

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA - ICET
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA E FÍSICA

UMA INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DIFERENCIAL EM ESPAÇOS
NORMADOS: REGRA DA CADEIA E DESIGUALDADE DO VALOR MÉDIO

CÉSAR AUGUSTO DOS SANTOS DA SILVA

ITACOATIARA-AM

2025

CÉSAR AUGUSTO DOS SANTOS DA SILVA

UMA INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DIFERENCIAL EM ESPAÇOS NORMADOS: REGRA
DA CADEIA E DESIGUALDADE DO VALOR MÉDIO

Monografia de Graduação apresentada ao Instituto de Ciências Exatas e Tecnologia da Universidade Federal do Amazonas como requisito para a obtenção do grau de Licenciatura em Ciências: Matemática e Física.

Orientador: Prof. Dr. Leonardo da Silva Brito

Co-Orientador: Prof. Dr. Deimer Jose Julio Aleans

ITACOATIARA-AM

2025

Ficha Catalográfica

Elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

- S586i Silva, César Augusto dos Santos da
Uma introdução ao cálculo diferencial em espaços normados: regra da cadeia e desigualdade do valor médio / César Augusto dos Santos da Silva. - 2025.
54 f. : il., color. ; 31 cm.
- Orientador(a): Leonardo da Silva Brito.
Coorientador(a): Deimer José Julio Aleans.
Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) - Universidade Federal do Amazonas, Instituto de Ciências Exatas e Tecnologia de Itacoatiara, Curso de Ciências - Matemática e Física, Itacoatiara, 2025.
1. Cálculo diferencial. 2. Espaços normados. 3. Derivada de Fréchet. 4. Regra da cadeia. 5. Teorema do valor médio. I. Brito, Leonardo da Silva. II. Aleans, Deimer José Julio. III. Universidade Federal do Amazonas. Instituto de Ciências Exatas e Tecnologia de Itacoatiara. Curso de Ciências - Matemática e Física. IV. Título
-

Monografia de Graduação sob o título Uma Introdução ao Cálculo Diferencial em Espaços Normados: Regra da Cadeia e Desigualdade do Valor Médio apresentada por César Augusto dos Santos da Silva e aceita pelo Instituto de Ciências Exatas e Tecnologia da Universidade Federal do Amazonas, sendo aprovada por todos os membros da banca examinadora abaixo especificada:

Prof. Dr. Leonardo da Silva Brito (Orientador)
Universidade Federal do Amazonas - UFAM

Prof. Dr. Fernando Júnior Soares dos Santos (Membro Interno)
Universidade Federal do Amazonas - UFAM

Profa. Dra. Wanessa Ferreira Tavares (Membro Interno)
Universidade Federal do Amazonas - UFAM

Itacoatiara, 11 de dezembro de 2025

Dedicatória

Dedico este trabalho a minha esposa Marcela. Aos Meus filhos Arthur Augusto e Maria Cecília. À Minha mãe, Alciene. E meus irmãos Ana, Ayrton e Camila.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a minha esposa, Marcela, mãe dos meus dois filhos Arthur e Maria Cecília, por ter me dado todo o suporte durante toda a minha graduação e também na construção deste trabalho de conclusão de curso. Seu incentivo e cuidados com nossos filhos enquanto eu pesquisava e estudava foram essenciais para que eu possa seguir pesquisando, estudando e me dedicando à construção desta pesquisa, de certo sem seu apoio e auxílio não poderia ter desenvolvido e escrito muito do que está aqui.

Agradeço aos meus colegas de graduação, Rafaela, Nayra, Julinne, Roberto, Elizabeth, Lucas e Micael. Pelos momentos que passamos juntos durante a graduação, com certeza não foi fácil, mas seria mais difícil sem vocês dando apoio. Estivemos juntos nas reprovações, preparação para provas, listas e com certeza vou carrega-los comigo em todas as minhas futuras aprovações que possam vir, vocês fazem parte do meu sucesso.

Agradeço ao grupo de pesquisa, GEPMAT, com toda certeza os momentos de estudo e debate foram enriquecedores. E ao meu orientador de PIBIC e co-orientador Deimer, que me inspirou a estudar uma matemática que vai além do que se aprende na graduação.

Agradeço ao meu orientador Leonardo da Silva Brito, por ter aceitado me ajudar durante todo o processo de elaboração deste trabalho, sanando as dúvidas e corrigindo quando foi necessário, me incentivando e acreditando na minha capacidade.

UMA INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DIFERENCIAL EM ESPAÇOS NORMADOS: REGRA DA CADEIA E DESIGUALDADE DO VALOR MÉDIO

Autor: César Augusto dos Santos da Silva
Orientador: Prof. Dr. Leonardo da Silva Brito
Co-Orientador: Prof. Dr. Deimer Jose J. Aleans

RESUMO

Este trabalho apresenta uma introdução rigorosa ao cálculo diferencial em espaços normados, definindo a derivada de Fréchet e estabelecendo versões para espaços normados da Regra da Cadeia e da Desigualdade do Valor Médio. A motivação deste trabalho reside na tentativa de trilhar um dos caminhos essenciais para a construção da Análise Funcional, o cálculo diferencial proposto por Fréchet. O objetivo principal é fazer as demonstrações do Teorema da Regra da Cadeia e Desigualdade do Valor Médio para espaços normados. A metodologia adotada foi de pesquisa bibliográfica e síntese teórica, com levantamento e comparação de definições e demonstrações em referências clássicas de Análise Real e Funcional. Como resultado, provam-se a Regra da Cadeia para composições de aplicações diferenciáveis em espaços normados e a Desigualdade do Valor Médio, juntamente com exemplos e observações sobre a ligação com o cálculo em \mathbb{R} e aplicações ao estudo de operadores lineares contínuos. O trabalho oferece um material pedagógico que facilita a transição do estudante do cálculo clássico para conceitos de Análise Funcional.

Palavras-chave: Cálculo Diferencial, Espaços Normados, Derivada de Fréchet, Regra da Cadeia, Teorema do Valor Médio.

An Introduction to Differential Calculus in Normed Spaces: Chain Rule and Mean Value
Inequality

Author: César Augusto dos Santos da Silva
Advisor: Prof. Dr. Leonardo da Silva Brito
Co-Advisor: Prof. Dr. Deimer Jose J. Aleans

ABSTRACT

This work presents a rigorous introduction to differential calculus in normed spaces, defining the Fréchet derivative and establishing normed space versions of the Chain Rule and the Mean Value Inequality. The motivation for this work lies in attempting to follow one of the essential paths for the construction of Functional Analysis, the differential calculus proposed by Fréchet. The main objective is to provide proofs of the Chain Rule Theorem and the Mean Value Inequality for normed spaces. The methodology adopted was bibliographic research and theoretical synthesis, with the collection and comparison of definitions and proofs in classical references of Real and Functional Analysis. As a result, the Chain Rule for compositions of differentiable maps in normed spaces and the Mean Value Inequality are proven, along with examples and observations on the connection with calculus in \mathbb{R} and applications to the study of continuous linear operators. The work offers pedagogical material that facilitates the student's transition from classical calculus to concepts of Functional Analysis.

Palavras-chave: Differential Calculus, Normed Spaces, Fréchet's Derivative, Chain Rule, Mean Value Theorem.

Lista de símbolos

\mathbb{N}	$\{1, 2, \dots\}$
\mathbb{N}_0	$\{0, 1, 2, \dots\}$
\mathbb{R}	Conjunto dos Números Reais
\mathbb{R}^n	Espaço Euclidiano n -dimensional
\mathbb{K}	Corpo de escalares (geralmente \mathbb{R} ou \mathbb{C})
$\mathcal{L}(E, F)$	Espaço dos Operadores Lineares Contínuos de E em F
$\mathcal{B}(X; \mathbb{R})$	Espaço das funções limitadas de X em \mathbb{R}
$M(n, \mathbb{R})$	Espaço das matrizes reais $n \times n$
$GL(n, \mathbb{R})$	Grupo Linear (conjunto das matrizes invertíveis)
\emptyset	Conjunto vazio
$\ \cdot\ $	Norma vetorial
$\ \cdot\ _2$	Norma Euclidiana (ou norma L_2)
$\ \cdot\ _\infty$	Norma do Supremo (ou norma do máximo)
$d(u, v)$	Métrica (distância) entre u e v
sup	Supremo de um conjunto
inf	Ínfimo de um conjunto
\sum	Somatório
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Produto interno (em espaços de Hilbert ou \mathbb{R}^n)
p_i	Projeção na i -ésima coordenada
u_i	Injeção (imersão) na i -ésima coordenada
$o(\cdot)$	Notação de Landau ("little-o") para infinitésimos
\subset	Está contido (subconjunto)
\leq	Menor ou igual
\geq	Maior ou igual
\neq	Diferente
\Rightarrow	Implica
\forall	Para todo
\exists	Existe
λ	Escalar
ε	Épsilon (arbitrariamente pequeno, positivo)
δ	Delta (raio de vizinhança ou incremento)
η	Termo de erro ou resto

Conteúdo

1	Introdução	11
1.1	Objeto de Estudo e Justificativa	13
1.2	Objetivos	14
1.3	Metodologia	14
1.3.1	Caracterização da Pesquisa	15
1.3.2	Procedimentos de Coleta e Análise de Dados	15
1.3.3	Síntese e Redação	16
1.4	Referencial Teórico	16
1.4.1	Contexto Histórico: A Crise da Análise Clássica e Novas Motivações	16
1.4.2	Maurice Fréchet e a Revolução de 1906	17
1.4.3	A Formulação dos Espaços Normados e o Trabalho de Banach	18
1.4.4	A Derivada de Fréchet: Generalizando o Cálculo	18
2	Conceitos Preliminares	19
2.1	Espaço normado	19
2.2	Operadores Lineares Contínuos	23
3	Algumas Noções de Cálculo Diferencial em Espaços Normados	29
3.1	Derivada de Fréchet	29
3.2	Regra da Cadeia em Espaços Normados	35
3.3	Desigualdade do Valor Médio	45
4	Conclusão	52

Capítulo 1

Introdução

O surgimento da Análise Funcional é descrito historicamente como uma resposta à necessidade de novas ferramentas matemáticas para tratar problemas de equações diferenciais e integrais que a análise clássica já não conseguia resolver adequadamente. Segundo Bombal [2], essa disciplina representa a "algebrização da Análise" e o estudo de espaços vetoriais topológicos, sendo impossível dissociar seus primórdios do desenvolvimento da Topologia Geral. A evolução dessa área marcou a transição do estudo de funções isoladas para a investigação de espaços de funções, como os espaços de Banach e Hilbert, permitindo uma abordagem estrutural e abstrata. Boyer [4] reforça esse contexto ao narrar a evolução da matemática no século XX, onde a generalização e a abstração tornaram-se centrais para a unificação de conceitos algébricos e analíticos. Ainda de acordo com Boyer [4], um dos nomes que contribuíram para o desenvolvimento da Análise Funcional, foi Maurice Fréchet (1878-1973), que em 1906, em sua tese de doutorado evidenciou a necessidade da criação de conjuntos com elementos arbitrários, desse modo construiu um "cálculo funcional".

Dentro deste cenário teórico que foi consolidado pela Análise Funcional, a extensão do cálculo diferencial exige a revisão de seus teoremas fundamentais sob o olhar dos operadores lineares. Assim se tem a problematização principal, como generalizar os teoremas da Regra da Cadeia e da Desigualdade do Valor Médio do cálculo diferencial clássico para espaços normados usando a derivada de Fréchet. Será visto que a Regra da Cadeia, essencial para o estudo de sistemas complexos, muito presente nos estudos de cálculo da graduação, mantém seu caráter algébrico ao ser reformulada através da composição de operadores contínuos, mantendo a estrutura da derivada clássica. Simultaneamente, a generalização do Teorema do Valor Médio mostra uma característica especial à geometria dos espaços normados, a impossibilidade de garantir uma igualdade vetorial estrita conduz à formulação da Desigualdade do Valor Médio. Longe de ser uma limitação, esta desigualdade estabelece-se como o instrumento primário para obter estimativas métricas rigorosas e controlar a variação de funções vetoriais, servindo de base indispensável para a análise de convergência e para a teoria de equações diferenciais em espaços de Banach como será evidenciado como resul-

tado, operadores que se enquadram neste teorema é de lipschitz como enunciado e demonstrado por Botelho *et al.* [3].

O trabalho aqui proposto tem como foco dois teoremas fundamentais. A Regra da Cadeia, em sua formulação para espaços normados, constitui um dos resultados mais elegantes da análise funcional, estabelecendo que a diferenciabilidade é preservada sob a composição de aplicações. Se uma função é diferenciável em um ponto e sua imagem serve de domínio para outra função também diferenciável, a derivada da composição não é apenas uma multiplicação numérica, mas a composição dos operadores lineares contínuos que representam as derivadas de Fréchet individuais. Este teorema generaliza a intuição clássica de que a variação total é o produto das variações parciais, permitindo o tratamento rigoroso de sistemas onde as variáveis não são simples números reais, mas vetores ou funções. Sua demonstração em espaços abstratos exige um refinamento técnico para manipular os termos de "resto", mas o resultado final, $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \circ f'(a)$, confirma que a estrutura linear da diferenciação é robusta o suficiente para transitar intacta através de dimensões infinitas.

Paralelamente, a Desigualdade do Valor Médio emerge como a adaptação necessária e rigorosa do Teorema do Valor Médio para o contexto vetorial, onde a geometria do contradomínio impede a garantia de uma igualdade estrita. Diferente da reta real, onde é sempre possível encontrar um ponto tangente paralelo à secante, em espaços de dimensão superior a curvatura pode evitar que tal ponto exista, por isso, a igualdade cede lugar a uma estimativa métrica. Este teorema afirma que a norma da diferença entre os valores da função em dois pontos é limitada pelo produto da distância entre esses pontos e o supremo da norma da derivada no segmento que os une. Longe de ser um resultado mais fraco, essa desigualdade fornece o controle global sobre o crescimento da função, sendo a ferramenta fundamental para demonstrar que funções com derivada nula são constantes e para garantir a unicidade de soluções em equações diferenciais via o Teorema do Ponto Fixo.

A conexão destes teoremas com os tópicos usuais da graduação é imediata e enriquecedora, servindo como o elo natural entre a Álgebra Linear, o Cálculo de Várias Variáveis e a Análise Real. Ao revisitar a Regra da Cadeia e o Teorema do Valor Médio sob a perspectiva de espaços normados, o estudante percebe que as fórmulas matriciais complexas e os jacobianos vistos no cálculo vetorial são, na verdade, representações concretas de propriedades universais de operadores lineares. Essa abordagem unifica conteúdos que frequentemente parecem desconexos na grade curricular, demonstrando que a abstração não é um distanciamento da realidade, mas uma ferramenta de simplificação. Ao compreender que a derivada é, essencialmente, uma aproximação linear local, o aluno transcende a visão operacional de "regras de derivação" para alcançar uma compreensão estrutural, facilitando a transição do pensamento concreto para o raciocínio abstrato exigido na matemática superior.

Iniciando no capítulo 1 onde se tem uma breve discussão do que será abordado no trabalho, uma breve contextualização e também os objetivos e motivações. A partir do capítulo 2, tem-se uma

apresentação dos conceitos preliminares que são essenciais para o andamento do conteúdo principal que é o cálculo diferencial em espaços normados. No capítulo 3, se inicia apresentando a definição de derivada de Fréchet seguindo Kesavan [12], junto de seu paralelo em \mathbb{R} , para esta comparação se optou por seguir Lima [13], partindo para as demonstrações dos teoremas da Regra da cadeia usando a derivada de Fréchet e também em \mathbb{R} junto de algumas aplicações. Ainda no capítulo 3, se apresenta e demonstra o teorema da Desigualdade do Valor Médio em espaços normados e em \mathbb{R} , seguido por algumas aplicações. Ao final será feita uma conclusão onde se identifica se os objetivos foram alcançados.

1.1 Objeto de Estudo e Justificativa

O objeto de estudo deste trabalho é entender as extensões dos teoremas da Regra da Cadeia e Desigualdade do Valor Médio para espaços normados, para isso se estudará os seguintes tópicos:

1. A Derivada de Fréchet: Esta é a principal ferramenta de generalização, substituindo o conceito escalar da derivada pela ideia de um operador linear limitado que aproxima a função em um ponto.
2. Regra da Cadeia: Um dos pilares do cálculo, sua extensão para Espaços Normados permite derivar a composição de funções diferenciáveis entre esses espaços, mantendo a estrutura original do resultado.
3. Desigualdade do Valor Médio: Outro ponto essencial para o estudo de cálculo é a Desigualdade do Valor Médio sendo a forma como o Teorema do Valor Médio é generalizado em espaços normados. Devido à natureza vetorial desses espaços, a igualdade do teorema original é substituída por uma desigualdade, mas seu poder em fornecer estimativas para o crescimento de funções é mantido.

A relevância deste trabalho se dá pois em muitos casos se vê com certa distância a relação que existe entre o estudo de cálculo, o mesmo que se aprende durante a graduação, e o estudo de análise real, e se distancia ainda mais quando se propõe a fazer uma ligação entre o cálculo diferencial e Análise Funcional. Com isso neste trabalho reside o fato de que o estudo do Cálculo em Espaços Normados preenche a lacuna entre o Cálculo de \mathbb{R}^n e a Análise Funcional, fornecendo o aparato teórico necessário para a compreensão de tópicos avançados.

A demonstração de resultados importantes no estudo de cálculo diferencial em \mathbb{R} , são uma ótima oportunidade de relacionar o que já se tem de conhecimento prévio no cálculo da graduação com os espaços normados, um exemplo é a regra da cadeia que surge como um método excelente na resolução de funções compostas, presente nos mais diversos estudos, sua demonstração é peça fundamental deste trabalho, essa abordagem proporciona uma verdadeira ponte entre o cálculo diferencial e análise funcional.

1.2 Objetivos

- Objetivo Geral: Demonstrar os teoremas da Regra da Cadeia e Desigualdade do Valor Médio para espaços normados
- Objetivos Específicos:
 - Revisar os conceitos fundamentais do cálculo diferencial em \mathbb{R} .
 - Definir a Derivada de Fréchet para espaços normados.
 - Demonstrar o teorema da Regra da Cadeia para espaços normados.
 - Demonstrar a Desigualdade do Valor Médio para espaços normados.
 - Investigar os paralelos e os contrastes do Cálculo Diferencial em \mathbb{R} e sua extensão para espaços normados, com ênfase no teoremas da Regra da Cadeia e Desigualdade do Valor Médio.
 - Fazer algumas aplicações dos principais resultados abordados no trabalho.

1.3 Metodologia

Para a elaboração deste trabalho de conclusão de curso, a metodologia adotada classifica-se como pesquisa bibliográfica. Este formato é o mais adequado para investigações em Matemática Pura e Análise Funcional, onde o objeto de estudo reside na inspeção conceitual, na comparação de definições e na estruturação lógica de teoremas já estabelecidos pela comunidade científica. A escolha deste método ocorre por se tratar de uma proposta que envolve diversos estudos já bem estabelecidos no âmbito matemático, nesse contexto a preferência por uma pesquisa bibliográfica é a melhor opção, como diz Lima e Miotto em [15]

A sua indicação para esses estudos relaciona-se ao fato de a aproximação com o objeto ser dada a partir de fontes bibliográficas. Portanto, a pesquisa bibliográfica possibilita um amplo alcance de informações, além de permitir a utilização de dados dispersos em inúmeras publicações, auxiliando também na construção, ou na melhor definição do quadro conceitual que envolve o objeto de estudo proposto[...]. [15, p. 40]

A opção por este método não se resume a uma simples compilação de definições, mas sim a um processo investigativo rigoroso. A pesquisa bibliográfica difere da revisão de literatura comum, pois conforme explicam Lima e Miotto em [15, p. 38], "[...] implica em um conjunto ordenado de procedimentos de busca por soluções, atento ao objeto de estudo, e que, por isso, não pode ser aleatório".

1.3.1 Caracterização da Pesquisa

Na construção dos saberes matemáticos abordados, especificamente a derivada de Fréchet, parte-se de premissas teóricas e axiomas para deduzir propriedades e consequências lógicas. Segundo Marconi e Lakatos, citados por Braucks *et al.* em [5], a pesquisa científica deve ser entendida como "um procedimento formal, com método de pensamento reflexivo, que requer um tratamento científico e se constitui no caminho para conhecer a realidade ou para descobrir verdades parciais".

No contexto da extensão do cálculo, a "realidade" investigada é a estrutura abstrata dos espaços vetoriais normados. Assim, a pesquisa bibliográfica permite ao pesquisador o contato direto com a produção teórica, garantindo que o trabalho não seja mais uma cópia do que já foi abordado por outro autor, mas que ofereça uma nova perspectiva ou sistematização. Como ressaltam Lakatos e Marconi, em citação presente no trabalho de Sousa *et al.* [18, p. 67], "[...] a pesquisa bibliográfica não é mera repetição do que já foi dito ou escrito sobre certo assunto, mas propicia o exame de um tema sob novo enfoque ou abordagem". Desse modo é essencial o olhar crítico e criativo de como se abordará a proposta de pesquisa de um jeito inovador.

1.3.2 Procedimentos de Coleta e Análise de Dados

A condução da pesquisa seguiu etapas sistemáticas de levantamento, seleção e análise, essenciais para garantir que as informações sejam mais precisas o possível.

1. **Levantamento Bibliográfico:** Foram consultadas fontes primárias e secundárias, incluindo livros clássicos de Análise, artigos científicos e dissertações. A busca foi orientada por palavras-chave como "Cálculo Diferencial", "Derivada de Fréchet", "Operadores Lineares" e "Análise Funcional". Sousa *et al.* [18] destacam que esta etapa exige dedicação para "reunir e analisar textos publicados, para apoiar o trabalho científico".
2. **Leitura e Seleção:** Utilizou-se a técnica de leitura seletiva e analítica para filtrar os teoremas pertinentes. De acordo com Salvador, citado por Lima e Miotto [15], o processo deve seguir uma sequência que vai da investigação das soluções até a síntese integradora. .
3. **Fichamento e Organização:** Para o tratamento dos dados, adotou-se o fichamento das obras, permitindo a correta alocação das definições matemáticas e a comparação entre diferentes notações e abordagens dos autores.

A complexidade do tema exige o que Lima e Miotto [15] denominam de "vigilância epistemológica", garantindo que as definições matemáticas não sejam deturpadas durante a análise. Sobre a postura do pesquisador neste tipo de trabalho, as autoras afirmam:

Trabalhar com a pesquisa bibliográfica significa realizar um movimento incansável de apreensão dos objetivos, de observância das etapas, de leitura, de questionamentos e de interlocução crítica com o material bibliográfico, e que isso exige vigilância epistemológica ([15], p. 37)

Pode-se verificar que a pesquisa deve ser direcionada de acordo o objetivo principal estabelecido, junto de uma dedicação e fidelidade as etapas do processo de pesquisa. A revisão crítica é primordial para a construção deste trabalho, sempre revisando e fazendo as relações necessárias entre os autores selecionados para poder se obter uma nova perspectiva entre o que já se bem estabelecido.

1.3.3 Síntese e Redação

A fase final do trabalho consistiu na síntese integradora, onde as informações coletadas foram articuladas para responder ao problema de pesquisa sobre as limitações e potencialidades do cálculo em dimensão infinita. Segundo Echer [8], é do "confronto da opinião de diferentes autores" que nasce uma posição amadurecida sobre o assunto, permitindo ao pesquisador abandonar ideias iniciais e reformular conceitos à luz da teoria .

Desta forma, a redação final deste TCC busca não apenas descrever a teoria existente, mas demonstrar a estrutura lógica que permite a generalização do conceito de derivada, respeitando o rigor matemático e as normas científicas.

1.4 Referencial Teórico

O desenvolvimento da Análise funcional ocorre pela necessidade expandir os estudos já desenvolvidos, como os de integração e diferenciação, em um meio que não se limite apenas a números, diversos nomes contribuíram, como Vito Volterra , Maurice Fréchet (1878-1973), David Hilbert (1862-1943), Friedrich Riesz (1880-1956), entre outros nomes que contribuíram para desenvolver uma ferramenta que possibilite elaborar novas teorias que não seriam construídas sem as contribuições da análise funcional.

1.4.1 Contexto Histórico: A Crise da Análise Clássica e Novas Motivações

O final do século XIX e o início do século XX marcaram um período de profunda transformação na matemática. A Análise Clássica, que lidava predominantemente com funções de uma ou mais variáveis reais, começou a mostrar limitações para tratar problemas complexos oriundos da física e do cálculo de variações. Historicamente, a transição para a Análise Funcional não foi abrupta. Ela surgiu da necessidade de unificar e generalizar resultados anteriores. Segundo Boyer [4], o século XIX já havia presenciado um movimento de rigor e abstração, com trabalhos de matemáticos

como Cantor, que estabeleceu a teoria dos conjuntos, fornecendo a linguagem necessária para o tratamento de "infinitos" de diferentes naturezas.

No entanto, foi a necessidade de estudar "funções de linhas", o que hoje chamamos de funcionais, que impulsionou o desenvolvimento da área. Bombal [2] aponta que, já em 1887, Vito Volterra iniciou o estudo sistemático de funções que dependiam de outras funções, e não apenas de pontos, estabelecendo os primórdios do cálculo funcional.

A definição moderna da disciplina reflete essa evolução estrutural e topológica. Dieudonné, citado por Bombal em [2, p. 1], define a Análise Funcional do seguinte modo, "...o estudo de espaços vetoriais topológicos e das aplicações definidas entre subconjuntos dos mesmos, sujeitos a diferentes condições algébricas e topológicas". Essa definição evidencia a tendência de "algebrização" da análise, onde o foco deixa de ser o comportamento individual de uma função para ser a estrutura do espaço onde essas funções habitam.

1.4.2 Maurice Fréchet e a Revolução de 1906

O ano de 1906 é considerado um marco fundamental na história da Análise Funcional. Foi neste ano que o matemático francês Maurice Fréchet apresentou sua tese de doutorado, intitulada *Sur quelques points du calcul fonctionnel*. A motivação de Fréchet era generalizar os conceitos de limite e continuidade, libertando-os da restrição aos números reais ou vetores do espaço euclidiano. De acordo com Boyer [4]

Maurice Fréchet (1878-1973) na Universidade de Paris, em sua tese de doutorado de 1906, mostrou claramente que a teoria das funções já não podia passar sem uma visão muito geral da teoria dos conjuntos. O que Fréchet tinha em mente não eram necessariamente os conjuntos de números, mas conjuntos de elementos de natureza arbitrária, tais como curvas ou pontos; sobre tais conjuntos arbitrários, ele construiu um "cálculo funcional cálculo. [...] Nesse cálculo muito geral, a noção de limite é muito mais ampla do que a previamente definida, essa estando incluída na nova noção como caso especial." [4, p. 417]

Ele percebeu que a essência desses conceitos residia na noção de "distância". Bombal [2] descreve a importância crucial deste momento histórico:

Em sua tese de doutorado de 1906, [...] Fréchet introduziu os espaços métricos (que ele chamou de classes E) e apontou que os conceitos de limite e continuidade dependiam apenas da noção de distância e, portanto, podiam ser definidos em um contexto abstrato muito mais geral do que o da reta real ou dos espaços euclidianos. Fréchet também estudou convergência uniforme, compacidade (que ele chamou de compacidade extrema) e separabilidade. [2, p. 85].

Ao introduzir os espaços métricos, Fréchet permitiu que conjuntos de objetos não numéricos, como conjuntos de funções, sequências ou curvas, fossem tratados geometricamente. Isso possibilitou que a intuição geométrica, como a noção de proximidade e convergência fosse aplicada a problemas de equações diferenciais e integrais.

1.4.3 A Formulação dos Espaços Normados e o Trabalho de Banach

Enquanto Fréchet forneceu a estrutura topológica, para conjuntos arbitrários, a estrutura algébrica necessária para o cálculo diferencial, a linearidade, foi consolidada posteriormente. A necessidade de medir não apenas a distância entre funções, mas também o “comprimento” ou “magnitude” de uma função, de modo análogo ao valor absoluto em \mathbb{R} , levou à formulação dos espaços normados.

Embora vários matemáticos, como Riesz e Helly, tenham contribuído, foi Stefan Banach quem sistematizou essa teoria. Sua obra *Théorie des Opérations Linéaires*, publicada em 1932, é considerada o marco de maturidade da Análise Funcional moderna. Atualmente, define-se essa estrutura fundamental de uma maneira mais bem estabelecida, como diz Botelho *et al.* [3, p. i], “Podemos definir a Análise Funcional como o estudo dos espaços vetoriais normados, em especial os espaços de Banach, e dos operadores lineares contínuos entre eles”. A contribuição de Banach foi axiomatizar os espaços vetoriais completos munidos de uma norma, Espaços de Banach, permitindo que teoremas poderosos sobre existência e unicidade de soluções pudessem ser provados em um contexto abstrato e aplicados a diversos problemas específicos.

1.4.4 A Derivada de Fréchet: Generalizando o Cálculo

A relação final entre a Análise Funcional e o cálculo diferencial concretiza-se na generalização do conceito de derivada. No cálculo clássico, a derivada de uma função em um ponto é o número que representa a inclinação da reta tangente. Em espaços de dimensão superior \mathbb{R}^n , a derivada torna-se uma transformação linear. Fréchet estendeu essa ideia para espaços normados de dimensão infinita. A derivada de Fréchet não é um número, mas um operador linear contínuo que fornece a melhor aproximação linear local da função não linear.

Essa generalização foi motivada pela necessidade de tratar problemas variacionais de forma rigorosa. Ao substituir o espaço de domínio, números reais, por um espaço de Banach, funções, a “variável” da diferenciação passa a ser uma função, e a “inclinação” passa a ser um operador. Segundo Bombal [2] essa estrutura permitiu o desenvolvimento do cálculo diferencial em espaços de Banach, unificando a teoria de otimização e equações diferenciais sob uma única linguagem estrutural

Capítulo 2

Conceitos Preliminares

Neste capítulo serão abordados os conceitos preliminares para o desenvolvimento deste trabalho. A exposição inicia-se com a transição do conceito de módulo em \mathbb{R} para o de norma em espaços vetoriais gerais. Definimos formalmente espaço normado e espaço de Banach e demonstraremos alguns resultados necessários para os capítulos seguintes. Indicamos as referências [3], [11], [12] e [13] para um estudo mais detalhado."

2.1 Espaço normado

Em um curso de graduação, especificamente na disciplina de Análise Real, define-se módulo (veja [13]) como sendo a função definida por

$$a \in \mathbb{K} \mapsto |a| \in \mathbb{R}$$

e que satisfaz as seguintes condições:

- $|a| \geq 0$, para todo a e $|a| = 0 \iff a = 0$.
- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$, para todos a e b .
- $|a + b| \leq |a| + |b|$, para todos a e b .

A transição do conceito de módulo para o de norma representa a passagem de uma estrutura algébrica simples (o corpo dos reais ou complexos) para espaços vetoriais. Enquanto o módulo mede magnitude numérica em corpos, a norma generaliza esta noção de "tamanho" para vetores em espaços de dimensão finita ou infinita. A introdução da norma permite estender conceitos como convergência, continuidade e completude, formando a base para o estudo de espaços normados.

Definição 2.1.1. Seja E um espaço vetorial sobre \mathbb{R} . A função

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \|x\| \end{aligned}$$

é uma norma quando as seguintes propriedades estiverem satisfeitas:

(N1) $\|x\| \geq 0$, para todo $x \in E$ e $\|x\| = 0 \iff x = 0$.

(N2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$, para todo escalar λ e todo $x \in E$.

(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, para quaisquer $x, y \in E$.

Quando E for um espaço vetorial e $\|\cdot\|$ for uma norma em E , dizemos que o par $(E, \|\cdot\|)$ é um *espaço vetorial normado*, ou de modo equivalente, dizemos que o espaço vetorial E "muniado" da norma $\|\cdot\|$ é um espaço vetorial normado. Por questões de simplicidade escreveremos E ao invés de $(E, \|\cdot\|)$ quando não houver ambiguidade.

Vejamos a seguir alguns exemplos de espaços vetoriais normados.

Exemplo 2.1.1. O espaço euclidiano \mathbb{R}^n é um espaço vetorial normado. De modo que os seguintes pares $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ e $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$, onde, para $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, tem-se

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n (x_i)^2 \right)^{1/2}, \quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad \text{e} \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

são espaços vetoriais normados.

Demonstração. Mostraremos que $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ é um espaço normado, as outras demonstrações seguem de modo análogo. Devemos mostrar que $\|\cdot\|_1$ é uma norma, para isso mostraremos que as propriedades N1, N2 e N3 da Definição 2.1.1 são satisfeitas. Sejam $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

(N1) Veja que

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \geq 0,$$

pois $|x_i| \geq 0$ para cada $i = 1, 2, \dots, n$.

Se $x = (0, \dots, 0)$, então $|x_i| = 0$ para todo i , logo $\|x\|_1 = \sum 0 = 0$.

Reciprocamente, se $\|x\|_1 = 0$, então $\sum_{i=1}^n |x_i| = 0$ e como $|x_i| \geq 0$, uma soma de termos não negativos só resulta em zero se cada termo for zero, concluímos que $|x_i| = 0 \implies x_i = 0$ para todo i ou seja $x = 0$.

(N2) O vetor λx é dado por $(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$. Logo:

$$\begin{aligned}\|\lambda x\|_1 &= \sum_{i=1}^n |\lambda x_i| \\ \sum_{i=1}^n |\lambda x_i| &= \sum_{i=1}^n |\lambda| |x_i| \\ |\lambda| \sum_{i=1}^n |x_i| &= |\lambda| \|x\|_1,\end{aligned}$$

isso mostra (N2).

(N3) Para $x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$, então

$$\begin{aligned}\|x + y\|_1 &= \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \\ \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| &\leq \sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|) \\ \sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|) &= \sum_{i=1}^n |x_i| + \sum_{i=1}^n |y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1.\end{aligned}$$

Portanto, $\|x + y\|_1 \leq \|x\|_1 + \|y\|_1$.

Como todas as propriedades são satisfeitas, $\|\cdot\|_1$ define uma norma em \mathbb{R}^n . ■

Exemplo 2.1.2. Sejam X um conjunto e $\mathcal{B}(X; \mathbb{R}) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ é uma função limitada}\}$. Então, o par $(\mathcal{B}(X; \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, onde $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$.

Demonstração. Mostraremos que $(\mathcal{B}(X; \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço normado. Para isso devemos mostrar que $\|\cdot\|_\infty$ é uma norma. Para todo $f, g \in \mathcal{B}(X; \mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

(N1) Veja que

$$|f(x)| \geq 0, \forall x \in X$$

segue que

$$\sup_{x \in X} |f(x)| \geq 0.$$

Se $\|f\|_\infty = 0$

$$\sup_{x \in X} |f(x)| = 0.$$

Como $|f(x)| \geq 0$, isso implica que

$$|f(x)| = 0, \forall x \in X,$$

ou seja, $f = 0$. Reciprocamente, se $f = 0$, então $\|f\|_\infty = 0$.

(N2) Sabemos que

$$\|\lambda f\|_\infty = \sup_{x \in X} |\lambda f(x)| = \sup_{x \in X} (|\lambda| |f(x)|).$$

Como $|\lambda| \geq 0$

$$\sup_{x \in X} (|\lambda| |f(x)|) = |\lambda| \sup_{x \in X} |f(x)| = |\lambda| \|f\|_\infty.$$

(N3) Para qualquer $x \in X$, pela desigualdade triangular em \mathbb{R} :

$$|(f + g)(x)| = |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|.$$

Sabemos que para todo $x \in X$

$$|f(x)| \leq \|f\|_\infty \text{ e } |g(x)| \leq \|g\|_\infty$$

Logo,

$$|(f + g)(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

Isso mostra que $(\|f\|_\infty + \|g\|_\infty)$ é uma cota superior para o conjunto $\{|(f + g)(x)| : x \in X\}$.

Como a norma $\|f + g\|_\infty$ é o supremo desse conjunto, temos:

$$\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

■

Um espaço normado E é chamado *espaço de Banach* quando toda sequência de Cauchy for convergente em E . Nesse caso dizemos que o espaço de Banach é um espaço normado completo. Para um estudo mais detalhado sobre espaços de Banach indicamos [3] e [14].

Um resultado interessante sobre espaços de Banach é o seguinte

Proposição 2.1.1. *Sejam E um espaço de Banach e F um subespaço vetorial de E . Então F é um espaço de Banach, com a norma induzida de E se, e somente se, F é fechado em E .*

Demonstração. Suponha F Banach e tome $(x_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência em F tal que $x_n \rightarrow x \in E$. Então $(x_n)_{n=1}^\infty$ é de Cauchy em F , e portanto convergente pois F é completo por hipótese. Existe então $y \in F$ tal que $x_n \rightarrow y$. Da unicidade do limite temos $x = y \in F$, provando que F é fechado em E .

Reciprocamente, suponha F fechado em E e seja $(x_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência de Cauchy em F . Logo $(x_n)_{n=1}^\infty$ é de Cauchy em E , e portanto existe $x \in E$ tal que $x_n \rightarrow x$. Como F é fechado segue que $x \in F$, o que prova que F é completo. ■

2.2 Operadores Lineares Contínuos

Nesta seção, abordaremos de forma introdutória o estudo dos operadores lineares e contínuos. Podemos afirmar que esse tema constitui um dos núcleos centrais da Análise Funcional. Apresentaremos apenas os conceitos e resultados fundamentais que serão necessários para o desenvolvimento e a compreensão deste trabalho. Para um estudo mais aprofundado sobre operadores lineares e contínuos, remetemos o leitor à referência [3].

Definição 2.2.1. Um *operador linear* do espaço normado E no espaço normado F , ambos sobre o mesmo corpo \mathbb{K} , é uma função $T : E \rightarrow F$ que satisfaz

- $T(x + y) = T(x) + T(y)$, para quaisquer $x, y \in E$
- $T(\lambda x) = \lambda T(x)$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e qualquer $x \in E$.

Definição 2.2.2. Um Operador Linear do espaço normado E no espaço normado F é contínuo se para todo $x_0 \in E$ e $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|T(x) - T(x_0)\| < \varepsilon$ sempre que $x \in E$ e $\|x - x_0\| < \delta$.

Desse modo ele é dito como um *Operador Linear Contínuo*.

O conjunto de todos os operadores lineares contínuos de E em F , ambos espaços normados, será denotado por $\mathcal{L}(E, F)$.

Exemplo 2.2.1. Seja $\ell_1 := \{(x_n)_{n=1}^{\infty} : x_n \in \mathbb{R}, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty\}$ com a norma $\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\| := \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$. O operador

$$T : \ell_1 \rightarrow \ell_1, \quad T(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$$

é linear e contínuo.

Demonstração. Verificando a linearidade. Sejam $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ e $y = (y_n)_{n=1}^{\infty}$ vetores em ℓ_1 e $\alpha \in \mathbb{R}$ um escalar. Temos:

$$\begin{aligned} T(\alpha x + \alpha y) &= T((\alpha x_1 + \alpha y_1, \alpha x_2 + \alpha y_2, \dots)) \\ &= (\alpha x_2 + \alpha y_2, \alpha x_3 + \alpha y_3, \dots) \\ &= (\alpha x_2, \alpha x_3, \dots) + (\alpha y_2, \alpha y_3, \dots) \\ &= \alpha(x_2, x_3, \dots) + \alpha(y_2, y_3, \dots) \\ &= \alpha T(x) + \alpha T(y). \end{aligned}$$

Portanto, T é linear.

Para a continuidade, calculamos a norma $\|T(x)\|_1$:

$$\|Tx\|_1 = \|(x_2, x_3, \dots)\|_1 = \sum_{n=2}^{\infty} |x_n|.$$

Comparando com a norma de x :

$$\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = |x_1| + \sum_{n=2}^{\infty} |x_n|.$$

Como $|x_1| \geq 0$, segue que:

$$\sum_{n=2}^{\infty} |x_n| \leq |x_1| + \sum_{n=2}^{\infty} |x_n| \implies \|Tx\|_1 \leq \|x\|_1.$$

Concluimos que $\|Tx\|_1 \leq 1 \cdot \|x\|_1$. Logo, T é um operador limitado (com constante $C = 1$) e, consequentemente, contínuo. ■

A seguir será apresentada uma caracterização para operadores lineares contínuos, bastante útil para saber se um operador linear em espaços de dimensão infinita é ou não contínuo. Antes de apresentar a caracterização, relembramos que uma função $f : E \rightarrow F$ entre espaços normados é

- **Lipschitziana** se existe uma constante $L > 0$ tal que $\|f(y) - f(x)\| \leq L \cdot \|y - x\|$ para todos $x, y \in E$;
- **Uniformemente contínua** se para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$ sempre que $x, y \in E$ e $\|x - y\| < \delta$.

Teorema 2.2.1. *Sejam E e F espaços normados sobre \mathbb{R} e $T : E \rightarrow F$ operador linear. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a) T é lipschitziana.
- (b) T é uniformemente contínuo.
- (c) T é contínuo.
- (d) T é contínuo em algum ponto de E .
- (e) T é contínuo na origem.
- (f) $\sup\{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} < \infty$.
- (g) Existe uma constante $C \geq 0$ tal que $\|T(x)\| \leq C\|x\|$ para todo $x \in E$.

Demonstração. **(a) \implies (b):** Se T é lipschitziano, existe uma constante $C \geq 0$, tal que para todos $x, y \in E$

$$\|T(x) - T(y)\| \leq C\|x - y\|$$

Escolhemos um $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$

Daí, se $\|x - y\| < \delta$, temos $\|T(x) - T(y)\| \leq C\|x - y\| < C \cdot \delta = C \cdot \left(\frac{\varepsilon}{C}\right) = \varepsilon$. Isso mostra que T é uniformemente contínuo.

(b) \implies (c): Se T é uniformemente contínuo, então para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\|x - y\| < \delta \implies \|T(x) - T(y)\| < \varepsilon$ para quaisquer $x, y \in E$. É imediato que para um ponto x_0 vale que se $\|x - x_0\| < \delta$, então $\|T(x) - T(x_0)\| < \varepsilon$. Isso mostra que $x_0 \in E$, logo T é contínuo.

(c) \implies (d): Se T é contínuo, então é contínuo em algum ponto, assumindo $E \neq \{0\}$.

(d) \implies (e): Suponha que T é contínuo em algum $x_0 \in E$. Então, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$\|x - x_0\| < \delta \implies \|T(x) - T(x_0)\| < \varepsilon.$$

Vejamos que T é contínuo na origem, ou seja, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta' > 0$ tal que $\|y - 0\| < \delta' \implies \|T(y) - T(0)\| < \varepsilon$. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, escolha $\delta' = \delta$. Agora seja $y \in E$ tal que $\|y\| < \delta$. Defina $x = y + x_0$. Então por $\|x - x_0\| = \|(y + x_0) - x_0\| = \|y\| < \delta$. Pela continuidade em x_0 , sabemos que $\|T(x) - T(x_0)\| < \varepsilon$. Usando a linearidade de T .

$$\|T(y)\| = \|T(y) + T(x_0) - T(x_0)\| = \|T(y + x_0) - T(x_0)\| = \|T(x) - T(x_0)\|$$

Como T é linear, $T(0) = 0$. Portanto, $\|T(y) - T(0)\| = \|T(y)\| < \varepsilon$. Isso mostra que T é contínuo na origem.

(e) \implies (f): Suponha que T é contínuo na origem. Então, para $\varepsilon = 1$, existe um $\delta > 0$ tal que:

$$\|x\| < \delta \text{ implica } \|T(x)\| < 1 \tag{2.1}$$

Queremos mostrar que $\sup\{\|T(y)\| : \|y\| \leq 1\}$ é finito. Para isso seja $y \in E$ com $\|y\| \leq 1$. Considerando $x = \frac{\delta}{2}y$, obtemos

$$\|x\| = \left\| \frac{\delta}{2}y \right\| = \frac{\delta}{2}\|y\| \leq \frac{\delta}{2} \cdot 1 = \frac{\delta}{2} < \delta$$

Como $\|x\| < \delta$, por 2.1 temos $\|T(x)\| < 1$. Segue pela linearidade de T que

$$\frac{\delta}{2}\|T(y)\| = \left\| \frac{\delta}{2}T(y) \right\| = \left\| T\left(\frac{\delta}{2}y\right) \right\| = \|T(x)\| < 1$$

o que implica $\|T(y)\| < \frac{2}{\delta}$. Isso mostra que para todo y na bola unitária fechada, $\|T(y)\|$ é limitado

superiormente por $M = 2/\delta$. Portanto, $\sup\{\|T(y)\| : \|y\| \leq 1\} \leq \frac{2}{\delta} < \infty$.

(f) \implies (g): Segue de (f) que $C = \sup\{\|T(y)\| : \|y\| \leq \infty\}$. Agora mostraremos que $\|T(x)\| \leq C\|x\|$ para todo $x \in E$. Se $x = 0$, então $\|T(0)\| = 0 = C\|0\| = 0$. A desigualdade $0 \leq 0$ é válida. De fato, se $x \neq 0$, então $\|x\| > 0$. Considere o vetor normalizado $y = \frac{x}{\|x\|}$.

Temos que $\|y\| = \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = \frac{1}{\|x\|} \|x\| = 1$. Como $\|y\| = 1$, y pertence à bola unitária, logo, pela definição de C , $\|T(y)\| \leq C$. Substituindo y e usando a linearidade:

$$\frac{1}{\|x\|} \|T(x)\| = \left\| \frac{1}{\|x\|} T(x) \right\| = \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| = \|T(y)\| \leq C$$

Isso mostra que $\|T(x)\| \leq C\|x\|$. Portanto (g) está demonstrada

(g) \implies (a): Suponha que existe $C \geq 0$ tal que $\|T(z)\| \leq C\|z\|$ para todo $z \in E$. Mostraremos que T é lipschitziano, isto é, $\|T(x) - T(y)\| \leq L\|x - y\|$ para alguma constante L . Com efeito, sejam $x, y \in E$. Logo,

$$\|T(x) - T(y)\| = \|T(x - y)\|$$

Segue de (g) que $\|T(x - y)\| \leq C\|x - y\|$. Isso mostra que T é lipschitziano. Portanto o teorema está demonstrado. ■

Este teorema fornece uma definição muito importante que está presente no decorrer do estudo de Derivada de Fréchet, o item (f) do Teorema 2.2.1 assegura que os operadores lineares contínuos são aqueles que transformam conjuntos limitados no domínio em conjuntos limitados no contradomínio. Por esse motivo que os operadores lineares contínuos são muitas vezes chamados de *operadores lineares limitados*.

Proposição 2.2.1. *Sejam E e F espaços normados. Então são válidas as seguintes afirmações:*

(a) A expressão

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\}$$

define uma norma no espaço $\mathcal{L}(E, F)$.

(b) $\|T(x)\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$, para todos $T \in \mathcal{L}(E, F)$ e $x \in E$.

Demonstração. (a) Para mostrar que $\|\cdot\|$ é uma norma, verificaremos as três propriedades apresentadas na Definição 2.1.1:

(N1) Se $\|T(x)\| > 0$, o supremo de um conjunto de números não-negativos é não-negativo.

Logo, $\|T\| > 0$. Se $\|T\| = 0$, então

$$\sup\{\|T(x)\| : \|x\| \leq 1\} = 0.$$

Com efeito, para um $y \in E$ qualquer, $y \neq 0$, seja $x = \frac{y}{\|y\|}$. Temos $\|x\| = 1$. Então,

$$\|T(x)\| = \left\| T\left(\frac{y}{\|y\|}\right) \right\| = \frac{1}{\|y\|} \|T(y)\| = 0.$$

Como $\|y\| \neq 0$, segue que $\|T(y)\| = 0$, e portanto $T(y) = 0$. Isso vale para todo $y \neq 0$, e trivialmente para $y = 0$. Logo, T é o operador nulo. Reciprocamente se $T = 0$, então $T(x) = 0$ para todo x . Assim, $\|T(x)\| = 0$ para todo x . O supremo do conjunto $\{0\}$ é 0, logo $\|T\| = 0$.

(N2) Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C}).

$$\begin{aligned} \|\lambda T\| &= \sup\{\|(\lambda T)(x)\| : \|x\| \leq 1\} \\ &= \sup\{\|\lambda \cdot T(x)\| : \|x\| \leq 1\} \\ &= \sup\{|\lambda| \cdot \|T(x)\| : \|x\| \leq 1\} \\ &= |\lambda| \cdot \sup\{\|T(x)\| : \|x\| \leq 1\} \quad (\text{pois } |\lambda| \geq 0) \\ &= |\lambda| \cdot \|T\| \end{aligned}$$

(N3) Sejam $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(E, F)$.

$$\begin{aligned} \|T_1 + T_2\| &= \sup\{\|(T_1 + T_2)(x)\| : \|x\| \leq 1\} \\ &= \sup\{\|T_1(x) + T_2(x)\| : \|x\| \leq 1\} \end{aligned}$$

Para qualquer x com $\|x\| \leq 1$, temos

$$\|T_1(x) + T_2(x)\| \leq \|T_1(x)\| + \|T_2(x)\|$$

Por definição temos, $\|T_1(x)\| \leq \|T_1\|$ e $\|T_2(x)\| \leq \|T_2\|$ para todo x com $\|x\| \leq 1$. Assim

$$\|T_1(x) + T_2(x)\| \leq \|T_1\| + \|T_2\|$$

Isso mostra que $(\|T_1\| + \|T_2\|)$ é um limite superior para o conjunto $\{\|T_1(x) + T_2(x)\| : \|x\| \leq 1\}$. Desse modo obtemos

$$\|T_1 + T_2\| = \sup\{\|T_1(x) + T_2(x)\| : \|x\| \leq 1\} \leq \|T_1\| + \|T_2\|$$

(b) Vamos mostrar que $\|T(x)\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$, para todo $x \in E$. Se $x = 0$. Temos $\|T(0)\| = \|0\| = 0$. Assim $\|T\| \cdot \|0\| = \|T\| \cdot 0 = 0$. Isso mostra que vale para $x = 0$

Se $x \neq 0$, então $\|x\| > 0$, logo, podemos definir $y = \frac{x}{\|x\|}$. Note que $\|y\| = \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| =$

$\frac{1}{\|x\|} \|x\| = 1$. Como $\|y\| = 1$, então

$$\|T(y)\| \leq \|T\| = \sup\{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\}$$

desse modo

$$\left\| T \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right\| \leq \|T\|$$

usando propriedades de norma

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|x\|} \|T(x)\| &\leq \|T\| \\ \|T(x)\| &\leq \|T\| \cdot \|x\| \end{aligned}$$

O que prova (b). ■

Capítulo 3

Algumas Noções de Cálculo Diferencial em Espaços Normados

Neste capítulo apresentaremos os principais resultados deste trabalho. A saber, a Regra da Cadeia e a Desigualdade do Valor Médio. Faremos algumas aplicações, exemplos e abordaremos, de maneira breve, algumas diferenças do Cálculo caso real para espaços normados. Para um estudo mais completo sobre os conceitos de Cálculo Diferencial em Espaços Normados indicamos [3, 12].

3.1 Derivada de Fréchet

Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto aberto e $a \in X$ é um ponto de acumulação de X , de acordo com [13]. Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ possui *derivada* em um ponto a , indicada por $f'(a)$ ou $\frac{df}{dx}(a)$, quando o limite

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

existir e for um número finito. De modo equivalente, quando

$$|f(a+h) - f(a) - f'(a)h| = o(h),$$

onde o símbolo $o(h)$ significa que o lado direito é igual a uma função $\varepsilon(h)$ tal que

$$\frac{|\varepsilon(h)|}{|h|} \rightarrow 0 \quad \text{quando } |h| \rightarrow 0.$$

Ou ainda, quando para todo $h \neq 0$, tal que $a+h \in X$ tem-se

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + r(h) \quad \text{com} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$

Além disso, se existir uma constante L tal que se possa escrever

$$f(a+h) = f(a) + L \cdot h + r(h), \quad \text{com } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0,$$

podemos concluir que $L = f'(a)$.

Quando a função f possuir derivada em todos os pontos do seu domínio, diremos que f é derivável (ou diferenciável). As abordagens acima são normalmente utilizadas pelos livros tradicionais que tratam derivadas no caso real como pode ser visto em [10, 13].

Algumas terminologias interessantes, como por exemplo, devido a relação $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0$, dizemos que o "resto" $r(h)$ tende para zero mais rapidamente do que h . Dizemos também que $r(h)$ é um infinitésimo (função cujo limite é zero) de ordem superior a 1, relativamente a h .

Em [12] é feito alguns comentários sobre algumas adaptações ao realizar a transição de análise real para espaços normados gerais. Por exemplo, quando queremos generalizar a noção de derivada para uma função definida em um conjunto aberto de um espaço \mathbb{R}^n , ou mais geralmente, para uma função definida em um conjunto aberto de um espaço vetorial normado E e tomando valores em outro espaço vetorial normado F , $f'(a)$ é um operador linear contínuo.

A seguir definiremos diferenciabilidade para aplicações definidas entre espaços normados. Para isso, consideraremos E e F espaços vetoriais normados sobre \mathbb{R} .

Definição 3.1.1. Sejam $U \subset E$ um conjunto aberto e $f : U \rightarrow F$ uma aplicação dada. Dizemos que a aplicação f é *diferenciável* em um ponto $a \in U$ se existir um operador linear contínuo $f'(a) \in \mathcal{L}(E, F)$ tal que

$$\|f(a+h) - f(a) - f'(a)h\| = o(\|h\|).$$

Equivalentemente, pode-se escrever

$$f(a+h) - f(a) - f'(a)h = r(h),$$

onde $\frac{\|r(h)\|}{\|h\|} \rightarrow 0$ quando $\|h\| \rightarrow 0$. O operador $f'(a)$ é chamado de *derivada de Fréchet* da aplicação f no ponto a . Quando f for diferenciável em todos os pontos de U diremos que f é diferenciável em U .

Exemplo 3.1.1. Sejam E, F espaços normados e $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Para $b \in F$, defina

$$f : E \rightarrow F, \quad f(x) = Tx + b.$$

Então, f é diferenciável em E e $f'(x) = T$ para todo $x \in E$, isto é, $f' = T$. Com efeito, dado

$h \in E$, temos

$$f(x+h) - f(x) = (Tx + Th + b) - (Tx + b) = Th = Th + 0,$$

nesse caso definindo $r(h) = 0$, temos $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|r(h)\|}{\|h\|} = 0$. Portanto, f é diferenciável e vale $f'(x) = T$. Sabendo que x é qualquer, concluímos que $f' = T$.

Um espaço de Hilbert E é um espaço normado completo cuja norma $\|\cdot\|$ é induzida por um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, a saber, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Para mais informações sobre Espaço de Hilbert, sugerimos [3, 14].

Sejam E e F espaços vetoriais normados. Uma aplicação $f : E \times E \rightarrow F$ é dita bilinear quando é linear separadamente em cada uma de suas variáveis. Ou seja, para quaisquer $x, y, z \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se:

- $B(x+z, y) = B(x, y) + B(z, y)$,
- $B(\alpha x, y) = \alpha B(x, y)$,
- $B(x, y+z) = B(x, y) + B(x, z)$,
- $B(x, \alpha y) = \alpha B(x, y)$.

É simétrica quando $B(x, y) = B(y, x)$, para quaisquer $x, y \in E$. É contínua, ou limitada, se existe uma constante real $M \geq 0$ tal que, para quaisquer $x, y \in E$:

$$|B(x, y)| \leq M\|x\|\|y\|.$$

Exemplo 3.1.2. . Sejam E um espaço de Hilbert real e $a : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear simétrica e contínua em E . Fixe $b \in E$ e defina

$$f(x) = \frac{1}{2}a(x, x) - \langle b, x \rangle,$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ representa o produto interno em E . Dado $h \in E$, temos

$$f(x+h) - f(x) = a(x, h) + \frac{1}{2}a(h, h) - \langle b, h \rangle.$$

Como $a(\cdot, \cdot)$ é contínua, existe uma constante $M > 0$ tal que

$$|a(h, h)| \leq M\|h\|^2. \tag{3.1}$$

Expandimos $f(x + h)$ usando as propriedades de bilinearidade e simetria de a , e a linearidade do produto interno, obtemos

$$\begin{aligned} f(x + h) &= \frac{1}{2}a(x + h, x + h) - \langle b, x + h \rangle \\ &= \frac{1}{2}[a(x, x) + 2a(x, h) + a(h, h)] - [\langle b, x \rangle + \langle b, h \rangle]. \end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned} f(x + h) - f(x) &= \left[\frac{1}{2}a(x, x) - \frac{1}{2}a(x, x) \right] + [-\langle b, x \rangle + \langle b, x \rangle] \\ &\quad + [a(x, h) - \langle b, h \rangle] + \frac{1}{2}a(h, h) \\ &= \underbrace{[a(x, h) - \langle b, h \rangle]}_{f'(x)h} + \underbrace{\frac{1}{2}a(h, h)}_{r(h)} \end{aligned}$$

Agora, mostraremos que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0$, onde $r(h) = \frac{1}{2}a(h, h)$. De fato, segue de (3.1) que

$$|r(h)| = \left| \frac{1}{2}a(h, h) \right| \leq \frac{M}{2}\|h\|^2,$$

o que implica

$$0 \leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|r(h)|}{\|h\|} \leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{M}{2}\|h\|^2}{\|h\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{M}{2}\|h\| = 0.$$

Portanto, pela definição de derivada de Fréchet concluímos que

$$f'(x)h = a(x, h) - \langle b, h \rangle \quad \text{para todos } x, h \in E.$$

Isso mostra o desejado.

Exemplo 3.1.3. Seja $M(n, \mathbb{R})$ o espaço de todas as matrizes $n \times n$ com entradas reais. Seja $GL(n, \mathbb{R})$ o conjunto de todas as matrizes invertíveis em $M(n, \mathbb{R})$. Então,

- (a) $GL(n, \mathbb{R})$ é um conjunto aberto em $M(n, \mathbb{R})$.
- (b) A aplicação $f : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow M(n, \mathbb{R})$ definida por $f(A) = A^{-1}$ é diferenciável. Além disso,

$$f'(A)H = -A^{-1}HA^{-1}, \quad \text{para toda } H \in M(n, \mathbb{R}).$$

- (a) O conjunto das matrizes invertíveis é definido como:

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n, \mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\}.$$

Como a função determinante $\det : M(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, o conjunto $\mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ é aberto em \mathbb{R} e $GL(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, concluímos que $GL(n, \mathbb{R})$ é um conjunto aberto.

(b) O candidato a derivada é

$$L(H) = -A^{-1}HA^{-1}.$$

Além disso, temos

$$A^{-1} - (A + H)^{-1} = A^{-1}H(A + H)^{-1}.$$

Pois

$$\begin{aligned} A^{-1} - (A + H)^{-1} &= A^{-1} \underbrace{(A + H)(A + H)^{-1}}_I - (A + H)^{-1} \\ &= [A^{-1}(A + H)](A + H)^{-1} - I \cdot (A + H)^{-1} \\ &= [A^{-1}(A + H) - I](A + H)^{-1} \\ &= \left[\underbrace{A^{-1}A}_I + A^{-1}H - I \right] (A + H)^{-1} \\ &= [I + A^{-1}H - I](A + H)^{-1} \\ &= A^{-1}H(A + H)^{-1}. \end{aligned}$$

Definindo

$$r(H) = f(A + H) - f(A) - L(H),$$

mostraremos que $\lim_{\|H\| \rightarrow 0} \frac{\|r(H)\|}{\|H\|} = 0$. Com efeito,

$$\begin{aligned} r(H) &= (A + H)^{-1} - A^{-1} - (-A^{-1}HA^{-1}) \\ &= -(A^{-1} - (A + H)^{-1}) - (-A^{-1}HA^{-1}) \\ &= -A^{-1}H(A + H)^{-1} + A^{-1}HA^{-1} \\ &= A^{-1}HA^{-1} - A^{-1}H(A + H)^{-1} \\ &= A^{-1}H[A^{-1} - (A + H)^{-1}] \\ &= A^{-1}H[A^{-1}H(A + H)^{-1}] \\ &= (A^{-1}H)^2(A + H)^{-1}. \end{aligned}$$

Segue que

$$\frac{\|r(H)\|}{\|H\|} \leq \frac{\|A^{-1}\|^2 \|H\|^2 \|(A+H)^{-1}\|}{\|H\|} = \|A^{-1}\|^2 \|H\| \|(A+H)^{-1}\|.$$

Assim, quando $\|H\| \rightarrow 0$, têm-se:

- (I) $\|A^{-1}\|^2$ é uma constante;
- (II) $\|H\| \rightarrow 0$;
- (III) $\|(A+H)^{-1}\|$ é limitado numa vizinhança de A , pois tende a $\|A^{-1}\|$.

Logo,

$$\lim_{\|H\| \rightarrow 0} \frac{\|r(H)\|}{\|H\|} = 0.$$

Portanto, a função é diferenciável e a derivada é o operador $L(H)$, isto é, $f'(A)H = -A^{-1}HA^{-1}$. Isso encerra a demonstração.

Vejamos a seguir algumas consequências da definição de derivada de Fréchet, para isso, consideraremos $U \subset E$ um conjunto aberto e $f : U \rightarrow F$ uma aplicação.

Proposição 3.1.1. *Se f é diferenciável em $a \in U$, então f é contínua nesse ponto.*

Demonstração. Pela definição de diferenciabilidade no ponto a , temos

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + r(h),$$

onde $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|r(h)\|}{\|h\|} = 0$. Mostraremos que $\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a)$, isso garante que f é contínua em a . Analisando o limite de cada termo do lado direito quando $h \rightarrow 0$, têm-se:

- (I) $f(a)$ constante;
- (II) $f'(a)h$ tende a zero, pois $f'(a)$ é um operador linear contínuo, isto é, $\|f'(a)h\| \leq \|f'(a)\| \|h\|$, então $\|f'(a)h\| \rightarrow 0$ quando $\|h\| \rightarrow 0$;
- (III) $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0$, pois f é diferenciável em a , o que implica

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} r(h) = \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \left(\frac{r(h)}{\|h\|} \|h\| \right) = \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} \cdot \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \|h\| = 0 \cdot 0 = 0.$$

Portanto

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a) + 0 + 0 = f(a).$$

Isso mostra o desejado. ■

Proposição 3.1.2. *Se f é diferenciável em $a \in U$, então a derivada $f'(a) \in \mathcal{L}(E, F)$ é única.*

Demonstração. Suponha que $T \in \mathcal{L}(E, F)$ satisfaça

$$f(a+h) - f(a) - Th = o_1(\|h\|). \quad (3.2)$$

Por outro lado, pela definição da diferenciabilidade de f em a também temos

$$f(a+h) - f(a) - f'(a)h = o_2(\|h\|) \quad (3.3)$$

Subtraindo as equações em (3.2) de (3.3), obtemos

$$f'(a)h - Th = o_1(\|h\|) - o_2(\|h\|) := o(\|h\|).$$

Assim, $(f'(a) - T)h = o(\|h\|)$, isto é,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|(f'(a) - T)h\|}{\|h\|} = 0. \quad (3.4)$$

Agora, fixe um vetor unitário $v \in E$ ($\|v\| = 1$) e defina $h = tv$, onde $t \in \mathbb{R}$. Quando $t \rightarrow 0$ tem-se $h \rightarrow 0$, logo segue de (3.4) e pela linearidade de $f'(a) - T$ que

$$\|(f'(a) - T)v\| = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{|t| \cdot \|(f'(a) - T)v\|}{|t| \cdot \|v\|} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\|(f'(a) - T)(tv)\|}{\|tv\|} \right) = 0.$$

Segue que

$$\|(f'(a) - T)v\| = 0 \implies (f'(a) - T)v = 0 \implies f'(a)v = Tv \quad (3.5)$$

para qualquer vetor unitário v . Para finalizar, considere $x \in E$ com $x \neq 0$. Definindo, $v = \frac{x}{\|x\|}$, segue da última igualdade de (3.5) que

$$f'(a)v = Tv \implies f'(a) \left(\frac{x}{\|x\|} \right) = T \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \implies \frac{f'(a)x}{\|x\|} = \frac{Tx}{\|x\|} \implies f'(a)x = Tx,$$

para qualquer $x \in E$ não nulo, como a igualdade também vale para $x = 0$, concluímos que $f'(a) = T$. Isso mostra a unicidade da derivada. ■

3.2 Regra da Cadeia em Espaços Normados

A derivada de Fréchet segue as regras usuais que se conhece do estudo de cálculo e de análise na reta. Por exemplo, a derivada da soma é soma das derivadas, isto é, se f e g são funções

diferenciáveis em a , então

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a), \quad (\lambda f)'(a) = \lambda f'(a).$$

Vejamos isso com mais detalhes no resultado a seguir.

Proposição 3.2.1. *Sejam E e F espaços vetoriais normados e $U \subset E$ um conjunto aberto. Suponha que $f : U \rightarrow F$ e $g : U \rightarrow F$ sejam funções diferenciáveis num ponto $a \in U$, e seja λ um escalar. Então:*

(a) *A função soma $f + g$ é diferenciável em a e*

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$

(b) *A função λf é diferenciável em a e*

$$(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a).$$

Demonstração. Por hipótese, como f e g são diferenciáveis em a , existem operadores lineares contínuos $f'(a), g'(a) \in \mathcal{L}(E, F)$ tais que

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + r_1(h), \quad \text{onde } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|r_1(h)\|}{\|h\|} = 0, \quad (3.6)$$

$$g(a + h) = g(a) + g'(a)h + r_2(h), \quad \text{onde } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|r_2(h)\|}{\|h\|} = 0. \quad (3.7)$$

(a) Seja $h \in E$ tal que $a + h \in U$. Logo,

$$(f + g)(a + h) = f(a + h) + g(a + h).$$

Segue de (3.6) e (3.7) que

$$\begin{aligned} (f + g)(a + h) &= [f(a) + f'(a)h + r_1(h)] + [g(a) + g'(a)h + r_2(h)] \\ &= \underbrace{[f(a) + g(a)]}_{(f+g)(a)} + \underbrace{[f'(a) + g'(a)]h}_{L(h)} + \underbrace{[r_1(h) + r_2(h)]}_{R(h)} \end{aligned}$$

Definindo $R(h) = r_1(h) + r_2(h)$, obtemos pela desigualdade triangular que

$$\frac{\|R(h)\|}{\|h\|} = \frac{\|r_1(h) + r_2(h)\|}{\|h\|} \leq \frac{\|r_1(h)\|}{\|h\|} + \frac{\|r_2(h)\|}{\|h\|}.$$

Então, fazendo $h \rightarrow 0$, obtemos

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|R(h)\|}{\|h\|} = 0 + 0 = 0.$$

Portanto, $(f + g)$ é diferenciável em a e $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.

(b) Veja que

$$(\lambda f)(a + h) = \lambda f(a + h) = \lambda[f(a) + f'(a)h + r_1(h)].$$

Pela linearidade da multiplicação por escalar, obtemos

$$(\lambda f)(a + h) = \lambda f(a) + \lambda[f'(a)h] + \lambda r_1(h).$$

Definindo $R(h) = \lambda r_1(h)$, tem-se

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|\lambda r_1(h)\|}{\|h\|} = |\lambda| \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|r_1(h)\|}{\|h\|} = |\lambda| \cdot 0 = 0.$$

Isso mostra que (λf) é diferenciável em a e $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$. ■

Agora, começaremos as tratativas para abordar um dos principais resultados deste trabalho. Inicialmente, relembando a sua versão em análise na reta. Indicamos como referência [9, 13].

Teorema 3.2.1 (Regra da cadeia em \mathbb{R}). *Sejam $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$, $f(X) \subset Y$, $a \in X \cap X'$, $b = f(a) \in Y \cap Y'$. Se existem $f'(a)$ e $g'(b)$ então $g \circ f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável no ponto a , valendo*

$$(g \circ f)'(a) = g'(b) \cdot f'(a).$$

Demonstração. Temos

$$\begin{cases} f(a + h) = f(a) + [f'(a) + \rho] \cdot h, & \text{onde } \lim_{h \rightarrow 0} \rho(h) = 0, \\ g(b + k) = g(b) + [g'(b) + \sigma] \cdot k, & \text{onde } \lim_{k \rightarrow 0} \sigma(k) = 0. \end{cases}$$

Estamos escrevendo, por simplicidade, ρ e σ em vez de $\rho(h)$ e $\sigma(k)$ respectivamente. Pondo $k = f(a + h) - f(a) = [f'(a) + \rho] \cdot h$, temos $f(a + h) = b + k$ e

$$\begin{aligned} (g \circ f)(a + h) &= g[f(a + h)] = g(b + k) = g(b) + [g'(b) + \sigma] \cdot k \\ &= g(b) + [g'(b) + \sigma] \cdot [f'(a) + \rho] \cdot h \\ &= g(b) + [g'(b) \cdot f'(a) + \theta] \cdot h, \end{aligned}$$

com $\theta(h) = \sigma(f(a + h) - f(a)) \cdot [f'(a) + \rho(h)] + g'(b) \cdot \rho(h)$. Como f é contínua no ponto a e σ

é contínua no ponto 0, temos $\lim_{h \rightarrow 0} \sigma(f(a+h) - f(a)) = 0$ logo $\lim_{h \rightarrow 0} \theta(h) = 0$, o que prova o teorema. ■

O teorema a seguir é o primeiro resultado principal do nosso trabalho, ele foi estudado em [12].

Teorema 3.2.2 (Regra da Cadeia). *Sejam E, F e G espaços normados reais, U um conjunto aberto em E e V um conjunto aberto em F . Sejam $f : U \rightarrow F$ e $g : V \rightarrow G$ aplicações contínuas, tais que para um ponto dado $a \in U$, tem-se $f(a) = b \in V$. No conjunto aberto $U' = f^{-1}(V)$, que contém a , defina*

$$h = g \circ f : U' \rightarrow G.$$

Se f é diferenciável em a e g em b , então h é diferenciável em a e

$$h'(a) = g'(f(a)) \circ f'(a). \quad (3.8)$$

Demonstração. Como f é diferenciável no ponto a e g diferenciável no ponto b , temos

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= f'(a)(x - a) + \varepsilon(x - a) \\ g(y) - g(b) &= g'(b)(y - b) + \eta(y - b), \end{aligned}$$

onde

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varepsilon(x - a)}{\|x - a\|} = \lim_{y \rightarrow b} \frac{\eta(y - a)}{\|y - a\|} = 0. \quad (3.9)$$

Agora, note que

$$\begin{aligned} h(x) - h(a) &= g(f(x)) - g(f(a)) = g(y) - g(b) = g'(b)(y - b) + \eta(y - b) \\ &= g'(f(a))(f(x) - f(a)) + \eta(f(x) - f(a)) \\ &= g'(f(a))(f'(a)(x - a) + \varepsilon(x - a)) + \eta(f(x) - f(a)) \end{aligned}$$

Assim,

$$h(x) - h(a) = g'(f(a))f'(a)(x - a) + g'(f(a))\varepsilon(x - a) + \eta(f(x) - f(a)). \quad (3.10)$$

O nosso objetivo agora é mostrar que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g'(f(a))\varepsilon(x - a) + \eta(f(x) - f(a))}{\|x - a\|} = 0, \quad (3.11)$$

o que implica que $h'(a) = g'(f(a))f'(a)$. Para isso, note que como $g'(f(a))$ é contínua, segue da pela Proposição 2.2.1 que

$$\|g'(f(a))\varepsilon(x - a)\| \leq \|g'(f(a))\| \cdot \|\varepsilon(x - a)\| = o(\|x - a\|). \quad (3.12)$$

Para a segunda expressão a ser verificada temos que

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x - a) + \varepsilon(x - a)$$

logo

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(a)\| &\leq \|f'(a)(x - a)\| + \|\varepsilon(x - a)\| \\ &\leq \|f'(a)\| \|x - a\| + \|\varepsilon(x - a)\| \end{aligned}$$

Como $\|f'(a)\|$ é contínua, então de acordo com o item (f) do Teorema 2.2.1

$$\|f'(a)\| = \sup\{\|f'(a)(x)\| : x \in E, \|x\| \leq 1\} \leq M$$

Assim temos

$$\|f(x) - f(a)\| \leq M\|x - a\| + \|\varepsilon(x - a)\|$$

Com $\varepsilon = M$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$\|x - a\| < \delta \implies \frac{\|\varepsilon(x - a)\|}{\|x - a\|} < M \implies \|\varepsilon(x - a)\| \leq M\|x - a\|$$

Desse modo

$$\|f(x) - f(a)\| \leq 2M\|x - a\|$$

Fazendo $2M = M'$ temos que para $\|x - a\|$ suficientemente pequeno,

$$\|f(x) - f(a)\| \leq M'\|x - a\| \quad (3.13)$$

e assim $\|f(x) - f(a)\| \longrightarrow 0$ quando $\|x - a\| \longrightarrow 0$.

Agora, mostraremos que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\|\eta(f(x) - f(a))\|}{\|x - a\|} = 0. \quad (3.14)$$

De fato, veja que

$$\begin{aligned}
0 &\leq \lim_{x \rightarrow a} \frac{\|\eta(f(x) - f(a))\|}{\|x - a\|} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\|\eta(f(x) - f(a))\|}{\|x - a\|} \cdot \frac{\|f(x) - f(a)\|}{\|f(x) - f(a)\|} \\
&= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\|\eta(f(x) - f(a))\|}{\|f(x) - f(a)\|} \cdot \frac{\|f(x) - f(a)\|}{\|x - a\|} \leq \underbrace{\lim_{x \rightarrow a} \frac{\|\eta(f(x) - f(a))\|}{\|f(x) - f(a)\|}}_{\text{pela continuidade de } f, \text{ por (3.9) e (3.13)}} \cdot M = 0.
\end{aligned}$$

Isso mostra (3.14). Note também que pela continuidade e linearidade de $g'(f(a))$ e por (3.9), obtemos

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g'(f(a))\varepsilon(x - a)}{\|x - a\|} = \lim_{x \rightarrow a} g'(f(a)) \left(\frac{\varepsilon(x - a)}{\|x - a\|} \right) = g'(f(a)) \cdot 0 = 0. \quad (3.15)$$

Portanto, a afirmação feita em (3.11) segue de (3.14) e (3.15). Isso mostra o teorema. ■

A seguir, demonstraremos algumas consequências da Regra da Cadeia. Para isso, escreveremos $F = F_1 \times \cdots \times F_m$ para indicar o produto cartesiano dos espaços normados F_1, \dots, F_m . Para $1 \leq i \leq m$, definiremos a *projeção*

$$p_i : F \rightarrow F_i, \quad p_i(x_1, \dots, x_i, \dots, x_m) = x_i, \quad (3.16)$$

e a *injeção* por

$$u_i : F_i \rightarrow F, \quad u_i(x_i) = (0, \dots, 0, x_i, 0, \dots, 0), \quad (3.17)$$

com 0 em todas as coordenadas, exceto na i -ésima. Então,

$$\begin{cases} p_i \circ u_i = I_{F_i}, \\ \sum_{i=1}^m u_i \circ p_i = I_F, \end{cases} \quad (3.18)$$

Isso quer dizer que dado um $y \in F_i$:

$$\begin{aligned}
(p_i \circ u_i)(y) &= p_i(u_i(y)); \\
&= p_i(0, \dots, y, \dots, 0); \\
&= y.
\end{aligned}$$

Logo, $p_i \circ u_i = I_{F_i}$.

Para a segunda equação, dado $x = (x_1, \dots, x_m) \in F$

$$\sum_{i=1}^m (u_i \circ p_i)(x) = (u_1 \circ p_1)(x) + \cdots + (u_m \circ p_m)(x); \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned}
&= u_1(p_1)(x) + \cdots + u_m(p_m)(x); \\
&= (x_1, 0, \dots, 0) + \cdots + (0, \dots, 0, x_m); \\
&= (x_1, \dots, x_m); \\
&= x.
\end{aligned}$$

Logo, $\sum_{i=1}^m u_i \circ p_i = I_F$.

Proposição 3.2.2. *Sejam E um espaço normado, $F := F_1 \times \cdots \times F_m$ e p_i as projeções descritas acima. Considere $U \subset E$ um conjunto aberto e $f : U \rightarrow F$ uma aplicação. Então, f é diferenciável em um $a \in U$ se, e somente se, $f_i = p_i \circ f : U \rightarrow F_i$ é diferenciável em a para cada i . Neste caso,*

$$f'(a) = \sum_{i=1}^m u_i \circ f'_i(a). \quad (3.20)$$

Demonstração. Se f é diferenciável, então f_i também o é, pois é a composição de f com uma aplicação linear contínua, que é sempre diferenciável (veja Exemplo 3.1.1). Assim, pelo Teorema 3.2.2,

$$f'_i(a) = p_i \circ f'(a). \quad (3.21)$$

Reciprocamente, se f_i é diferenciável para cada i , obtemos de (3.18) que

$$f = \sum_{i=1}^m u_i \circ f_i, \quad (3.22)$$

e como as aplicações u_i são lineares, logo são diferenciáveis, logo pelo Teorema 3.2.2, obtemos (3.20). Isso completa a demonstração. ■

Analogamente, escreveremos $E := E_1 \times \cdots \times E_m$ para indicar o produto cartesiano dos espaços normados E_1, \dots, E_m . Dado $a = (a_1, \dots, a_n) \in E$, definiremos

$$\lambda_i : E_i \rightarrow E, \quad \lambda_i(x_i) = (a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

Proposição 3.2.3. *Sejam $U \subset E := E_1 \times \cdots \times E_m$ um conjunto aberto, F um espaço normado e $f : U \rightarrow F$ uma aplicação diferenciável em $a = (a_1, \dots, a_i, \dots, a_m) \in U$. Então, para cada $i = 1, \dots, m$, a aplicação $f \circ \lambda_i$ é diferenciável em a_i . Além disso,*

$$f'(a)(h_1, \dots, h_n) = \sum_{i=1}^n (f \circ \lambda_i)'(a_i)h_i \quad (3.23)$$

para qualquer $h = (h_1, \dots, h_n) \in E$.

Demonstração. Note que $\lambda_i(x_i) = a + u_i(x_i - a_i)$, logo pelo Exemplo (3.1.1), temos $\lambda_i'(x_i) = u_i$, para todo $x_i \in E_i$. Portanto, como f e λ_i são diferenciáveis, então pelo Teorema 3.2.2 a aplicação $f \circ \lambda_i$ é diferenciável e vale

$$(f \circ \lambda_i)'(a_i) = f'(a) \circ u_i.$$

De acordo com a Equação (3.19)

$$\sum_{i=1}^n u_i \circ p_i = I_E,$$

(onde I_E é a aplicação identidade de E), então

$$\begin{aligned} f'(a) \cdot h &= f'(a) \cdot \left(\sum_{i=1}^n (u_i \circ p_i) \cdot h \right) \\ &= \sum_{i=1}^n f'(a) \cdot (u_i(p_i(h))) \\ &= \sum_{i=1}^n (f'(a) \circ u_i)(p_i(h)) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n (f'(a) \circ u_i) \circ p_i \right) \cdot h. \end{aligned}$$

Logo, conclui-se que

$$f'(a) = \sum_{i=1}^n (f'(a) \circ u_i) \circ p_i.$$

Este resultado expressa a derivada total como a soma das derivadas parciais compostas com as projeções. Isso mostra o resultado. ■

Definição 3.2.1. . A derivada de $f \circ \lambda_i$ em a_i é chamada de *i-ésima derivada parcial* de f em a e é denotada por $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ ou por $\partial_i f(a)$.

A Definição 3.2.1 generaliza o conceito de derivada parcial para espaços normados. Para compreender, analisamos os componentes da composição $f \circ \lambda_i$. Seja f uma função definida em um espaço produto $E_1 \times \cdots \times E_n$ e $a = (a_1, \dots, a_n)$ um ponto fixo. A função $\lambda_i : E_i \rightarrow E_1 \times \cdots \times E_n$ é uma "inclusão" que injeta a variável x_i na i -ésima posição do vetor, mantendo as demais coordenadas fixas nos valores de a :

$$\lambda_i(x_i) = (a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

Geometricamente, apresentado na Figura 3.1, λ_i define uma reta (ou subespaço afim) que passa por a e é paralela ao i -ésimo eixo. A função composta $g_i = f \circ \lambda_i$ restringe a função original

f a esse subespaço unidimensional

$$g_i(x_i) = f(a_1, \dots, x_i, \dots, a_n).$$

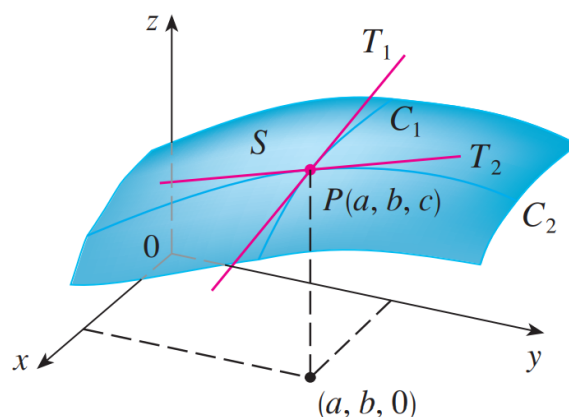


Figura 3.1: As derivadas parciais de f em (a, b) são as inclinações das retas tangentes a C_1 e C_2 . Fonte: Stewart [20], p. 814.

Isso corresponde ao processo intuitivo de "congelar" todas as variáveis exceto x_i , transformando f em uma função de uma única variável (no sentido do subespaço E_i).

A definição estabelece que a derivada parcial é simplesmente a derivada dessa restrição

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = (f \circ \lambda_i)'(a_i),$$

isto é, calculamos a taxa de variação de f quando nos movemos exclusivamente na direção do componente i . Se $E_i = \mathbb{R}$, esta é uma derivada escalar usual. Quando E_i for um espaço de Banach, dizemos que é uma derivada de Fréchet restrita.

Exemplo 3.2.1. Vejamos como a derivada definida acima recupera, por exemplo, gradiente uma função definida em \mathbb{R}^n . Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em um ponto $a \in U$. Então,

$$f'(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right).$$

Como $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável, então $f'(a)$ é, por definição, um funcional linear contínuo de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}

$$f'(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}).$$

Como em \mathbb{R}^n funcional linear L pode ser representado como o produto interno, isto é, existe um

único vetor fixo v tal que

$$L(h) = \langle v, h \rangle.$$

Esse vetor fixo v será o gradiente $\nabla f(a)$. De fato, seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ a base canônica de \mathbb{R}^n . Qualquer vetor $h \in \mathbb{R}^n$ pode ser escrito como $h = \sum_{i=1}^n h_i e_i$. Pela linearidade do operador $f'(a)$, temos

$$f'(a)h = f'(a) \left(\sum_{i=1}^n h_i e_i \right) = \sum_{i=1}^n h_i f'(a)e_i.$$

O termo $f'(a)e_i$ representa a derivada parcial de f na direção do vetor e_i , isto é,

$$f'(a)e_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

Assim,

$$f'(a)h = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right), h \right\rangle.$$

Nesse caso, escrevemos

$$f'(a) \equiv \nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right).$$

Exemplo 3.2.2. . Seja U como no exemplo anterior, e seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciável em $a \in U$. Então, $f'(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ pode ser representado por uma matriz $m \times n$. De fato, se $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$, então, por (3.20) e (3.23), deduzimos que $f'(a)$ é dado pela matriz Jacobiana usual.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix}.$$

Este exemplo estabelece a conexão fundamental entre a derivada de Fréchet (operador linear abstrato) e a Matriz Jacobiana (ferramenta de cálculo). A construção segue os passos: A derivada $f'(a)$ é um operador linear de \mathbb{R}^n para \mathbb{R}^m . Da Álgebra Linear, sabemos que fixadas as bases canônicas de ambos os espaços, qualquer transformação linear $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é univocamente representada por uma matriz M de dimensão $m \times n$. A função vetorial f pode ser vista como um conjunto de m funções escalares componentes

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}, \quad \text{onde } f_i : U \rightarrow \mathbb{R}.$$

Para encontrar a matriz que representa $f'(a)$, determinamos como o operador atua nos vetores da base canônica $\{e_1, \dots, e_n\}$ do domínio (\mathbb{R}^n). A j -ésima coluna da matriz é dada pelo vetor $f'(a)e_j$. Pelo Exemplo 3.2.1, sabemos que $f'(a)e_j$ corresponde à derivada parcial de f em relação a x_j

$$f'(a)e_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(a) \end{pmatrix}.$$

Ou seja, a coluna j da matriz contém as derivadas de todas as funções componentes em relação à variável x_j . Organizando essas colunas lado a lado, obtemos a matriz J onde a entrada J_{ij} é a derivada da i -ésima componente em relação à j -ésima variável

$$J = [J_{ij}] = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right].$$

Isso resulta na estrutura

$$f'(a) \cong \begin{bmatrix} \nabla f_1(a) \\ \vdots \\ \nabla f_m(a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Assim, a ação da derivada em um vetor incremento h torna-se uma multiplicação matricial: $f'(a)h = J \cdot h$.

3.3 Desigualdade do Valor Médio

O segundo resultado principal deste trabalho será abordado nessa seção, o teorema da Desigualdade do Valor Médio, veremos que em espaços abstratos a igualdade que tem em \mathbb{R} não se preserva. Para um estudo mais aprofundado indicamos [3, 12, 13].

Teorema 3.3.1 (Teorema do Valor Médio de Lagrange). *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Se f é derivável em (a, b) , existe $c \in (a, b)$, tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Um enunciado equivalente seria: Seja $f : [a, a+h] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, derivável em $(a, a+h)$.

Existe $t, 0 < t < 1$, tal que

$$f(a+h) = f(a) + f'(a+th) \cdot h.$$

Demonstração. Seja $g(x)$ o polinômio de grau ≤ 1 tal que $g(a) = f(a)$ e $g(b) = f(b)$. Então $g'(x)$ é constante e, de fato, $g'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ para todo $x \in [a, b]$. A função $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $\varphi(x) = f(x) - g(x)$, satisfaz as hipóteses do Teorema de Rolle, logo existe $c \in (a, b)$, tal que $\varphi'(c) = 0$, o que dá a conclusão desejada. ■

Observação 3.3.1. Geometricamente, $f'(c) = [f(b) - f(a)]/(b - a)$ significa que a tangente ao gráfico de f no ponto c é paralela à secante que constitui o gráfico de g .

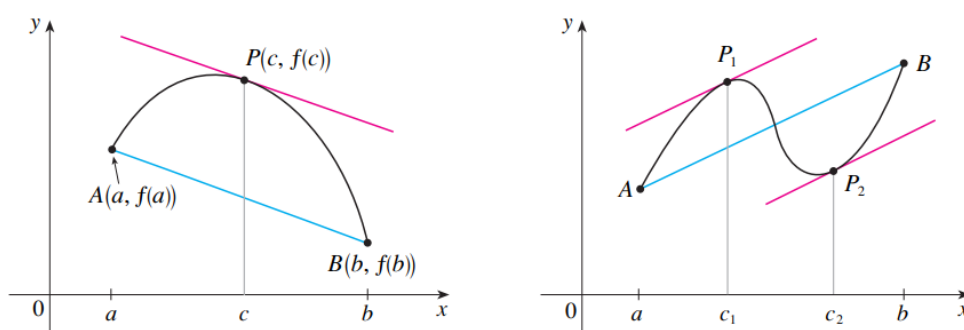


Figura 3.2: Representação Geométrica da Desigualdade do Valor Médio. Fonte: Stewart [19], p. 258.

Corolário 3.3.1. Se uma função contínua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ possui derivada nula em todos os pontos $x \in (a, b)$ então f é constante.

Demonstração. Com efeito, para todo $x \in (a, b)$, temos $f(x) - f(a) = f'(c)(x - a)$ onde $c \in (a, x)$. Como $f'(c) = 0$, temos $f(x) - f(a) = 0$, isto é, $f(x) = f(a)$ para todo $x \in [a, b]$ e, portanto, f é constante. ■

Corolário 3.3.2. Se $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas, deriváveis em (a, b) , e $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in (a, b)$ então existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) = f(x) + c$ para todo $x \in [a, b]$.

Demonstração. Com efeito, podemos aplicar o corolário anterior à diferença $g - f$. ■

Partindo para sua generalização aos espaços normados, segundo [12]

Definição 3.3.1. Seja E um espaço normado real, e sejam $a, b \in E$. Então pelo intervalo $[a, b]$, queremos dizer o conjunto

$$\{x \in E \mid x = (1 - t)a + tb, 0 \leq t \leq 1\}.$$

O intervalo aberto (a, b) é definido de forma semelhante usando $0 < t < 1$.

A seguir apresentaremos o segundo principal resultado deste trabalho.

Teorema 3.3.2 (Teorema do Valor Médio). *Sejam E e F espaços lineares normados reais e U um conjunto aberto em E . Seja $f : U \rightarrow F$ diferenciável em U , e seja $[a, b] \subset U$. Então,*

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \|b - a\| \sup_{x \in [a, b]} \|f'(x)\|. \quad (3.24)$$

Demonstração. Dividiremos esta demonstração em alguns passos.

PASSO 1: Suponha que $f : U \subset \mathbb{R} \rightarrow F$ e seja

$$k = \sup_{x \in [a, b]} \|f'(x)\|.$$

Mostraremos que para qualquer $\varepsilon > 0$, vale

$$\|f(x) - f(a)\| \leq (k + \varepsilon)(x - a) + \varepsilon, \quad (3.25)$$

para $x \in [a, b]$. A desigualdade final segue ao fazer $\varepsilon \rightarrow 0$ e tomando $x = b$.

Consideremos o conjunto

$$V := \{x \in [a, b] \mid \|f(x) - f(a)\| > (k + \varepsilon)(x - a) + \varepsilon\}.$$

O nosso objetivo agora é mostrar que $V = \emptyset$. Para isso, suponha por contradição que o conjunto V é não-vazio. Por continuidade, note que V é um subconjunto aberto de $[a, b]$, além disso, V é limitado, logo seja $c = \inf V$ então $c \notin V$. Se $c = a$ então pela desigualdade acima $0 > \varepsilon$, logo $c \neq a$. Novamente, $c \neq b$, pois, caso contrário, teríamos $V = \{b\}$ o que não é possível. Portanto $a < c < b$ e $\|f'(c)\| \leq k$, pela definição de derivada (para $\varepsilon > 0$ dado), existe $\eta > 0$ tal que para todo $c \leq x < c + \eta$

$$\frac{\|f(x) - f(c)\|}{x - c} < \|f'(c)\| + \varepsilon \leq k + \varepsilon.$$

Isto implica que

$$\|f(x) - f(c)\| \leq (k + \varepsilon)(x - c).$$

Por outro lado, como $c \notin V$ então

$$\|f(c) - f(a)\| \leq (k + \varepsilon)(c - a) + \varepsilon.$$

Combinando as duas últimas desigualdades e usando a desigualdade triangular, obtemos

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(a)\| &\leq \|f(x) - f(c)\| + \|f(c) - f(a)\| \\ &\leq (k + \varepsilon)(x - c) + (k + \varepsilon)(c - a) + \varepsilon \end{aligned}$$

$$\leq (k + \varepsilon)(x - a) + \varepsilon.$$

Isto mostra que $x \notin V$ para todo $x \in [c, c + \eta)$, o que contradiz o fato de c ser o ínfimo de V . Portanto, $V = \emptyset$, e a desigualdade é provada para $f : \mathbb{R} \rightarrow F$.

PASSO 2: Vejamos o caso, geral. Considerando $f : U \rightarrow F$, definiremos a função restrição $h : [0, 1] \rightarrow F$ no segmento $[a, b]$:

$$h(t) = f(a + t(b - a)).$$

A função h satisfaz as condições do PASSO 1, pois tem domínio em \mathbb{R} . Segue pela Regra da Cadeia que

$$\|h'(t)\| = \|f'(a + t(b - a))(b - a)\| \leq \|f'(a + t(b - a))\| \|b - a\|.$$

Pelo PASSO 1, obtemos

$$\|f(b) - f(a)\| = \|h(1) - h(0)\| \leq (1 - 0) \sup_{t \in [0, 1]} \|h'(t)\|.$$

Agora, substituindo a desigualdade da norma, temos

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \sup_{t \in [0, 1]} (\|f'(a + t(b - a))\| \|b - a\|).$$

Portanto,

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \|b - a\| \sup_{x \in [a, b]} \|f'(x)\|.$$

■

Exemplo 3.3.1. Considere $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(t) = (\cos t, \sin t)$. Esta função representa a circunferência unitária no plano. Sua derivada é dada por $f'(t) = (-\sin t, \cos t)$. Note que, embora $f(2\pi) = f(0)$, não existe $c \in (0, 2\pi)$ tal que $f'(c) = (0, 0)$, pois $\|f'(t)\| = 1$ para todo t . Portanto a igualdade não se sustenta, mas a desigualdade evidencia o Teorema 3.3.2

Observação 3.3.2. De acordo com [14], um subconjunto X de um espaço vetorial E chama-se *convexo* quando para $a, b \in X$ temos que $[a, b] \subset X$, isto é, o segmento de reta que liga dois pontos quaisquer de X está contido em X . E também um espaço normado E , com métrica induzida pela norma, chama-se *convexo por caminhos* quando dois pontos quaisquer de E podem ser ligados por um caminho contido em E . Um conjunto $X \subset E$ diz-se *convexo por caminhos* quando o subespaço X tem essa propriedade. Por exemplo, todo conjunto convexo num espaço vetorial normado é convexo por caminhos.

Corolário 3.3.3. *Sejam E e F espaços lineares normados reais. Se $U \subset E$ é um conjunto aberto*

convexo e $f : U \rightarrow F$ é diferenciável em todos os pontos de U e verifica

$$\|f'(x)\| \leq k, \text{ para todo } x \in U,$$

então, para quaisquer x_1 e x_2 em U , temos

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq k\|x_1 - x_2\|. \quad (3.26)$$

Observação 3.3.3. Uma função que satisfaz (3.26) é chamada de função Lipschitz contínua com constante de Lipschitz k . Esta definição é a mesma que se apresenta em no Teorema 2.2.1 e é utilizada na demonstração do Teorema 3.2.2.

Corolário 3.3.4. *Sejam E e F espaços lineares normados reais, e seja $U \subset E$ um conjunto aberto. Seja $f : U \rightarrow F$ diferenciável em U . Assuma que U é conexo e que $f'(x) = 0$ para todo $x \in U$. Então, f é uma função constante.*

Demonstração. Seja $x_0 \in U$, e seja $B(x_0, \varepsilon) \subset U$ a bola aberta com centro em x_0 e raio $\varepsilon > 0$. Então, $B(x_0, \varepsilon)$ é um conjunto aberto convexo e, por (3.26), obtemos que $f(x) = f(x_0)$ neste conjunto, uma vez que $k = 0$. Assim, f é localmente constante. Então para qualquer $b \in F$, $f^{-1}(b)$ é um conjunto aberto, e como F é Hausdorff, ele também é fechado. Assim, pela conexidade de U , $f^{-1}(b) = \emptyset$ ou U . Se escolhermos $b = f(x_0)$ para algum $x_0 \in U$, obtemos que $f(x) = b$ para todo $x \in U$. ■

Proposição 3.3.1. *Sejam $E = E_1 \times \dots \times E_n$, o produto de espaços lineares normados reais, e F um espaço linear normado real. Seja $U \subset E$ um conjunto aberto, e seja $f : U \rightarrow F$ um mapa dado. Se as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ existem em cada ponto de U e se os mapas $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ são contínuos em $a \in U$ para cada $1 \leq i \leq n$, então f é diferenciável em a .*

Demonstração. Se f fosse diferenciável, então saberia-se o que $f'(a)$ deveria ser, isto é precisamos mostrar que

$$f'(a)h = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i. \quad (3.27)$$

Considere

$$\begin{aligned} & f(x_1, \dots, x_n) - f(a_1, \dots, a_n) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i) \\ &= f(x_1, \dots, x_n) - f(a_1, x_2, \dots, x_n) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)(x_1 - a_1) \\ &+ f(a_1, x_2, \dots, x_n) - f(a_1, a_2, \dots, x_n) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)(x_2 - a_2) \end{aligned}$$

$$+ \cdots + f(a_1, \dots, a_{n-1}, x_n) - f(a_1, \dots, a_n) - \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)(x_n - a_n) \quad (3.28)$$

Seja $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeno. Seja

$$g(\xi_1) = f(\xi_1, x_2, \dots, x_n) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)(\xi_1 - a_1).$$

Então,

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(a_1, x_2, \dots, x_n) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)(x_1 - a_1) = g(x_1) - g(a_1).$$

Mas g é diferenciável e

$$g'(\xi_1) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, x_2, \dots, x_n) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Como $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ é contínua, existe $\eta > 0$ tal que $\|g'(\xi_1)\| < \varepsilon$ sempre que $\|x_i - a_i\| < \eta$ para cada $1 \leq i \leq n$. Portanto, pelo teorema do valor médio,

$$\|g(x_1) - g(a_1)\| \leq \varepsilon \|x - a\|.$$

Temos estimativas semelhantes para os termos em cada linha de (3.28), o que por sua vez prova que

$$\|f(x) - f(a) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i)\| = o(\|x - a\|).$$

Isso mostra que f é diferenciável em a e que sua derivada em a é dada por (3.27). ■

Seja E um espaço normado e $X \subset E$ um subconjunto. Uma aplicação $f : X \rightarrow X$ é dita uma *contração* se existe uma constante real k , com $0 \leq k < 1$, tal que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|, \quad \forall x, y \in X. \quad (3.29)$$

A constante k é frequentemente chamada de *constante de Lipschitz* de f .

A condição $k < 1$ é essencial. Geometricamente, isso significa que a aplicação f “encolhe” as distâncias, a distância entre as imagens $f(x)$ e $f(y)$ é estritamente menor que a distância entre os pontos originais x e y (a menos que $x = y$).

Exemplo 3.3.2. Seja $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ uma aplicação contínua com derivada tal que $\sup_{x \in [a, b]} |f'(x)| < 1$. Então, f é uma contração.

Defina $k = \sup_{x \in (a, b)} |f'(x)|$. Por hipótese, temos que $0 \leq k < 1$.

Sejam $x, y \in [a, b]$ quaisquer. Pelo Teorema do Valor Médio, existe um ponto c entre x e y tal que:

$$f(x) - f(y) = f'(c)(x - y).$$

Tomando o valor absoluto em ambos os lados e observando que $|f'(c)| \leq k$ para todo c no intervalo, obtemos:

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)| \cdot |x - y| \leq k|x - y|.$$

Como $0 \leq k < 1$, conclui-se que f satisfaz a condição de Lipschitz com constante menor que 1, ou seja, f é uma contração.

Capítulo 4

Conclusão

O presente Trabalho de Conclusão de Curso atingiu seu objetivo principal ao explorar e formalizar as Extensões do Cálculo Diferencial da Reta aos Espaços Normados, focando na Regra da Cadeia e na Desigualdade do Valor Médio. O desenvolvimento teórico iniciou-se no Capítulo 2, onde foram estabelecidas as bases da Análise Funcional, revisando conceitos cruciais como o de Espaço Vetorial Normado e as propriedades dos Operadores Lineares Contínuos. Essa etapa foi fundamental, pois preparou o terreno para a introdução da principal ferramenta de generalização. O Capítulo 3 apresentou a definição rigorosa da Derivada de Fréchet. Esta derivada, definida como um operador linear limitado que aproxima a função, é a generalização que permite manter a essência linear do processo de diferenciação em ambientes vetoriais. A partir desta definição, pudemos progredir para os resultados centrais do trabalho. Finalmente, foram demonstradas as extensões dos resultados clássicos do cálculo:

- A Regra da Cadeia foi provada para composições de funções diferenciáveis à Fréchet entre espaços normados, confirmando que a estrutura da regra, a derivada da composição é o produto das derivadas, se mantém válida neste contexto generalizado.
- A Desigualdade do Valor Médio foi estabelecida. Embora a natureza vetorial dos espaços normados exija que a igualdade do Teorema do Valor Médio da reta seja substituída por uma desigualdade, o resultado obtido é poderoso ao fornecer estimativas essenciais para o acréscimo das funções em termos de sua derivada.

Em suma, este trabalho demonstra a robustez e a consistência da Análise Funcional ao estender as ferramentas do Cálculo para contextos mais abstratos. A formalização da Regra da Cadeia e da Desigualdade do Valor Médio em espaços normados não apenas consolida o conhecimento fundamental da diferenciação, mas também fornece o instrumental necessário para a aplicação desses conceitos em áreas avançadas da Matemática Pura e Aplicada.

Bibliografia

- [1] AGUIAR, R.; FIGUEIREDO, E. B.; HAVEROTH, G. A. **Considerações sobre as derivadas de Gâteaux e Fréchet.** C.Q.D.- Revista Eletrônica Paulista de Matemática, Bauru, v. 9, p. 32-48, jul. 2017..
- [2] BOMBAL, F. **Análisis Funcional: Una Perspectiva Histórica.** In: Seminar of Mathematical Analysis. 2002-2003. Sevilla: Universidad de Sevilla, 2003. p. 81-117.
- [3] BOTELHO, G.; PELLEGRINO, D.; TEIXEIRA, E. **Fundamentos de Análise Funcional.** 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.
- [4] BOYER, C. B. **História da Matemática.** Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.
- [5] BRAUCKS, J. B. AZEVEDO, G. P, NEUBAUER, V. S., ECKERT, N. H. **Pesquisa Bibliográfica como Metodologia de Pesquisa Científica.** RELACult - Revista Latino-Americana de Estudos em Cultura e Sociedade, V. 11, ed. especial, mar., 2025, artigo nº 2637, claec.org/relacult , e-ISSN: 2525-7870.
- [6] CIARLET, P. G. **Linear and Nonlinear Functional Analysis with Applications.** Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2013.
- [7] COLEMAN, R. - **Calculus on Normed Vector Spaces.** New York: Springer, 2012.
- [8] ECHER, I. C. **A revisão de literatura na construção do trabalho científico.** Revista Gaúcha de Enfermagem, Porto Alegre, v.22, n.2, p.5-20, jul. 2001.
- [9] GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Calculo**, vol. 1/ 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.
- [10] GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo, volume 2 / 5.ed.** - Rio de Janeiro : LTC, 2014.
- [11] KREYSZIG, E. **Introductory Functional Analysis with Applications.** Toronto: John Wiley e Sons, 1978.
- [12] KESAVAN, S. - **Nonlinear Functional Analysis: A First Course.** 2. ed. Nova Delhi: Hindustan Book Agency; Singapura: Springer, 2022.

- [13] LIMA, E. L. **Curso de análise**; v.1. 1º ed, Rio de Janeiro: IMPA, 2014.
- [14] LIMA, E. L. **Espaços métricos**. 1.ed. Rio de Janeiro. IMPA, 2014.
- [15] Lima, T. C. S., & Miotto, R. C. T. (2007). **Procedimentos metodológicos na construção do conhecimento científico: a pesquisa bibliográfica**. Revista Katálisis, Florianópolis v. 10 n. esp. p. 37-45 2007.
- [16] OLIVEIRA, C R. **Introdução à Análise Funcional**. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.
- [17] SANTOS, V. F. A. **Um passeio pela Análise Funcional**. 2022. 101 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Instituto de Matemática, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2022.
- [18] SOUSA, A. S.; OLIVEIRA, S. O.; ALVES, L H. **A pesquisa bibliográfica: princípios e fundamentos**. Cadernos da Fucamp, v.20, n.43, p.64-83/2021.
- [19] STEWART, J. **Cálculo, volume 1**. [tradução EZ2 Translate]. – São Paulo : Cengage Learning, 2013.
- [20] STEWART, J. **Cálculo, volume 2**; tradução EZ2 Translate. – São Paulo : Cengage Learning, 2013.