utilizados posteriormente na formulação discreta do CMDTD.

Observa-se que o ponto de operação $(\mathbf{x}_{p,\text{op}}, u_{\text{op}})$ não é explicitado numericamente neste trabalho. Tal escolha é intencional. Na prática, o ponto de operação corresponde a um regime estacionário de mergulho, caracterizado por velocidade angular de arfagem nula e profundidade constante, sendo as variações em torno da referência incorporadas na definição do erro de rastreamento. Além disso, a natureza robusta do controlador por modo deslizante terminal discreto torna a síntese pouco sensível a pequenas variações no ponto de linearização, desde que as incertezas atuem de forma casada.

Além da equação de estado, define-se a saída do subsistema de mergulho como a

profundidade do veículo, isto é,

$$y(t) = z(t). \quad (3.40)$$

Na representação em espaço de estados, a equação de saída pode ser escrita como

$$y(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}_p(t), \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.41)$$

evidenciando que o objetivo de controle consiste no rastreamento da profundidade, enquanto as variáveis de arfagem e velocidade angular atuam como estados internos necessários à dinâmica do mergulho.

A partir das equações (3.38) e (3.41). Obtemos então o modelo reduzido e linearizado:

$$\begin{cases} \delta \dot{\mathbf{x}}_p(t) = \mathbf{A} \delta \mathbf{x}_p(t) + \mathbf{B} \delta u(t) + \mathbf{B} d(t), \\ \delta y(t) = \mathbf{C} \delta \mathbf{x}_p(t). \end{cases} \quad (3.42)$$

3.2.3 Discretização do modelo e definição do erro de rastreamento

A síntese do controlador por modo deslizante terminal adotada neste trabalho é realizada em tempo discreto, refletindo a implementação digital do sistema de controle. Dessa forma, o modelo linear contínuo reduzido do movimento de mergulho, obtido na Seção anterior, deve ser convertido para uma representação discreta compatível com a formulação do CMDTD.

Considerando um período de amostragem constante $T_s > 0$ e assumindo que a entrada de controle $\delta_s(t)$ permanece constante em cada intervalo de amostragem, adota-se uma discretização do tipo *zero-order hold* (ZOH). Assim, o modelo linear contínuo reduzido

$$\dot{\mathbf{x}}_p(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}_p(t) + \mathbf{B} \delta_s(t) + \mathbf{B} d(t), \quad (3.43)$$

em que $\mathbf{x}_p(t) = [q(t) \ \theta(t) \ z(t)]^\top$, é convertido para a forma discreta

$$\mathbf{x}_p[k+1] = \mathbf{A}_d \mathbf{x}_p[k] + \mathbf{B}_d \delta_s[k] + \mathbf{B}_d d[k], \quad (3.44)$$

em que $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ denota o instante discreto, e as matrizes discretas \mathbf{A}_d e \mathbf{B}_d são dadas por

$$\mathbf{A}_d = e^{\mathbf{A}T_s}, \quad \mathbf{B}_d = \int_0^{T_s} e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{B} d\tau. \quad (3.45)$$

O termo $d[k]$ representa uma perturbação agregada no canal de controle, englobando incertezas paramétricas, erros de linearização e perturbações externas casadas. Essa modelagem é particularmente adequada no contexto do controle por modo deslizante, uma vez que a lei de controle é projetada para garantir robustez frente a esse tipo de incerteza.

A saída do sistema discreto é definida a partir da profundidade do veículo, mantendo a mesma estrutura do modelo contínuo reduzido:

$$y[k] = \mathbf{C} \mathbf{x}_p[k], \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.46)$$

de modo que $y[k] = z[k]$.

Define-se, então, o erro de rastreamento de profundidade como

$$e[k] = y_d[k] - y[k] = z_d[k] - z[k], \quad (3.47)$$

em que $z_d[k]$ denota a referência discreta de profundidade. Esse erro constitui a variável fundamental utilizada na construção da superfície deslizante do CMDTD, enquanto as variáveis de arfagem q e θ atuam como estados internos responsáveis pela dinâmica do movimento de mergulho.

3.2.4 Construção da superfície deslizante e dinâmica discreta

A construção da superfície deslizante do Controlador por Modo Deslizante Terminal Discreto baseia-se diretamente no modelo linear discreto do subsistema de mergulho obtido em (3.44) e na definição do erro de rastreamento de profundidade apresentada em (3.47).

Seguindo a formulação clássica do controle por modo deslizante em tempo discreto, a superfície deslizante é escolhida como uma combinação linear do erro de rastreamento, dada por

$$S(k) = k_s e(k), \quad (3.48)$$

em que $k_s \in \mathbb{R}$ é um ganho escalar de projeto responsável por definir a dinâmica desejada do erro quando o sistema evolui sobre a superfície $S(k) = 0$.

A evolução da superfície deslizante em tempo discreto é imposta por meio de uma lei de alcance (*reaching law*) do tipo Gao, amplamente empregada em formulações discretas do controle por modo deslizante (Gao and Hung, 1993). Tal lei é definida por

$$S(k+1) = (1 - \alpha T_s) S(k) - \varepsilon T_s \operatorname{sgn}(S(k)), \quad (3.49)$$

em que T_s é o período de amostragem, $\alpha > 0$ e $\varepsilon > 0$ são parâmetros de projeto, e a condição

$$|1 - \alpha T_s| < 1 \quad (3.50)$$

assegura a estabilidade da dinâmica da superfície em tempo discreto.

A partir do modelo discreto do subsistema de mergulho (3.44), a dinâmica da superfície pode ser escrita de forma explícita como

$$\begin{aligned} S(k+1) &= k_s (y_d(k+1) - y(k+1)) \\ &= k_s (y_d(k+1) - \mathbf{C} \mathbf{x}_p(k+1)), \end{aligned} \quad (3.51)$$

com $\mathbf{x}_p(k+1)$ dado por (3.44). Substituindo-se o modelo de estado discreto, obtém-se

$$S(k+1) = k_s \left(y_d(k+1) - \mathbf{C} \mathbf{A}_d \mathbf{x}_p(k) - \mathbf{C} \mathbf{B}_d \delta_s(k) - \mathbf{C} \mathbf{B}_d d(k) \right). \quad (3.52)$$

O termo $\mathbf{C} \mathbf{B}_d d(k)$ representa a projeção da perturbação agregada no espaço da superfície deslizante. Assume-se que $d(k)$ é uma perturbação casada, limitada por $|d(k)| \leq \delta_0$, podendo ser decomposta como $d(k) = f_0 + \Delta d(k)$, onde f_0 representa o valor médio da perturbação e $\Delta d(k)$ uma componente incerta limitada. O efeito dessa perturbação projetado na superfície é majorado por um termo descontínuo, o qual será compensado na lei de controle.

A condição de deslizamento é imposta fazendo-se

$$S(k+1) = 0, \quad (3.53)$$

o que, ao combinar (3.52) com a lei de alcance (3.49) e assumindo a condição de compa-

tibilidade (*matching condition*), permite obter explicitamente a lei de controle discreta.

Assim, a lei de controle por modo deslizante discreto é dada por

$$\begin{aligned} \delta_s(k) = & -(k_s \mathbf{C} \mathbf{B}_d)^{-1} \left(k_s y_d(k+1) - k_s \mathbf{C} \mathbf{A}_d \mathbf{x}_p(k) \right. \\ & + (1 - \alpha T_s) S(k) - \varepsilon T_s \operatorname{sgn}(S(k)) \\ & \left. + f_0 + \delta_0 \operatorname{sgn}(S(k)) \right). \end{aligned} \quad (3.54)$$

Essa lei de controle assegura a alcançabilidade da superfície deslizante em tempo finito e a robustez do sistema frente a incertezas casadas, mantendo o rastreamento da profundidade mesmo na presença de perturbações e erros de modelagem.

3.2.5 Construção do termo terminal e síntese do Controle por Modo Deslizante Terminal Discreto

Com o objetivo de acelerar a convergência do erro de rastreamento de profundidade, introduz-se uma superfície de deslizamento terminal em tempo discreto, conforme a formulação clássica do Controle por Modo Deslizante Terminal Discreto (CMDTD). Diferentemente da superfície linear definida anteriormente, a superfície terminal incorpora um termo não linear com expoente fracionário, garantindo convergência em tempo finito do erro, conforme discutido na fundamentação teórica apresentada no Capítulo 2.

A superfície deslizante terminal discreta é definida como

$$S_T(k) = \sum_{i=0}^{n_c} c_i e(k-i) + \beta |e(k)|^{\frac{q_c}{p_c}} \operatorname{sgn}(e(k)), \quad (3.55)$$

em que $\mathbf{C}_{T_s} = \{c_0, c_1, \dots, c_{n_c}\} \in \mathbb{R}^{n_c+1}$ é o vetor de coeficientes da superfície terminal discreta, $e(k)$ é o erro de rastreamento de profundidade definido na Equação (3.47), $\beta > 0$ é um parâmetro de ponderação do termo não linear, e $p_c, q_c \in \mathbb{N}$ são inteiros ímpares positivos tais que

$$p_c > q_c, \quad 0 < \frac{q_c}{p_c} < 1. \quad (3.56)$$

O parâmetro $n_c \in \mathbb{N}$ denota a ordem da superfície deslizante terminal discreta e constitui um parâmetro de projeto, estando associado à construção da superfície sobre um vetor de erro aumentado no domínio discreto, que incorpora amostras passadas do erro de rastreamento. No presente trabalho, adota-se $n_c = 3$, resultando em quatro

coeficientes c_0, c_1, c_2, c_3 , em concordância com a formulação utilizada na implementação computacional.

Essa escolha assegura que a superfície $S_T(k) = 0$ imponha uma dinâmica não linear do erro capaz de garantir convergência em tempo finito, em contraste com a convergência assintótica típica das superfícies lineares.

Substituindo-se o modelo discreto do subsistema de mergulho (3.44) e a definição do erro de rastreamento na expressão (3.55), obtém-se a dinâmica discreta da superfície terminal:

$$S_T(k+1) = \sum_{i=0}^{n_c} c_i \left(y_d(k+1-i) - \mathbf{C}\mathbf{A}_d \mathbf{x}_p(k-i) - \mathbf{C}\mathbf{B}_d \delta_s(k-i) - \mathbf{C}\mathbf{B}_d d(k-i) \right) + \beta |e(k+1)|^{\frac{q_c}{p_c}} \operatorname{sgn}(e(k+1)). \quad (3.57)$$

De forma análoga à componente linear, a evolução da superfície terminal é imposta por uma lei de alcance discreta do tipo Gao, aplicada agora à superfície $S_T(k)$:

$$S_T(k+1) = (1 - \alpha T_s) S_T(k) - \varepsilon T_s \operatorname{sgn}(S_T(k)), \quad (3.58)$$

em que $\alpha > 0$, $\varepsilon > 0$ e T_s é o período de amostragem, com a condição $|1 - \alpha T_s| < 1$ garantindo a estabilidade da dinâmica discreta da superfície.

Assumindo que a perturbação agregada $d(k)$ é casada e limitada por $|d(k)| \leq \delta_0$, pode-se decompô-la como

$$d(k) = f_0 + \Delta d(k), \quad |\Delta d(k)| \leq \delta_0, \quad (3.59)$$

sendo f_0 o valor médio da perturbação.

Impondo-se a condição de deslizamento

$$S_T(k+1) = 0 \quad (3.60)$$

e combinando (3.57) com a lei de alcance (3.58), obtém-se a lei de controle por Modo Deslizante Terminal Discreto:

$$\delta_s(k) = - \left(\mathbf{C}_{T_s} \mathbf{C} \mathbf{B}_d \right)^{-1} \left(\Phi_T(k) + \delta_0 \operatorname{sgn}(S_T(k)) \right), \quad (3.61)$$

onde

$$\begin{aligned} \Phi_T(k) = & \sum_{i=0}^{n_c} c_i \left(y_d(k+1-i) - \mathbf{C} \mathbf{A}_d \mathbf{x}_p(k-i) \right) + \beta |e(k+1)|^{\frac{q_c}{p_c}} \operatorname{sgn}(e(k+1)) \\ & - (1 - \alpha T_s) S_T(k) + \varepsilon T_s \operatorname{sgn}(S_T(k)) + f_0. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Capítulo 4

Análise da Dinâmica do Modelo com CMDTD

Este capítulo apresenta a avaliação do desempenho do Controlador por Modo Deslizante Terminal Discreto (CMDTD) por meio de ensaios de simulação numérica. A análise concentra-se em um conjunto reduzido de testes considerados representativos, nos quais são investigados os efeitos da variação dos principais parâmetros do controlador disponibilizados ao usuário na interface de execução do simulador. O objetivo é demonstrar tanto a eficácia do controlador quanto suas principais limitações práticas.

4.1 Configuração Geral das Simulações

Todas as simulações foram realizadas com base no modelo discreto do subsistema de mergulho descrito no Capítulo 3. Os parâmetros da planta foram mantidos constantes, enquanto os parâmetros do controlador foram ajustados via *console*, partindo-se dos valores padrão definidos no projeto. Salvo indicação em contrário, o período de amostragem foi mantido em $T_s = 0,2$ s e o tempo total de simulação em 300 s.

4.2 Desempenho Nominal do Controlador

Este ensaio estabelece o comportamento de referência do CMDTD, servindo como base comparativa para os demais testes. Os parâmetros do controlador adotados neste ensaio correspondem aos valores padrão definidos no projeto, conforme apresentado na Tabela 4.1. Considera-se, neste cenário, a operação nominal do subsistema de mergulho, sem alterações adicionais nos parâmetros da planta além das hipóteses já incorporadas ao modelo de simulação.

Tabela 4.1: Parâmetros do controlador — Ensaio nominal

Parâmetro	Valor
z_{ref} [m]	8.0
ε	1.6×10^{-3}
αT_s	0.15
β	3.0
q_c / p_c	13 / 15
c_0	0.257
c_1	120
c_2	134
c_3	-1.2×10^{-3}
$ \delta_s _{\text{max}}$ [deg]	20
δ_0	0.15

Rastreamento e Resposta Dinâmica

A Fig. 4.1(a) apresenta o comportamento temporal da profundidade $z(t)$ em comparação com a referência constante $z_{\text{ref}} = 8$ m. Observa-se que o CMDTD conduz o sistema à profundidade desejada de forma bem amortecida, sem sobressinal significativo e com erro em regime permanente praticamente nulo, caracterizando um rastreamento estável sob as condições nominais.

A Fig. 4.1(b) mostra a evolução do ângulo de arfagem $\theta(t)$. Nota-se um transitório inicial associado à manobra de descida, seguido de retorno gradual ao equilíbrio em torno da referência $\theta = 0^\circ$, sem oscilações persistentes. Esse comportamento indica que a arfagem é utilizada como variável auxiliar para viabilizar o mergulho e o rastreamento de profundidade, mantendo-se a estabilidade do movimento angular ao longo do ensaio.

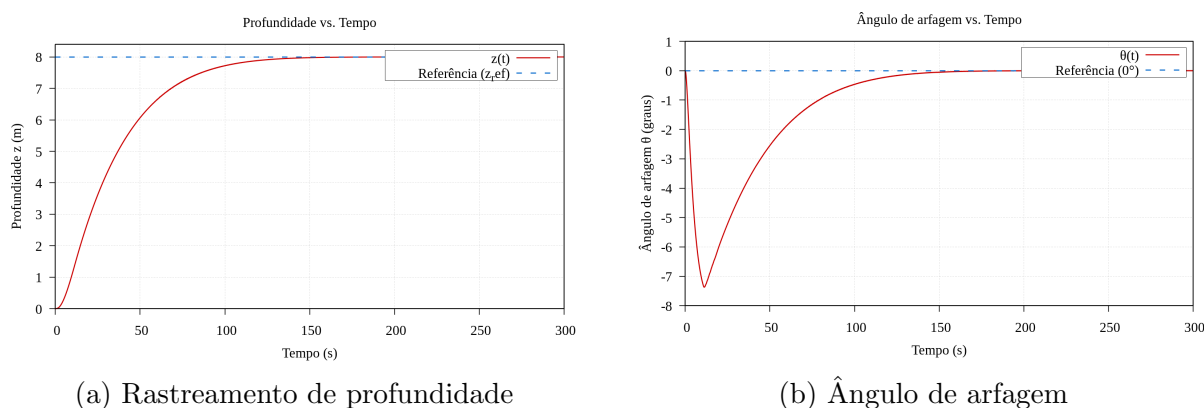


Figura 4.1: Resposta dinâmica do sistema no ensaio nominal.

De forma geral, o ensaio nominal confirma o funcionamento esperado no cenário de referência, estabelecendo uma linha de base para os ensaios subsequentes, nos quais serão investigados os efeitos da variação dos parâmetros do controlador e as limitações práticas associadas à saturação e à compensação de perturbações.

4.3 Influência da Lei de Alcance Discreta

Avalia-se neste ensaio o impacto da variação dos parâmetros da lei de alcance discreta, mantendo-se inalterados os demais parâmetros do controlador. Em razão das limitações do ambiente de simulação — que não permite a medição precisa do tempo de alcance da superfície quase-deslizante nem a ampliação adequada da dinâmica das superfícies — a análise concentra-se exclusivamente no comportamento do sinal de controle, em particular na densidade de comutação (*chattering*) observada durante o regime transitório.

Tabela 4.2: Parâmetros do controlador — Variação da lei de alcance

Parâmetro	Caso A	Caso B
ε	8.0×10^{-4}	3.0×10^{-3}
αT_s	0.10	0.25
Demais parâmetros	iguais ao Ensaio Nominal	

Caso A — Lei de alcance agressiva

No Caso A, a escolha de um valor reduzido de ε associada a um ganho efetivo menor αT_s resulta em uma lei de alcance mais agressiva. O efeito dessa configuração manifesta-se de forma clara no sinal de controle $\delta_s(k)$, conforme ilustrado na Fig. 4.2.

Observa-se uma elevada densidade de comutação durante o regime transitório (aproximadamente entre $t = 10s$ e $t = 20s$), com rápidas alternâncias do sinal de controle antes da estabilização do sistema. Esse comportamento caracteriza um nível acentuado de *chattering*, decorrente da ação corretiva intensa imposta pela lei de alcance, o que pode ser indesejável do ponto de vista da integridade e eficiência do atuador.

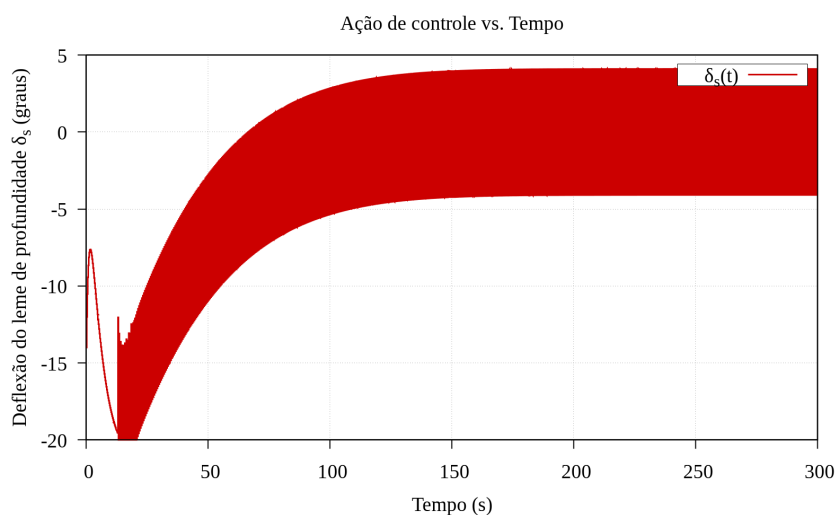


Figura 4.2: Ação de controle $\delta_s(k)$ associada à lei de alcance — Caso A.

Caso B — Lei de alcance suavizada

No Caso B, utiliza-se um valor mais elevado de ε em conjunto com um ganho efetivo maior αT_s , resultando em uma lei de alcance menos agressiva. A Fig. 4.3 apresenta o comportamento correspondente do sinal de controle.

Comparativamente ao mesmo intervalo de tempo do Caso A (entre 10 s e 20 s), nota-se uma redução visível na densidade de comutação do sinal $\delta_s(k)$ durante o regime transitório. Embora o *chattering* não seja completamente eliminado, sua intensidade é significativamente atenuada, indicando uma atuação mais suave do controlador e menor solicitação do atuador antes da estabilização do sistema.

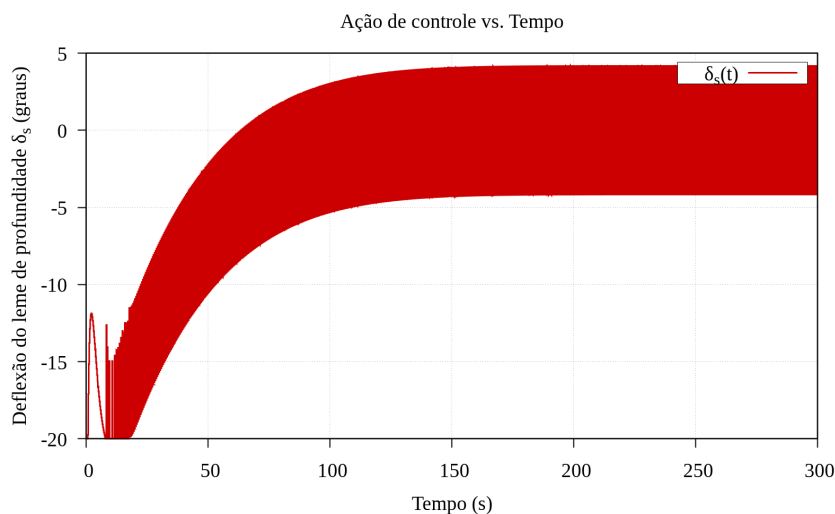


Figura 4.3: Ação de controle $\delta_s(k)$ associada à lei de alcance — Caso B.

De forma comparativa, os resultados evidenciam que a variação dos parâmetros da lei de alcance afeta primordialmente a densidade de *chattering* observada na ação de controle durante o regime transitório. Leis de alcance mais agressivas tendem a induzir maior comutação do sinal de controle, enquanto configurações mais suaves reduzem esse efeito, destacando um compromisso prático relevante no projeto do controlador.

4.4 Influência do Termo Terminal Não Linear

Neste ensaio investiga-se o impacto do termo terminal não linear na dinâmica do Controlador por Modo Quase-Deslizante Terminal, em particular no comportamento de convergência da superfície quase-deslizante, do erro de profundidade e nas variáveis dinâmicas associadas ao movimento de mergulho. A análise concentra-se na variação dos parâmetros β e da razão racional q_c/p_c , responsáveis por moldar a dinâmica de convergência em tempo finito na vizinhança da origem.

Tabela 4.3: Parâmetros do controlador — Influência do termo terminal não linear

Parâmetro	Caso A	Caso B
β	2.0	5.0
q_c / p_c	11 / 15	13 / 17
Demais parâmetros	iguais ao Ensaio Nominal	

Caso A — Termo terminal moderado

No Caso A, adota-se um valor moderado do parâmetro β e uma razão q_c/p_c menos agressiva. Essa configuração resulta em uma atuação mais suave do termo terminal não linear, priorizando estabilidade dinâmica e menor excitação do atuador durante o regime transitório.

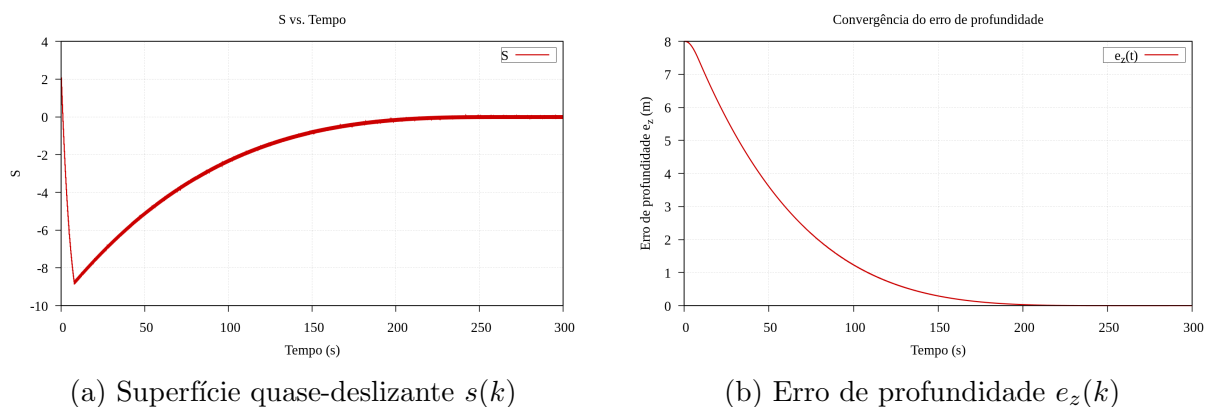


Figura 4.4: Convergência da superfície quase-deslizante e do erro de profundidade — Caso A.

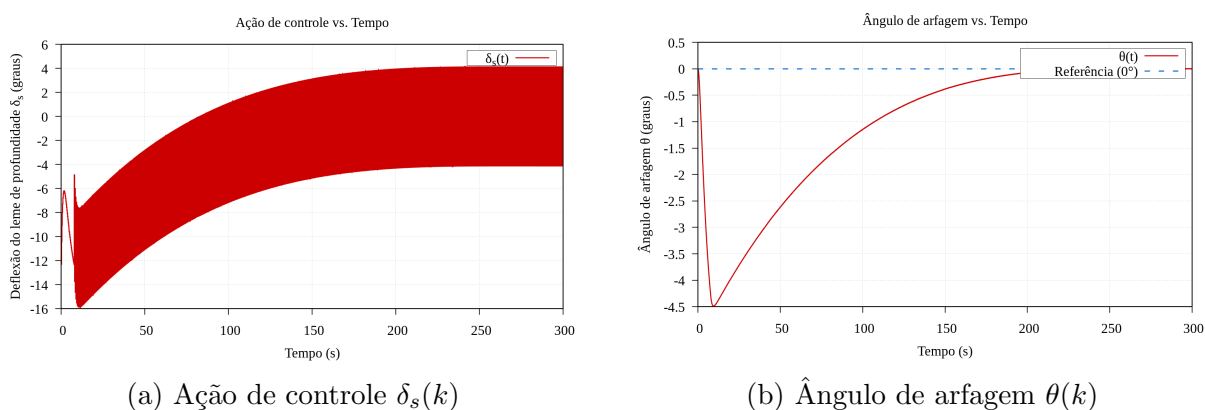


Figura 4.5: Resposta de controle e dinâmica angular — Caso A.

Observa-se que a convergência da superfície quase-deslizante ocorre de forma progressiva, com comportamento bem amortecido do erro de profundidade e esforço de controle compatível com os limites físicos do atuador. A dinâmica de arfagem permanece estável, sem oscilações excessivas, indicando uma atuação equilibrada do termo terminal não linear.

Caso B — Termo terminal intensificado

No Caso B, utiliza-se um valor mais elevado de β e uma razão q_c/p_c mais agressiva, intensificando a ação do termo terminal não linear na vizinhança da origem. Essa configuração busca acelerar a convergência em tempo finito, ao custo de maior rigidez dinâmica.

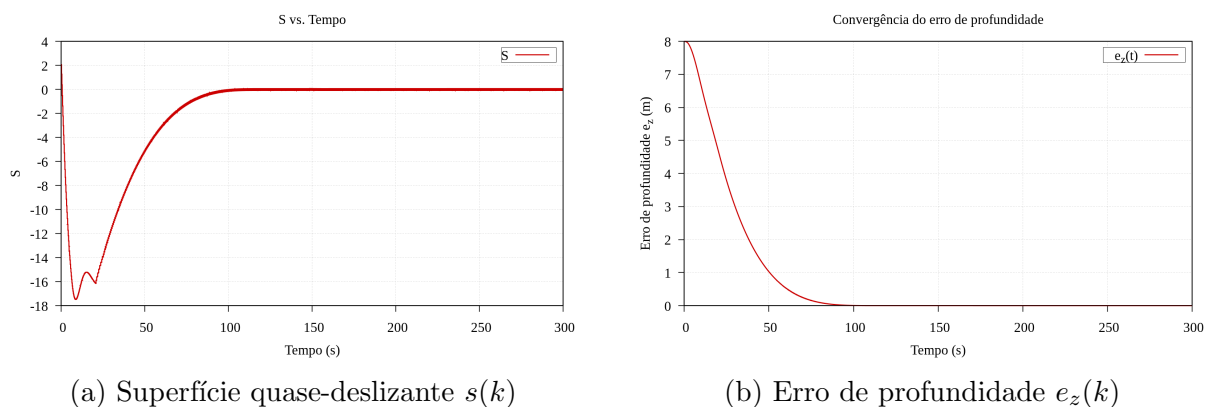


Figura 4.6: Convergência da superfície quase-deslizante e do erro de profundidade — Caso B.

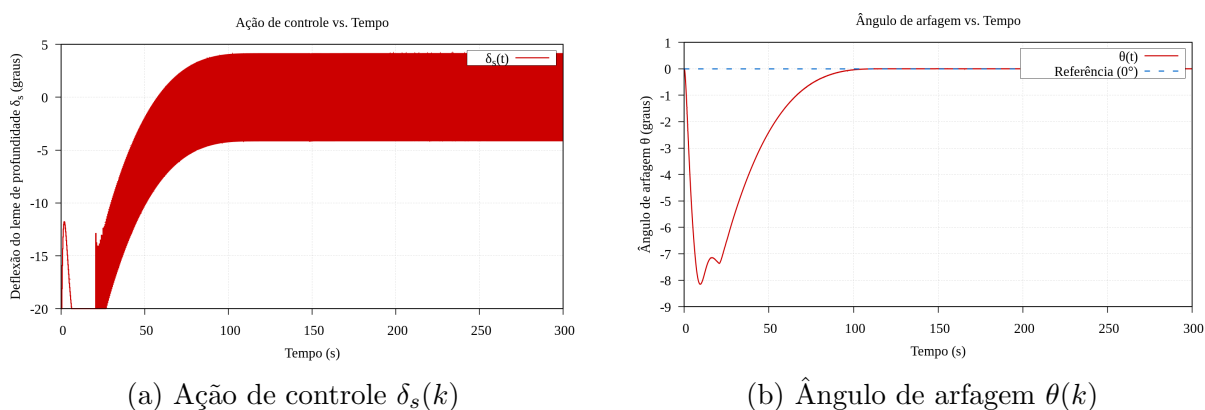


Figura 4.7: Resposta de controle e dinâmica angular — Caso B.

Nota-se que a convergência da superfície quase-deslizante e do erro de profundidade ocorre de forma mais acelerada na fase final do transitório, evidenciando a atuação dominante do termo terminal não linear na vizinhança da origem. Todavia, essa aceleração é acompanhada por um aumento significativo do esforço de controle e por excitações transitórias na dinâmica de arfagem, as quais resultam em uma degradação momentânea da ação de controle, observada aproximadamente no intervalo temporal entre $t = 10s$ e $t = 20s$. Esse comportamento reflete o acréscimo de rigidez dinâmica introduzido pelo

ganho terminal elevado, decorrente da interação entre a dinâmica de alcance da superfície quase-deslizante e a imposição da convergência em tempo finito da superfície terminal.

Análise Comparativa

A comparação entre os Casos A e B evidencia o papel fundamental do termo terminal não linear na modelagem da convergência em tempo finito do CMDTD. Valores mais elevados de β e da razão q_c/p_c aceleram a convergência na vizinhança da origem, porém aumentam o esforço de controle e a excitação dinâmica do sistema. Esses resultados reforçam a necessidade de uma escolha criteriosa dos parâmetros terminais, de modo a equilibrar desempenho dinâmico e viabilidade prática do atuador em aplicações reais.

4.5 Limitações Práticas: Saturação e Perturbações

Neste ensaio analisam-se de forma sistemática as principais limitações práticas do CMDTD, considerando explicitamente restrições físicas do atuador e o aumento do nível de perturbação externa. O objetivo é avaliar como a saturação da ação de controle e a intensificação das perturbações afetam o desempenho de rastreamento de profundidade, a dinâmica de arfagem, o comportamento das superfícies quase-deslizantes e a robustez global do controlador em cenários mais realistas de operação.

Tabela 4.4: Parâmetros do controlador — Saturação e perturbações

Parâmetro	Caso A	Caso B
$ \delta_s _{\max}$ [deg]	15	10
δ_0	0.20	0.30
Demais parâmetros	iguais ao Ensaio Nominal	

Caso A — Saturação moderada e perturbações reduzidas

O Caso A considera um limite de saturação menos restritivo para o atuador e um nível moderado de perturbação externa, permitindo avaliar o desempenho do controlador em condições próximas às ideais de operação, ainda que sujeitas a restrições físicas realistas.

A Fig. 4.8 apresenta o rastreamento de profundidade e a dinâmica de arfagem. Observa-se que a profundidade $z(t)$ converge de forma suave à referência z_{ref} , sem erro estacionário relevante, enquanto o ângulo de arfagem $\theta(t)$ exibe um transitório inicial pronunciado, porém bem amortecido, retornando gradualmente ao equilíbrio em torno de $\theta = 0^\circ$.

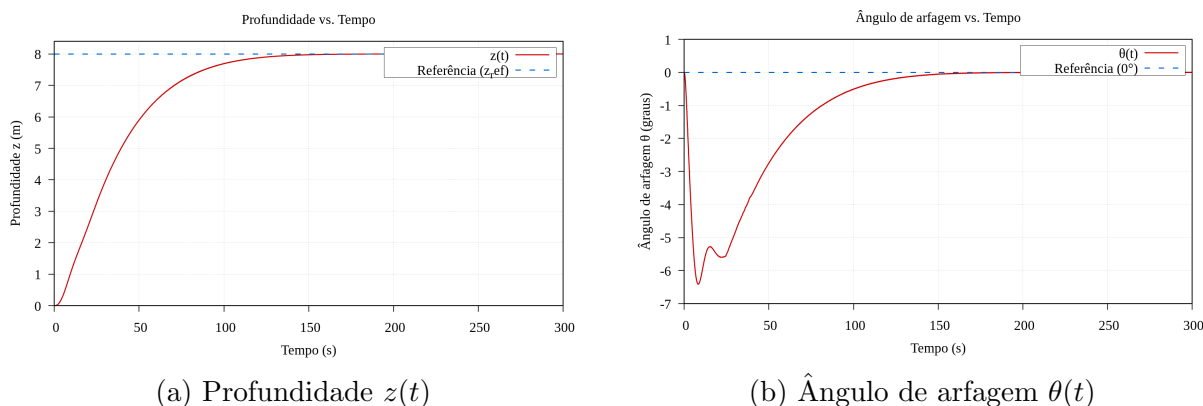


Figura 4.8: Rastreamento de profundidade e dinâmica de arfagem — Caso A.

A Fig. 4.9 evidencia o efeito da saturação moderada sobre a ação de controle. O sinal $\delta_s(k)$ apresenta regiões de comutação intensa durante o transitório inicial, caracterizando a presença de chattering, ainda que confinado aos limites físicos do atuador.

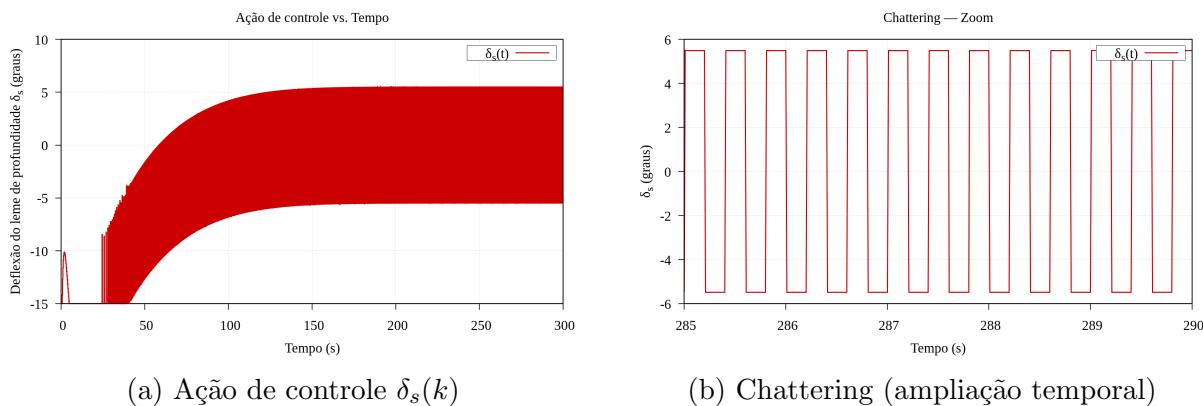


Figura 4.9: Esforço de controle e efeito de saturação — Caso A.

A convergência do erro de profundidade e da superfície quase-deslizante é apresentada na Fig. 4.10. Nota-se que o erro $e_z(t)$ converge de forma monotônica, acompanhando a aproximação da superfície quase-deslizante $s(k)$ ao seu valor de equilíbrio.

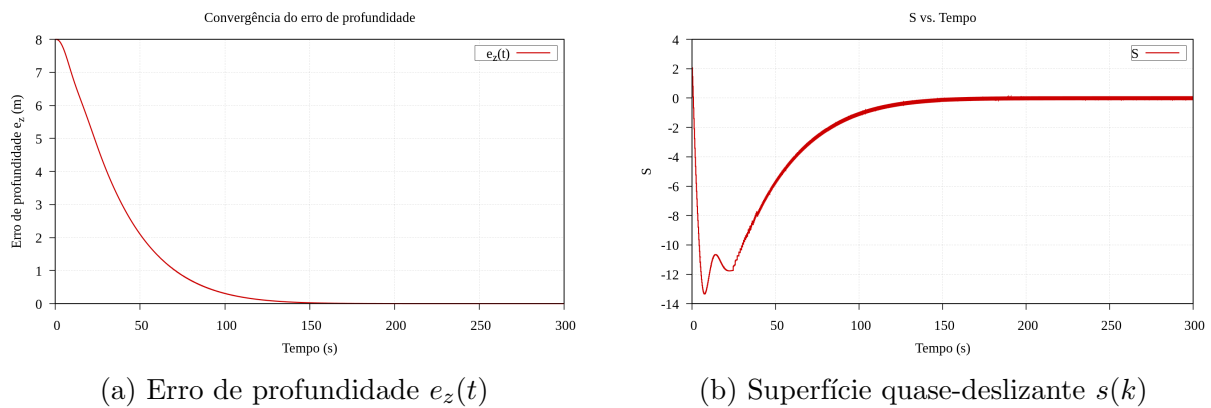


Figura 4.10: Erro de rastreamento e superfície quase-deslizante — Caso A.

Por fim, a Fig. 4.11 confirma a convergência acelerada da superfície terminal $s_T(k)$, característica do termo terminal não linear, sem induzir instabilidades significativas neste cenário.

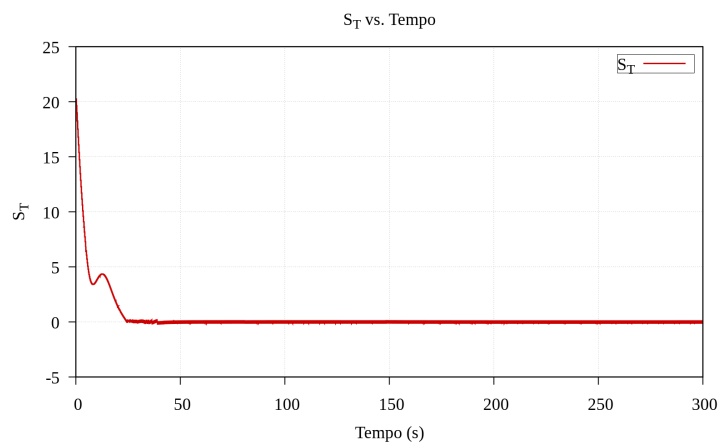


Figura 4.11: Superfície quase-deslizante terminal $s_T(k)$ — Caso A.

Caso B — Saturação severa e perturbações intensificadas

O Caso B impõe um limite de saturação mais restritivo ao atuador e um nível mais elevado de perturbação externa, caracterizando um cenário adverso do ponto de vista prático.

A Fig. 4.12 mostra que o rastreamento de profundidade ainda é alcançado, porém com maior degradação transitória. A resposta de $z(t)$ apresenta maior lentidão inicial, enquanto a dinâmica de arfagem exhibe oscilações mais acentuadas, refletindo a limitação imposta pela saturação severa.

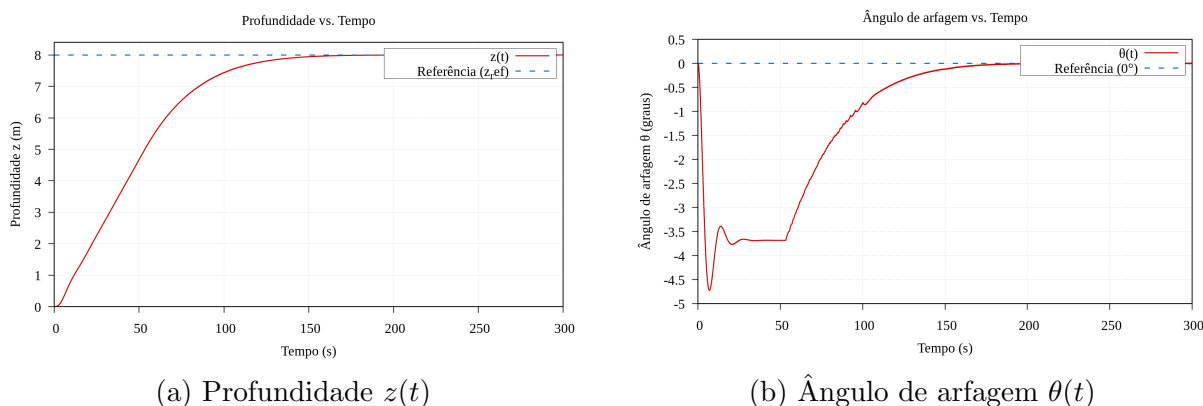


Figura 4.12: Rastreamento de profundidade e dinâmica de arfagem — Caso B.

A Fig. 4.13 evidencia regiões prolongadas de saturação e comutação intensa na ação de controle, com chattering mais pronunciado e persistente quando comparado ao Caso A.

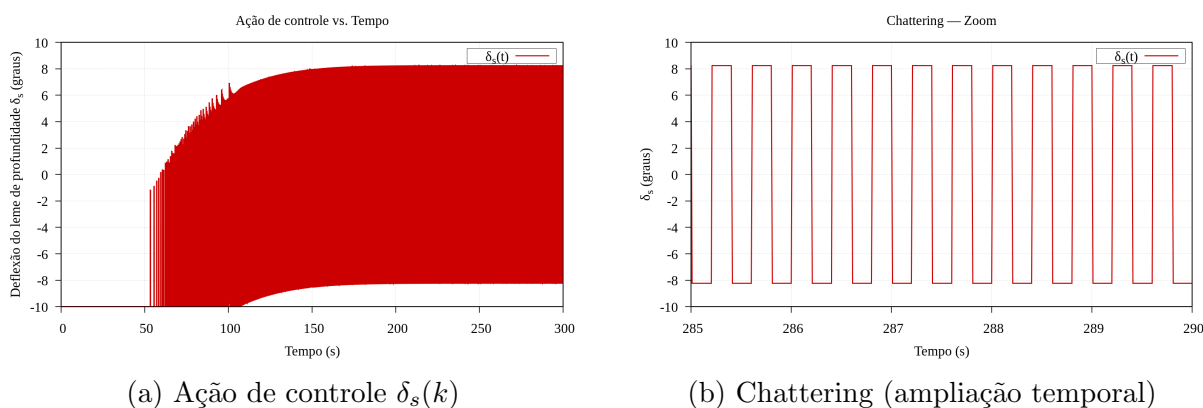


Figura 4.13: Esforço de controle e efeito de saturação — Caso B.

A convergência do erro de profundidade e da superfície quase-deslizante ocorre de forma mais lenta e irregular, conforme mostrado na Fig. 4.14, embora a superfície terminal $s_T(k)$, apresentada na Fig. 4.15, garanta a convergência em tempo finito, mesmo sob condições adversas.

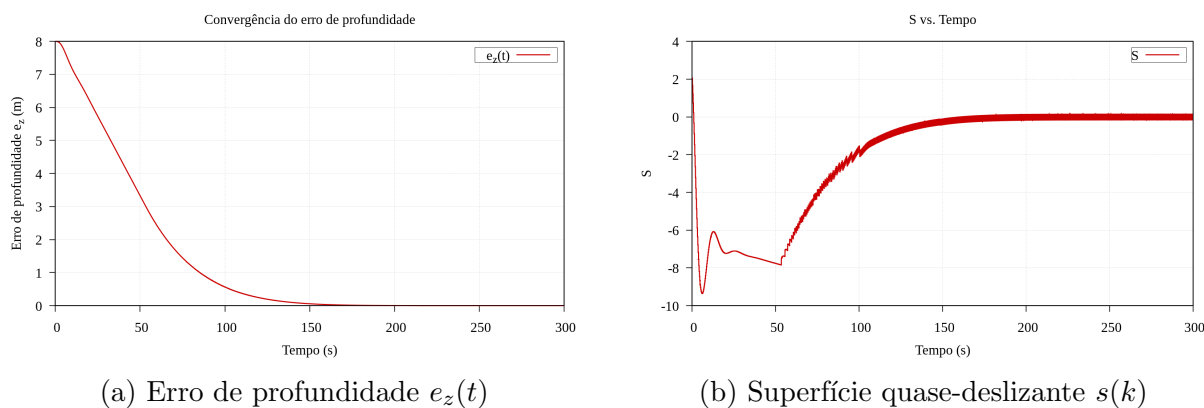


Figura 4.14: Erro de rastreamento e superfície quase-deslizante — Caso B.

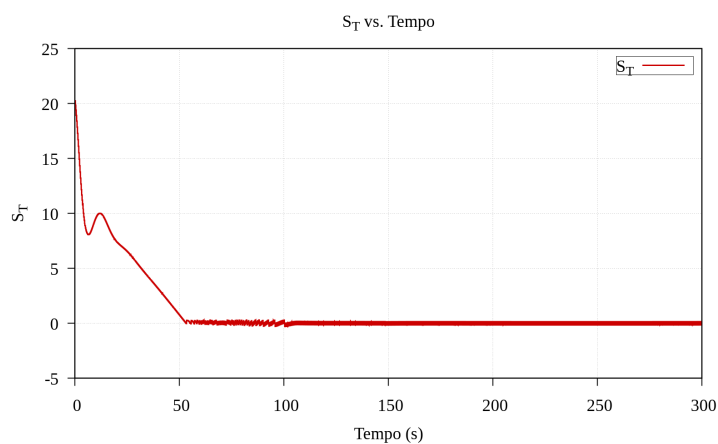


Figura 4.15: Superfície quase-deslizante terminal $s_T(k)$ — Caso B.

Discussão Comparativa

A comparação entre os Casos A e B evidencia de forma clara os limites práticos de atuação do CMDTD. Enquanto o Caso A apresenta desempenho robusto sob saturação moderada, o Caso B revela que restrições mais severas e perturbações intensificadas amplificam significativamente o chattering, aumentam o esforço de controle e degradam o comportamento transitório do sistema.

Esses resultados reforçam que, embora o termo terminal não linear assegure convergência acelerada, a presença de saturação e perturbações impõe um compromisso inevitável entre desempenho teórico e viabilidade prática, ressaltando a importância de uma escolha criteriosa dos limites de atuação e dos parâmetros do controlador em aplicações reais.

4.6 Síntese dos Resultados

Os ensaios de simulação apresentados neste capítulo permitiram avaliar de forma sistemática o desempenho e as limitações práticas do Controlador por Modo Deslizante Terminal Discreto (CMDTD) aplicado ao subsistema de mergulho do VAS, considerando diferentes regimes de parametrização e condições operacionais.

No ensaio nominal, verificou-se que o controlador é capaz de garantir rastreamento estável da profundidade de referência, com erro em regime permanente praticamente nulo e dinâmica de arfagem bem amortecida, estabelecendo uma linha de base sólida para comparação. Esse resultado confirma a consistência do modelo discreto adotado e a adequação da estrutura do controlador sob condições ideais.

A análise da influência da lei de alcance discreta evidenciou que a principal consequência da variação dos parâmetros ε e αT_s manifesta-se na densidade de comutação do sinal de controle durante o regime transitório. Configurações mais agressivas resultaram em maior intensidade de *chattering*, enquanto leis de alcance suavizadas reduziram a atividade do atuador, sem comprometer qualitativamente a convergência do sistema. Esse ensaio ressaltou o compromisso prático entre rapidez de correção e esforço de controle.

No ensaio dedicado ao termo terminal não linear, observou-se que o aumento dos parâmetros β e da razão q_c/p_c intensifica a convergência em tempo finito na vizinhança da origem, acelerando a fase final de redução do erro de profundidade e da superfície quase-deslizante. Contudo, essa aceleração veio acompanhada de maior rigidez dinâmica, aumento do esforço de controle e excitações transitórias mais pronunciadas, particularmente na dinâmica de arfagem, indicando uma interação não trivial entre a lei de alcance e o termo terminal.

Por fim, o ensaio de saturação e perturbações explicitou as limitações práticas do CMDTD. Sob saturação moderada, o controlador manteve desempenho robusto, com rastreamento adequado e convergência das superfícies quase-deslizantes. Entretanto, em cenários de saturação severa e perturbações intensificadas, observou-se degradação significativa do comportamento transitório, aumento persistente do *chattering* e maior solicitação do atuador, ainda que a convergência em tempo finito fosse preservada pela superfície terminal.

De forma geral, os resultados obtidos demonstram que o CMDTD apresenta elevada

capacidade de rastreamento e robustez estrutural, porém seu desempenho prático depende fortemente de uma escolha criteriosa dos parâmetros de alcance, dos ganhos terminais e dos limites físicos do atuador. Esses ensaios reforçam a necessidade de um balanceamento cuidadoso entre desempenho teórico e viabilidade física em aplicações reais de veículos subaquáticos.

Capítulo 5

Considerações Finais

Esta monografia teve como objetivo central o desenvolvimento, a implementação e a avaliação de um Controlador por Modo Deslizante Terminal Discreto (CMDTD) aplicado ao controle de profundidade do NPS AUV II, assegurando coerência entre a fundamentação teórica, a modelagem matemática da planta e os ensaios numéricos conduzidos. Ao longo do trabalho, buscou-se construir uma linha lógica contínua que partisse da descrição física e dinâmica do veículo, avançasse pela consolidação dos conceitos de controle robusto e estabilidade, e culminasse na síntese e análise crítica do controlador proposto em ambiente discreto.

Inicialmente, foram estabelecidos o contexto do problema e as motivações para a adoção de técnicas de controle não linear robusto, evidenciando as limitações de abordagens lineares clássicas quando aplicadas a veículos subaquáticos sujeitos a incertezas hidrodinâmicas, acoplamentos dinâmicos e perturbações ambientais. Em seguida, a fundamentação teórica apresentou, de forma sistemática, os princípios do Controle por Modo Deslizante e sua extensão terminal, com ênfase nos critérios de estabilidade no sentido de Lyapunov, na propriedade de alcançabilidade e na robustez frente a incertezas casadas. Essa base teórica foi essencial para justificar a escolha da estrutura de controle adotada e para orientar a formulação do termo terminal não linear, responsável por impor convergência em tempo finito sobre o erro de rastreamento.

A etapa de modelagem desempenhou papel fundamental na conexão entre teoria e implementação. A dinâmica completa do NPS AUV II foi organizada de modo a evidenciar a natureza subatuada do sistema e os acoplamentos presentes entre os graus de liberdade. A partir desse modelo, foi realizada a extração do subsistema de mergulho por meio de uma matriz de seleção, permitindo concentrar a síntese do controlador nas variáveis diretamente relacionadas à profundidade. A linearização em torno de um ponto de operação fisicamente consistente possibilitou a obtenção de um modelo adequado para

a construção do termo equivalente do controle, sem perder de vista as limitações inerentes a essa aproximação local. A discretização do modelo e da lei de controle foi conduzida de forma compatível com a execução digital do comando, preservando a interpretação física e a coerência com a dinâmica contínua da planta.

Os resultados obtidos em simulação demonstraram que a inclusão do termo terminal não linear na superfície deslizante altera significativamente a dinâmica do erro, proporcionando redução do tempo de acomodação e comportamento mais agressivo quando o erro é elevado, sem comprometer a estabilidade em regime permanente. Observou-se, contudo, que o desempenho do CMDTD depende de forma sensível da escolha dos ganhos e da lei de alcance discreta, evidenciando o compromisso inerente entre rapidez de convergência, suavidade do sinal de controle e respeito às limitações físicas dos atuadores. Em particular, a presença de saturação mostrou-se um fator crítico, pois pode comprometer a alcançabilidade da superfície deslizante e intensificar fenômenos associados ao *chattering*, reforçando a necessidade de um projeto cuidadoso da lei de controle no domínio discreto.

Embora os resultados numéricos indiquem que o CMDTD constitui uma alternativa promissora para o controle de profundidade de veículos subaquáticos, as conclusões deste trabalho devem ser interpretadas à luz de suas limitações. Os ensaios foram realizados em ambiente de simulação, com integração contínua da dinâmica e atualização discreta do comando, não contemplando explicitamente efeitos como atrasos de comunicação, quantização, ruído de sensores, dinâmica completa dos atuadores e processos de estimação de estados. Além disso, a síntese do termo equivalente baseada em um modelo linearizado restringe a validade estrita das garantias de desempenho ao entorno do ponto de operação considerado, ainda que a robustez típica do modo deslizante amplie essa região de operação na prática.

Nesse sentido, este trabalho abre diversas possibilidades de continuidade e aprofundamento. A implementação embarcada do controlador, com validação experimental em hardware real, surge como um passo natural para avaliar o impacto de efeitos não idealizados e para estabelecer critérios práticos de projeto do período de amostragem e dos ganhos do controlador. Adicionalmente, a investigação de estratégias sistemáticas de mitigação de *chattering* no domínio discreto, bem como a incorporação explícita de restrições de saturação e taxa de variação dos atuadores, constitui uma linha de pesquisa relevante tanto do ponto de vista teórico quanto aplicado. A integração do CMDTD

com técnicas de estimação de estados e perturbações, assim como sua extensão para um controle multivariável que trate simultaneamente profundidade, arfagem e velocidade de avanço, representa outro caminho promissor, especialmente diante dos fortes acoplamentos hidrodinâmicos presentes em veículos subaquáticos reais. Por fim, a análise formal de robustez frente a incertezas não casadas e dinâmicas não modeladas permanece como um problema em aberto, com potencial para contribuições científicas significativas no contexto do controle robusto discreto.

Em síntese, esta monografia demonstrou que o Controle por Modo Quase-Deslizante Terminal, quando adequadamente formulado e implementado, apresenta elevado potencial para aplicações em controle de profundidade de veículos subaquáticos, combinando robustez e convergência acelerada. Ao mesmo tempo, evidenciou-se que a efetividade dessa abordagem depende fortemente da consideração explícita das limitações práticas impostas pela implementação digital e pela física do sistema. Assim, os resultados aqui apresentados não apenas consolidam a viabilidade do CMDTD no contexto estudado, como também estabelecem uma base sólida para investigações futuras que visem elevar o nível de maturidade teórica e experimental dessa classe de controladores.

Referências

- R. Torsiello, “Acoustic positioning of the nps autonomous underwater vehicle,” Naval Postgraduate School, Monterey, CA, USA, Master’s Thesis ADA279934, 1994, accessed: 2025-12-02. [Online]. Available: <https://apps.dtic.mil/sti/pdfs/ADA279934.pdf>
- T. I. Fossen, *Guidance and Control of Ocean Vehicles*. Chichester, UK: John Wiley Sons Ltd., 1994.
- V. I. Utkin, “Variable structure systems with sliding modes,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 22, no. 2, pp. 212–222, 1977.
- , *Sliding Modes in Control and Optimization*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1992.
- A. Isidori, *Nonlinear Control Systems*, 3rd ed., ser. Communications and Control Engineering. London: Springer, 1995.
- H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, 3rd ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2002.
- S. P. Bhat and D. S. Bernstein, “Finite-time stability of continuous autonomous systems,” *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 38, no. 3, pp. 751–766, 2000.
- Y. Feng, X. Yu, and Z. Man, “Non-singular terminal sliding mode control of rigid manipulators,” *Automatica*, vol. 38, no. 12, pp. 2159–2167, 2002.
- W. Gao and J. C. Hung, “Variable structure control of nonlinear systems: A new approach,” *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 40, no. 1, pp. 45–55, 1993.
- S. Z. Sarpturk, Y. Istefanopulos, and O. Kaynak, “On the stability of discrete-time sliding mode control systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 32, no. 10, pp. 930–932, 1987.

- A. J. Healey and D. Lienard, “Multivariable sliding mode control for autonomous diving and steering of unmanned underwater vehicles,” *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, vol. 18, no. 3, pp. 327–339, 1993.