



UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIAS
CURSO: CIÊNCIAS - MATEMÁTICA E FÍSICA

**Teoria de partições dos números inteiro: uma
proposta didática utilizando matéria-prima da
Amazônia**

Raí Stéfano Libório dos Santos

Itacoatiara
2024

Raí Stéfano Libório dos Santos

Teoria de partições dos números inteiro: uma proposta didática utilizando matéria-prima da Amazônia

Trabalho de conclusão de curso solitado pela disciplina de Estágio Supervisionado IV, como requisito para obtenção de título de licenciado em Ciências-Matemática e Física

Orientador:

Professor Dr. Kelvin Souza de Oliveira

Universidade Federal do Amazonas
Instituto de Ciências Exatas e Tecnologias
Curso: ciências - matemática e física

Itacoatiara
2024

Raí Stéfano Libório dos Santos

**Teoria de partições dos números inteiro: uma proposta
didática utilizando matéria-prima da Amazônia**

Trabalho de conclusão de curso solitado pela
disciplina de Estágio Supervisionado IV, como
requisito para obtenção de título de licenciado
em Ciências-Matématica e Física

Trabalho aprovado. Itacoatiara, 29 de julho de 2024:

Professor Dr. Kelvin Souza de Oliveira
Orientador

**Professor Dr.Fernando Junior Soares dos
Santos**
Banca Examinadora

Professor Dr.Alison Paulo Santos
Banca Examinadora

Itacoatiara

2024

Agradecimentos

Gostaria de expressar minha profunda gratidão a todos que contribuíram para a conclusão desta etapa tão significativa da minha vida acadêmica. Agradeço primeiramente aos meus pais, cujo apoio incondicional e incentivo constante foram essenciais para que eu pudesse chegar até aqui. Suas palavras de encorajamento e sacrifícios diários foram a base sobre a qual construí minha jornada.

À minha instituição de ensino, expresso minha sincera gratidão por fornecer um ambiente de aprendizado enriquecedor. Aos professores, que compartilharam seu conhecimento e paixão pelo ensino, meu reconhecimento por sua dedicação e paciência. Suas orientações e desafios foram fundamentais para meu crescimento intelectual e pessoal. Agradecer a dois professores que sem eles neste final de curso meus objetivos não seriam possíveis, ao meu orientador de TCC Prof. Dr. Kelvin e ao Prof. Dr. Fernando que com ele consegui meu sonho de adentrar no Mestrado. Aos meus amigos, que dividiram comigo as alegrias e dificuldades ao longo do curso, meu muito obrigado pela amizade, colaboração e momentos inesquecíveis. Juntos, superamos obstáculos e celebramos conquistas que levaremos para toda a vida.

Por fim, agradeço a Deus por me guiar e abençoar em cada passo dessa caminhada, dando-me forças nos momentos de dificuldade e serenidade para superar os desafios. Este diploma não é apenas uma conquista minha, mas o resultado de um esforço coletivo. A todos que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste sonho, deixo aqui o meu mais sincero agradecimento.

Resumo

Este trabalho visa apresentar uma abordagem elementar da teoria de partição de números inteiros, tema comumente estudado em nível universitário. A teoria possui diversas aplicações, destacando-se na física, especialmente na mecânica estatística. Baseando-se em resultados clássicos e utilizando material concreto, propomos uma sequência didática que busca consolidar conhecimentos prévios dos estudantes, além de promover o desenvolvimento de novas habilidades e competências matemáticas. A proposta tem como objetivo facilitar a compreensão do tema por meio de uma organização gradual dos conteúdos, contribuindo para um aprendizado mais efetivo e significativo.

Palavra-chave: Teoria de partições de inteiros, sequência didática, habilidades e competências. .

Abstract

This work aims to present an elementary approach to the theory of integer partitions, a topic commonly studied at the university level. The theory has various applications, notably in physics, especially in statistical mechanics. Based on classical results and using concrete materials, we propose a didactic sequence that seeks to consolidate students' prior knowledge while fostering the development of new mathematical skills and competencies. The proposal aims to facilitate understanding of the topic through a gradual organization of content, contributing to a more effective and meaningful learning experience.

Keywords: Theory of partitions of integers, didactic sequence, skills and competencies.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Função Injetiva	12
Figura 2 – Função Sobrejetiva	13
Figura 3 – Partição conjugada	20
Figura 4 – Partição autoconjugada	21
Figura 5 – Representação da partição e sua respectiva partição autoconjugada	22
Figura 6 – Representação da partição e sua respectiva partição autoconjugada	22
Figura 7 – Imagem do Tendo	23
Figura 8 – Representação do gráfico de Ferrers utilizando as sementes	24
Figura 9 – Escola Estadual João Valério de Oliveira	29
Figura 10 – Sala da aplicação	29
Figura 11 – Alunos realizando a avaliação	29
Figura 12 – Alunos respondendo o questionário	30
Figura 13 – Resposta de um dos alunos ao questionário	30

Sumário

	Introdução	8
1	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	12
1.1	Função bijetiva	12
1.2	Partições de números inteiros	13
1.2.1	Definição	16
1.3	Provas bijetivas de identidades em partições	16
1.3.1	Teorema (Euler)	17
1.3.2	Caso particular (Teorema de Euler)	17
1.3.3	Definição (prova bijetiva)	18
1.4	Representação Gráfica de uma Partição	18
1.4.1	Definição (Partição Conjugada)	19
1.4.2	Teorema	19
1.4.3	Corolário	19
1.4.4	Teorema	20
1.4.5	Definição (Partição autoconjugada)	20
1.4.6	Teorema	21
2	MATERIAL UTILIZADO:	23
2.1	Matérias-primas (Tento)	23
3	SEQUÊNCIA DIDÁTICA	25
3.1	A importância da sequência didática	25
3.2	Avaliação	27
4	RESULTADOS	28
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	31
	REFERÊNCIAS	32

Introdução

Atualmente os problemas enfrentados nas escolas são comuns, relacionados às dificuldades de aprendizagem, principalmente quando tratamos do que diz respeito aos processos de ensino e de aprendizagem de Matemática; dentre eles destacam-se: falta de motivação dos alunos para aprender; desinteresse pela maioria dos conteúdos ministrados; a ineficácia de estratégias metodológicas tradicionalistas para a abordagem de conteúdos; e dificuldades em associar conteúdos matemáticos aos estudos de outras disciplinas e às necessidades do cotidiano (MASOLA, 2014; MASOLA e ALLEVATO, 2014, 2016; MASOLA, VIEIRA e ALLEVATO, 2016).

O ensino, visto como uma profissão, implica um campo de conhecimentos que possa ser sistematizado e assim comunicado a outros. Rocha e Aguiar (2012) apresentam a perspectiva de que se faz necessário que os professores das universidades tragam uma revivificação ao conceito de ensinar e assumam a relevância que tem o conhecimento pedagógico nos processos formativos, pois, o conhecimento pedagógico representa uma combinação entre o conhecimento da matéria e o conhecimento do modo de como ensinar.

O conhecimento pedagógico compreende as formas de representação das ideias, as analogias, ilustrações, exemplos, explicações e demonstrações, ou seja, a forma de representar e formular a matéria para torná-la compreensível para os estudantes (SHULMAN 1, 1986, apud ROCHA e AGUIAR, 2012, p.4).

Com isso, ao promover a compreensão de conceitos matemáticos abstratos, como o estudo de partições que envolvem a decomposição de um número inteiro em uma soma de inteiros menores os alunos são guiados a explorar a beleza e a complexidade das partições, desenvolvendo habilidades analíticas e lógicas que são aplicáveis em diversos contextos. As partições de números inteiros são uma área fascinante da teoria dos números. Elas envolvem a divisão de um número inteiro em partes menores, de modo que a soma dessas partes seja igual ao número original. Por exemplo, as partições do número 5 podem ser representadas por 5, 4+1, 3+2, 3+1+1, 2+2+1, 2+1+1+1 e 1+1+1+1+1.

A teoria de partições está intimamente relacionada com a vida do matemático Srinivasa Ramanujan, um dos matemáticos mais excepcionais do século XX. Ramanujan nasceu em 22 de dezembro de 1887, em Erode, uma pequena cidade no sul da Índia. Desde cedo, demonstrou um talento notável para a matemática, exibindo uma aptidão natural para números e padrões complexos. Embora não tivesse uma formação acadêmica formal, ele fez contribuições revolucionárias para diversos ramos da matemática, desafiando as convenções estabelecidas e impressionando os principais estudiosos de seu tempo.

O que se almeja com este trabalho é fazer uma revisão bibliográfica sobre produções realizadas acerca da Teoria de Partições, encontrando, assim, provas bijetivas em identidades de partições e resultados que possam ser utilizados nos ensinamentos fundamental II e médio. Além disso, pretende-se contribuir com a elaboração de uma sequência didática com uma atividade fazendo uso de materiais concretos manipuláveis (matéria-prima) com possíveis aplicações no cotidiano escolar. Para tanto, faz-se necessário conhecer um pouco da história das partições. Acerca do estudo das partições de números inteiros, não é possível afirmar ao certo quando tiveram início os primeiros trabalhos nessa área. Sabe-se, porém, que Leonhard Euler realizou as contribuições mais significativas para a área que hoje é conhecida como Teoria de Partições.

A educação é uma jornada que visa iluminar mentes e capacitar indivíduos a enfrentar os desafios do mundo moderno. No entanto, essa jornada muitas vezes é repleta de obstáculos, especialmente quando se trata da complexidade da disciplina de Matemática. Essa disciplina é fundamental não apenas para o sucesso acadêmico, mas também para a compreensão do funcionamento do mundo ao nosso redor. É essencial, portanto, que todos os alunos tenham uma base sólida nesse campo.

A pesquisadora Sadovsky (2007, p. 15) relata que o baixo desempenho dos alunos em matemática é uma realidade em muitos países, não só no Brasil. Hoje o ensino de Matemática se resume em regras mecânicas oferecidas pela escola, que ninguém sabe onde utilizar. Falta formação aos docentes para aprofundar os aspectos mais relevantes, aqueles que possibilitam considerar os conhecimentos prévios dos alunos, as situações e os novos saberes a construir.

A iniciativa dessa problemática pode oferecer uma perspectiva interessante e enriquecedora para o ensino básico escolar como: Abordagem intuitiva, exploração de padrões, conexão com outros tópicos, resolução de problemas. Lembrando que as partições de números inteiros podem ser um tópico desafiador para alguns alunos, por isso, construímos um plano em que os alunos não olhem só a teoria, mas sim, exercitem o conceito de forma lúdica e acessível a manipulação, sendo assim, possa construir uma partição e saber o que está acontecendo, podendo despertar o interesse dos alunos pela matemática e diminuir esse déficit no desenvolvimento cognitivo e a abstração da matemática.

O educador húngaro Zoltan Dienes defende que o principal motivo para a aprendizagem da Matemática deve ser a emoção da descoberta (p. 21). Para tornar a aprendizagem tão construtiva quanto possível e necessária a utilização de uma quantidade considerável de material concreto (p. 43), pois a manipulação desse material conduzirá as crianças através de experiências apropriadas, levando-as de conceito em conceito e ajudando-as a construir a estrutura conceitual da Matemática em seus cérebros (p. 43).

Dienes destaca ainda alguns aspectos fundamentais para que se promova uma aprendizagem da Matemática. O professor deve ter consciência de todo o edifício matemático que caracteriza o percurso escolar do aluno ao longo dos anos e dos processos matemáticos envolvidos. Deve também procurar promover uma grande diversidade de experiências matemáticas a

partir das quais os conceitos matemáticos possam ser construídos pelas próprias crianças (p. 29). Além disso, o professor deve estar consciente da dinâmica geral do processo de aprendizagem (p. 29).

Segundo Kishimoto (2000, p. 12) a diferença entre jogo e material pedagógico é que se o objeto conhecido como brinquedo não realizar a função lúdica, deixa de ser brinquedo para tornar-se material pedagógico. Assim, a proposta de usar jogos deve ser motivar os/as alunos/as de forma lúdica a construir o conhecimento, desafiando-os a buscar saberes diferentes do tradicional, não sendo baseado na repetição de ideias de exercício no caderno, assim:

Por meio de uma lúdica, o aluno é estimulado a desenvolver sua criatividade e não a produtividade, sendo sujeito do processo pedagógico. Por meio da brincadeira o aluno desperta o desejo do saber, a vontade de participar e a alegria da conquista. Quando a criança percebe que existe uma sistematização das propostas de uma atividade dinâmica e lúdica, a brincadeira passa a ser interessante e a concentração do aluno fica maior, assimilando os conteúdos com mais facilidade e naturalidade. (KISHIMOTO, 1994).

A matemática é considerada uma das disciplinas que desempenha papel decisivo na formação do estudante, haja visto que “o conhecimento matemático é necessário para todos os estudantes da educação básica, seja por sua grande aplicação na sociedade contemporânea, seja pelas suas potencialidades na formação de cidadãos críticos, cientes de suas responsabilidades sociais”.

Contudo, é sabido ser uma área que apresenta grandes desafios no que tange ao ensino-aprendizagem. Existe uma dificuldade em tornar o ensino da matemática significativo e atrativo para o estudante. O professor enfrenta inúmeras dificuldades, tais como a resistência dos estudantes a disciplina, falta de pré-requisitos e incapacidade de relacionar os conteúdos ensinados na escola com a vida prática.

Assim, faz-se necessário buscar meios que promovam o interesse dos estudantes e facilitem a compreensão dos conteúdos dessa disciplina. Acerca disso, Eva Maria Siqueira Alves[6] fala sobre sua experiência no ensino da matemática fazendo uso de atividades lúdicas. Ela discorre sobre a importância do convívio dos estudantes em um ambiente rico de materiais e oportunidades, que possibilite a construção e elaboração de seus conhecimentos. Ela fala também, sobre a necessidade de uma maior atuação dos estudantes no processo de aprendizagem, assim como a relevância do uso de materiais concretos neste processo.

Desta forma, o que se almeja com a proposta dessas atividades, e que com o auxílio de materiais concretos manipuláveis(Matéria-prima) é que os estudantes consigam, de forma lúdica, compreender o conceito de partição de um inteiro positivo n e realizar verificações de identidades em partições de maneira construtiva, promovendo assim um momento de reflexão, em que os

estudantes possam repensar a aprendizagem da matemática, como um processo significativo e interessante.

1 Fundamentação teórica

1.1 Função bijetiva

Na Matemática, o estudo de funções é algo de suma importância, pois se trata de um conceito primordial que se faz presente em outros campos da Matemática, como a Geometria, Álgebra, Cálculo, Estatística, etc. Mas também, faz ponte com outros campos da ciência, como a Física, Química, Biologia, etc. Por se tratar de um conceito importante, os currículos educacionais de Ensino Médio fazem menção a esse conceito, ressaltando a importância de se trabalhar esse tema nessa etapa de escolaridade. Inclusive o PCE-PE (2012) faz a seguinte colocação:

“O estudo das funções é essencial nesta etapa de escolaridade, principalmente por seu papel de modelo matemático para o estudo das variações entre grandezas em fenômenos do mundo natural ou social.” (PCE-PE, 2012, p. 129).

Como iremos abordar um pouco sobre bijetividade, então devemos falar o que é uma função bijetiva, mas para isso ocorrer definiremos o que é uma função:

Definição (Função Injetiva): Seja $f : A \rightarrow B$ uma função entre dois conjuntos. Dizemos que f é *injetiva* (ou *injeção*) se, para quaisquer elementos $x_1, x_2 \in A$, a igualdade das imagens implica a igualdade dos elementos, isto é:

$$\forall x_1, x_2 \in A, \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

De forma equivalente, cada elemento de B é imagem de, no máximo, um elemento de A .

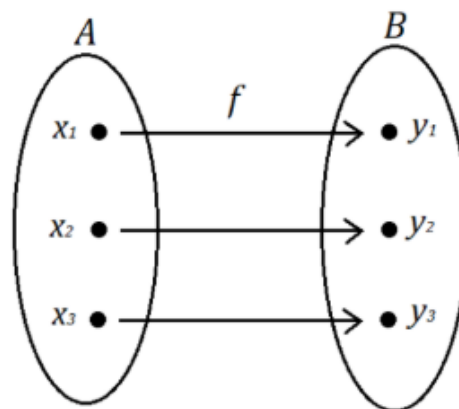


Figura 1 – Função Injetiva

Definição (Função Sobrejetiva): Seja $f : A \rightarrow B$ uma função entre dois conjuntos. Dizemos que f é *sobrejetiva* (ou *sobração*) se, para todo elemento $y \in B$, existe ao menos um elemento $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Formalmente:

$$\forall y \in B, \quad \exists x \in A \text{ tal que } f(x) = y.$$

Ou seja, a imagem de f coincide com o contradomínio B , isto é, $Im(f) = B$. Ou seja,

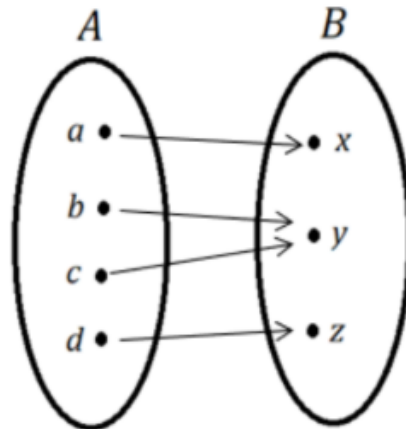


Figura 2 – Função Sobrejetiva

todo elemento do contradomínio é imagem de pelo menos um elemento do domínio.

Definição de Função Bijetiva: Seja $f : A \rightarrow B$ uma função entre dois conjuntos. Dizemos que f é *bijetiva* se ela for *injetiva* e sua imagem for igual a B , ou seja, se for também *sobrejetiva*. Formalmente:

- **Injetiva:** $\forall x_1, x_2 \in A$, se $f(x_1) = f(x_2)$, então $x_1 = x_2$.
- **Sobretiva:** $\forall y \in B$, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

Portanto, f é bijetiva $\iff \forall y \in B, \exists! x \in A$ tal que $f(x) = y$.

1.2 Partições de números inteiros

Como disserta Cecília Pereira de Andrade (2009), Leibniz pergunta em uma carta para Bernoulli sobre partições de inteiros, a primeira pessoa segundo a autora a questionar o tema. De acordo com Mucelin (2011) o início do estudo das partições veio com o matemático Euler que provou inúmeras identidades em partições e logo o tema ganhou mais importância em teoria dos números. Por se tratar de um assunto multidisciplinar, de muitas aplicações práticas, o tema foi ganhando seu espaço dentro da combinatória apesar de que muitas das provas em partições se deram através do método analítico e não pela combinatória.

Como narra Cláudio Mucelin (2011) o primeiro matemático a realizar provas bijetivas em identidades de partições foi o matemático James Joseph Sylvester juntamente com sua equipe de colaboradores através do método do construtivismo e nos anos seguintes muitos nomes famosos dentro da matemática também deram suas contribuições para este tema como Gauss, Cauchy e Ramanujan.

Por volta de 1965 a “era dourada” começou. Em menos de 20 anos, muitas pessoas provaram um grande número de identidades de partições por métodos combinatórios, dando impressão que se deve esperar uma prova construtiva da maioria, senão todas, identidades de partições. Este foi o período em que George Andrews entrou em cena e desempenhou um papel importante nestes desenvolvimentos. Em seus dois fundamentais trabalhos, ele construiu, em ambos, uma base de técnicas padrões pelas quais as partições bijetivas são obtidas. Depois dos anos 70, parecia que a Teoria da Unificação estava à vista. (MUCELIN, 2011, p.3).

Como neste estudo vamos abordar o uso de material concreto e manipulável no ensino, ou seja, utilizando uma metodologia lúdica, então a seguir temos algumas citações para mostrar a importância do uso do lúdico no ensino-aprendizagem da matemática:

O que a criança pode fazer hoje com o auxílio dos adultos poderá fazê-lo amanhã por si só. A área de desenvolvimento potencial permite-nos, pois, determinar os futuros passos da criança e a dinâmica do seu desenvolvimento e examinar não só o que o desenvolvimento já produziu, mas também o que produzirá no processo de maturação. [...] Portanto, o estado do desenvolvimento da criança só pode ser determinado referindo-se pelo menos a dois níveis: o nível de desenvolvimento efetivo e a área de desenvolvimento potencial. (Vygotsky In: REGO (1987, p.126).

Por meio de uma lúdica, o aluno é estimulado a desenvolver sua criatividade e não a produtividade, sendo sujeito do processo pedagógico. Por meio da brincadeira o aluno desperta o desejo do saber, a vontade de participar e a alegria da conquista. Quando a criança percebe que existe uma sistematização das propostas de uma atividade dinâmica e lúdica, a brincadeira passa a ser interessante e a concentração do aluno fica maior, assimilando os conteúdos com mais facilidade e naturalidade. (KISHIMOTO, 1994).

O raciocínio decorrente do fato de que os sujeitos aprendem através do jogo é de que este pode ser utilizado pelo professor em sala de aula. As primeiras ações de professores apoiados em teorias construtivistas foram no sentido de tornar os ambientes de ensino bastante ricos em quantidade e variedade de jogos, para que os alunos pudessem descobrir conceitos inerentes às estruturas dos jogos por meio de sua manipulação. (KISHIMOTO, 2002, p. 77).

(...) o interesse da criança seja atraído pelo objeto material em si ou pelo ente matemático, senão pelas operações sobre o objeto e seus entes. Operações que,

naturalmente, serão primeiro de caráter manipulativo para depois interiorizar-se e posteriormente passar do concreto ao abstrato. Recorrer à ação, diz Piaget, não conduz de todo a um simples empirismo, ao contrário, prepara a dedução formal ulterior, desde que se tenha presente que a ação, bem conduzida, pode ser operatória, e que a formalização mais adiantada o é também (CASTELNUOVO, 1970 apud FIORENTINI e MIORIM, 1990, p. 4).

O material concreto exerce um papel importante na aprendizagem. Facilita a observação e a análise, desenvolve o raciocínio lógico, crítico e científico, é fundamental para o ensino experimental e é excelente para auxiliar o aluno na construção de seus conhecimentos. (TURRIONI, 2004, p. 66).

Através das atividades lúdicas, o educando desenvolve sua criatividade, consegue expressar suas emoções e sentimentos e ainda contribui para o processo de socialização. A ludicidade, ao mesmo tempo em que contribui e facilita o aprendizado do aluno, possibilita também ao professor o preparo de aulas mais dinâmicas, fazendo com que o aluno interaja, despertando assim seu interesse pelo conteúdo estudado, aumentando a vontade de aprender. (KRUG, 2016, p. 16).

É muito difícil, ou provavelmente impossível, para qualquer ser humano caracterizar espelho, telefone, bicicleta ou escada rolante sem ter visto, tocado ou utilizado esses objetos. Para as pessoas que já conceituaram esses objetos, quando ouvem o nome do objeto, sem precisarem dos apoios iniciais que tiveram dos atributos tamanho, cor, movimento, forma e peso. Os conceitos evoluem com o processo de abstração; a abstração ocorre pela separação. (LORENZATO, 2006, p.22).

Recursos didáticos como livros, vídeos, televisão, rádio, calculadora, computadores, jogos e outros materiais têm um papel importante no processo de ensino e aprendizagem. Contudo, eles precisam estar integrados a situações que levem ao exercício da análise e da reflexão. (BRASIL, 1998, p. 57).

Inovar o ensino da matemática geralmente relaciona-se com o desenvolvimento de novas metodologias de ensino que complementem o conteúdo trabalhado com o objetivo de desenvolver a autonomia dos alunos bem como seu conhecimento lógico matemático analisado dentro de uma visão interativa e autônoma, na formação de indivíduos autônomos, capazes de raciocinar de forma independente, participativo e criativo (KAMMI, 1995, p. 45). Destacamos que as definições e resultados a seguir podem ser aprofundados nas seguintes referências: ANDREWS, George E. The theory of partitions. Cambridge university press, 1998; ANDREWS, George E.; ERIKSSON, Kimmo. Integer partitions. Cambridge University Press, 2004.

1.2.1 Definição

: Uma partição de um inteiro positivo n é uma coleção de inteiros positivos cuja soma é n . Denotamos por $p(n)$ o número de partições de n , isto é, o número de maneiras de se representar n como soma de inteiros positivos, chamados partes da partição, onde a ordem destas partes não importa.

Exemplos:

As partições de 3, 4 e 5 estão listadas abaixo:

- $P(3) = 3$

- $= 2 + 1$

- $= 1 + 1 + 1$

- $P(4) = 4$

- $= 3 + 1$

- $= 2 + 2$

- $= 2 + 1 + 1$

- $= 1 + 1 + 1 + 1$

- $P(5) = 5$

- $= 4 + 1$

- $= 3 + 2$

- $= 3 + 1 + 1$

- $= 2 + 2 + 1$

- $= 2 + 1 + 1 + 1$

- $= 1 + 1 + 1 + 1 + 1$

1.3 Provas bijetivas de identidades em partições

As partições de números inteiros são uma área fascinante da teoria dos números. Elas são afirmações como “O número de partições de n do tipo A é igual ao número de partições de n do tipo B” são chamadas de identidades em partições.

Observação: Uma prova bijetiva para uma identidade em partições consiste em se obter uma bijeção entre o conjunto de partições do tipo A e o conjunto de partições do tipo B. Para exemplificar o que estamos dizendo, apresentamos uma prova bijetiva para o Teorema de Euler

1.3.1 Teorema (Euler)

Para qualquer inteiro positivo n ,

$$p(n | partesmpares) = p(n | partesdistintas)$$

Demonstração Tomando pelo teorema de Euler temos que dado qualquer número n positivo as partes ímpares e distintas serão iguais. Então devemos mostrar que uma parte ímpar pode ser levada para uma parte distinta e vice-versa. Mas para isso precisaremos da prova bijetiva.

1.3.2 Caso particular (Teorema de Euler)

$$p(6) = 11$$

- 5 + 1
- 4 + 2
- 4 + 1 + 1
- 3 + 3
- 3 + 2 + 1
- 3 + 1 + 1 + 1
- 2 + 2 + 2
- 2 + 2 + 1 + 1
- 2 + 1 + 1 + 1 + 1
- 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1

$p(6 partesmpares)$	$p(6 partesdistintas)$
5 + 1	6
3 + 3	5 + 1
3 + 1 + 1 + 1	4 + 2
1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1	3 + 2 + 1

Na tabela, estão listadas, na primeira coluna, todas as partições de 6 formadas apenas por partes ímpares e, na segunda coluna, as partições de 6 cujas partes são distintas, isto é, as partes da partição são diferentes duas a duas. Observe que

$$p(6 | partesmpares) = p(6 | partesdistintas),$$

isto é, o número de partições de 6 em partes ímpares é igual ao número de partições de 6 em partes distintas.

1.3.3 Definição (prova bijetiva)

Para uma identidade em partições consiste em se obter uma bijeção entre o conjunto de partições do tipo A e o conjunto de partições do tipo B.

Operação 1 - De partes ímpares para partes distintas:

Dada uma partição λ de n em partes ímpares, se esta não possuir partes repetidas, não há nada a fazer; caso contrário, isto é, se em λ há partes repetidas, somamos duas a duas as partes iguais. Repetimos este procedimento até obter apenas partes distintas (como o número de partes decresce a cada operação, repetiremos o procedimento no máximo até restar uma parte). Por exemplo:

$$\begin{aligned} 5+3+3+3+1+1+1+1 &\mapsto 5 + (3 + 3) + 3 + (1 + 1) + (1 + 1) \\ &= 6+5+3+2+2 \\ &\mapsto 6 + 5 + 3 + (2 + 2) \\ &= 6+5+4+3. \end{aligned}$$

Operação 2 - De partes distintas para partes ímpares:

Dada uma partição de n em partes distintas, se esta possuir apenas partes ímpares não há nada a fazer; caso contrário, cada parte par é dividida por 2, originando duas novas partes iguais. Repetimos esta operação até restarem apenas partes ímpares (o que é sempre possível porque, a cada operação de dividir uma parte par em duas, o tamanho das partes pares está diminuindo). Por exemplo:

$$\begin{aligned} 6+5+4+3 &\mapsto (3 + 3) + 5 + (2 + 2) + 3 \\ &= 5+3+3+3+2+2 \\ &\mapsto 5 + 3 + 3 + 3 + (1 + 1) + (1 + 1) \\ &= 5+3+3+3+1+1+1+1. \end{aligned}$$

Denotando agora por A e B os conjuntos formados pelas partições de n em partes ímpares e em partes distintas, respectivamente, temos que $f : A \rightarrow B$ definida por $f(\lambda) = \mu$, onde μ é a partição obtida a partir de $\lambda \in A$ pela Operação 1, é uma bijeção cuja inversa $f^{-1}(\mu) = \lambda$ satisfaz, devido à Operação 2. Com isto temos uma prova bijetiva.

1.4 Representação Gráfica de uma Partição

Uma partição $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_s$ de um inteiro positivo n pode ser representada graficamente por meio de um arranjo de n pontos no plano, constituído de linhas em ordem não

crescente. Em cada linha deste arranjo colocamos um número de pontos igual a cada uma de suas partes, conforme ilustrado no exemplo a seguir.

Chamamos esta representação de **gráfico de Ferrers** da partição, que consiste em preencher com pontos, em ordem não crescente, um número igual a cada uma das partes.

No exemplo: tomando o inteiro positivo $n = 8$, e escrevendo como uma de suas partições possíveis: $4 + 3 + 1$, onde na primeira linha há 4 pontos representando a primeira parcela, na segunda 3 pontos representando a segunda parcela e na terceira 1 ponto representando a terceira parcela, indicando cada uma das partes em que foi dividido o número 8.



O gráfico de Ferrers pode ser usado para as provas bijetivas de identidades em partições. Ao trocar as linhas pelas colunas obtém-se uma nova partição do mesmo número, e essa nova partição é chamada de **conjugada** à primeira.

1.4.1 Definição (Partição Conjugada)

Dada uma partição qualquer, se trocarmos as linhas com as colunas, ou seja, o que é linha se transforma em coluna e o que é coluna se transforma em linha, obteremos uma nova partição chamada de **partição conjugada**. Chamamos de **conjugação** a operação que transforma uma partição na sua partição conjugada.

1.4.2 Teorema

“Seja $P_k(n)$ o número de partições de n tendo k como a maior parte e $Q_k(n)$ o número de partições de n com exatamente k partes, então $P_k(n) = Q_k(n)$.”

Através da operação “conjugação”, que nos foi mostrada pelo gráfico de Ferrers, definida no conjunto das partições de n , é possível verificar que toda partição tendo k como maior parte é transformada em uma partição que possui exatamente k partes, e que cada uma que possui k partes é levada em uma que possui k como a maior parte.

1.4.3 Corolário

“Seja $P_k(n)$ o número de partições de n com partes menores ou iguais a k , e $Q_k(n)$ o número de partições de n com, no máximo, k partes, pode-se demonstrar que $P_k(n) = Q_k(n)$.”

Demonstração: Pela operação de conjugação pode-se transformar cada elemento contado por $PK(n)$ em um único elemento contado por $QK(n)$, isto pela mesma razão apresentada na demonstração do teorema. Denotamos por $F(n)$ o número de partições de n em que cada parte aparece pelo menos duas vezes e por $G(n)$ o número de partições de n em partes maiores do que 1 e tais que inteiros consecutivos não aparecem como partes, pode-se mostrar que $F(n) = G(n)$.

1.4.4 Teorema

$F(n) = G(n)$ para todo inteiro positivo n .

Demonstração: Tomando o conjugado de uma partição enumerada por $F(n)$, teremos exatamente um dos elementos enumerados por $G(n)$, pois o fato de cada parte aparecer pelo menos duas vezes implica que, na partição conjugada, a menor parte será pelo menos 2 e que inteiros consecutivos não poderão ocorrer como partes.

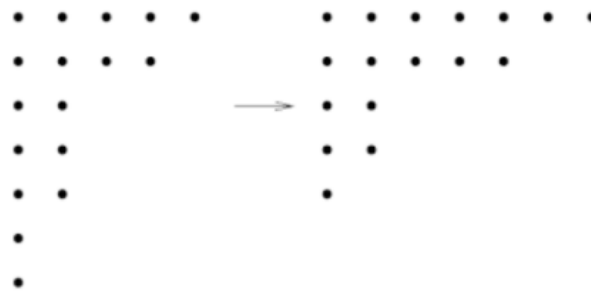


Figura 3 – Partição conjugada

O exemplo mostrado refere-se a duas partições do número 17, sendo uma conjugada da outra, pois observa-se que os pontos que estavam nas linhas da primeira partição agora se encontram na coluna da segunda partição.

Poderá ocorrer também de uma partição ser **autoconjugada**, que é o caso em que ao fazer a troca da linha pela coluna no gráfico de Ferrers gera a mesma partição, ou seja, é quando uma partição é igual à sua partição conjugada.

1.4.5 Definição (Partição autoconjugada)

Se a representação gráfica de uma partição for igual à representação gráfica da partição conjugada, então chamaremos esta **partição autoconjugada**.

1.4.6 Teorema

O número de partições de n autoconjugadas é igual ao número de partições de n em partes ímpares e distintas.

Demonstração: Tomando uma partição de n autoconjugada, pegamos a primeira linha junto com a primeira coluna e assim criando uma nova partição com a primeira linha formada por estes pontos. Com os mesmos procedimentos com o que sobrou da segunda linha e da segunda coluna vamos obter a segunda linha da nova partição. Fazendo isso respectivamente com as demais linhas e suas colunas obteremos uma partição de n . Como as partições autoconjugadas são simétricas à diagonal principal, então as linhas criadas na nova partição terão duas vezes o tamanho da linha original menos um, pois a linha e a coluna da partição original têm a mesma quantidade de pontos e um ponto em comum. Logo, as linhas da nova partição terão um número ímpar de pontos e são distintas.

Exemplo:

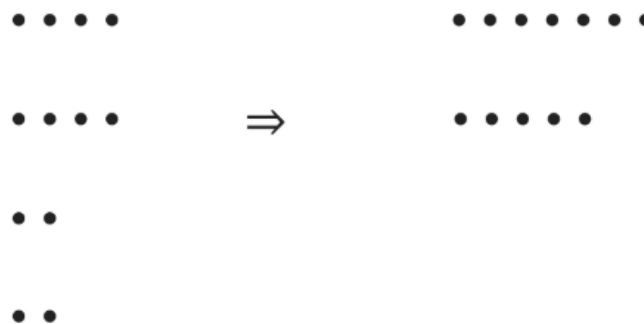


Figura 4 – Partição autoconjugada

Muitas provas bijetivas de identidades em partições são obtidas simplesmente por alguma transformação nos seus **gráficos de Ferrers**. No exemplo a seguir será apresentada uma prova bijetiva cuja finalidade é mostrar que o número de partições autoconjugadas de n é igual ao número de partições de n em partes ímpares e distintas.

Para ilustrar essa transformação, vamos considerar o gráfico de Ferrers da partição autoconjugada

$$7 + 5 + 5 + 4 + 3 + 1 + 1$$

de 26:

É claro que o número de pontos em cada uma das “linhas” em formato de “L” é ímpar e estes números são necessariamente distintos. Neste caso, lendo o número de pontos sobre cada “linha”, temos a partição $13 + 7 + 5 + 1$ de 26. Reciprocamente, dados números ímpares distintos, podemos colocá-los numa disposição semelhante à que temos acima, obtendo, desta forma, o

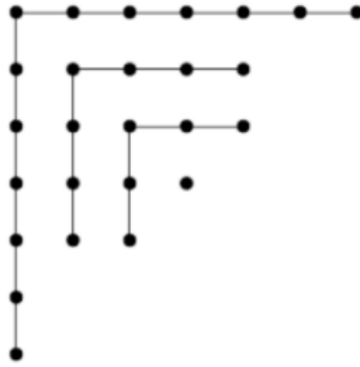


Figura 5 – Representação da partição e sua respectiva partição autoconjugada

gráfico de Ferrers de uma partição autoconjugada. Por exemplo, a partição $11 + 9 + 5 + 3$ de 28 é representada por:

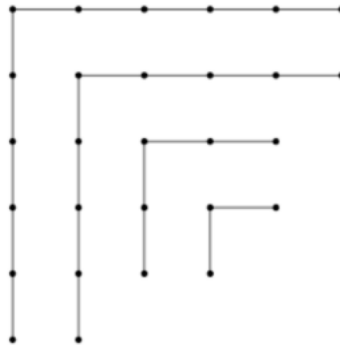


Figura 6 – Representação da partição e sua respectiva partição autoconjugada

Esta partição é autoconjugada o que demonstra o teorema que diz que o número de partições autoconjugadas de n , sendo n um inteiro positivo, é igual ao número de partições de n em partes ímpares distintas.

Agora vamos falar sobre o material que podemos exemplificar o gráfico de uma partição utilizando definições e teoremas de partições de números inteiros positivos que é nossa Matéria-primas amazônica.

2 Material utilizado:

2.1 Matérias-primas (Tento)

Adenanthera pavonina é uma árvore de até 15 metros, da família das leguminosas, subfamília mimosoideae, popularmente chamada de olho-de-pavão, dragoon's eye , carolina, segavé, tento-carolina e false-sandalwood. Também é conhecida por manjelim, manto-de-sangue, aryanwood . Tem folhas bipinadas, 3-6 pares de pina, alternas; foliólulos alternos, oblongos ou ovadas, flores pequenas amarelo-pálidas, favas estreitas e falcadas e sementes vermelhas, muito duras e lustrosas.



Figura 7 – Imagem do Tento

Adenanthera pavonina é originária do sudeste da Ásia, é naturalizada no Brasil, e especialmente cultivada para a exploração da madeira e propriedades medicinais das folhas, casca e sementes. É utilizada em reflorestamentos e como planta ornamental e forrageira. No Brasil, foi introduzida há muitos anos e encontra-se bastante adaptada e largamente distribuída em todos os estados.

A *adenanthera pavonina* é originária do sudeste da Ásia, é naturalizada no Brasil, e especialmente cultivada para a exploração da madeira e propriedades medicinais das folhas, casca e sementes. É utilizada em reflorestamentos e como planta ornamental e forrageira. No Brasil, foi introduzida há muitos anos e encontra-se bastante adaptada e largamente distribuída em todos os estados.

Note que podem ser utilizadas outras espécies de semente, bem como materiais recicláveis. A seguir, apresentamos – por meio de uma sequência didática – uma forma de introduzir o



Figura 8 – Representação do gráfico de Ferrers utilizando as sementes

conceito de partição de inteiros no ensino médio. Idealmente, para um melhor aproveitamento pedagógico, a proposta deveria ser aplicada para um público que já possua familiaridade com o conceito de função e bijetividade, contudo com as devidas adaptações, a sequência pode ser utilizada até mesmo para introduzir o conceito de bijetividade.

Agora vamos mostrar como queremos introduzir o conteúdo de partição no ensino médio, com uma sequência didática.

3 Sequência Didática

3.1 A importância da sequência didática

O estudo de partições de números inteiros representa um campo significativo da matemática combinatória, com aplicações relevantes tanto na pesquisa acadêmica quanto no ensino básico e superior. Entretanto, devido à sua natureza abstrata e à diversidade de técnicas envolvidas — como o uso de diagramas de Ferrers, provas bijetivas, identidades combinatórias e propriedades algébricas —, a abordagem pedagógica desse conteúdo requer planejamento cuidadoso. Nesse contexto, a elaboração de uma sequência didática estruturada desempenha um papel fundamental para garantir a compreensão progressiva e significativa dos conceitos por parte dos estudantes.

A sequência didática, enquanto ferramenta metodológica, organiza o ensino em etapas logicamente encadeadas, respeitando os níveis de desenvolvimento cognitivo dos aprendizes e promovendo uma construção gradativa do conhecimento. No caso específico das partições de números inteiros, a sequência didática possibilita introduzir o tema a partir de situações concretas e problemas contextualizados, avançando paulatinamente para generalizações abstratas e formulações mais sofisticadas.

Inicialmente, a apresentação de problemas intuitivos envolvendo decomposição de números naturais em somas permite que o estudante desenvolva uma noção inicial de partição, compreendendo o conceito de forma empírica. Posteriormente, a introdução de representações visuais — como os diagramas de Ferrers e os diagramas de Young — favorece a visualização das estruturas envolvidas, contribuindo para o desenvolvimento do raciocínio combinatório e facilitando a compreensão de propriedades fundamentais, como o número de partições com determinadas restrições.

Com o avanço da sequência, podem ser inseridas estratégias mais elaboradas, como o estudo de identidades clássicas (por exemplo, a identidade de Euler), o desenvolvimento de provas bijetivas e a análise de funções geradoras, proporcionando ao estudante contato com técnicas fundamentais da combinatória e estabelecendo conexões com outras áreas da matemática, como a teoria dos números e a álgebra.

Adicionalmente, a sequência didática oferece oportunidades para o trabalho com diferentes formas de representação (simbólica, algébrica, gráfica e descritiva), favorecendo o desenvolvimento de múltiplas habilidades matemáticas e promovendo uma aprendizagem mais ampla e significativa. Ao final do processo, espera-se que o estudante não apenas compreenda o conceito de partição de números inteiros, mas também desenvolva autonomia na resolução de problemas, na formulação de conjecturas e na construção de argumentos matemáticos rigorosos.

Portanto, a adoção de uma sequência didática bem planejada no ensino de partições de números inteiros contribui não apenas para a apropriação do conteúdo específico, mas também para o desenvolvimento do pensamento matemático, da argumentação lógica e da criatividade dos estudantes, elementos essenciais para sua formação acadêmica e para sua atuação futura como cidadãos críticos e reflexivos.

Partições dos números inteiros

Conteúdos

- Definição de Partição de números inteiros;
- Provas bijetivas e identidade de uma partição;
- Representação gráfica de uma partição.

Objetivo geral Introduzir partição no ensino médio. Conceito que jamais foi utilizado no ensino básico de educação, sendo assim mostrar a importância da partição no ensino da matemática.

Competência e habilidade (BNCC) Competência 3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

Habilidade (EM13MAT310). Resolver e elaborar de problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.

Duração 60 minutos

Descrição das etapas

1. Etapa – Apresentar o tema: Definições, teoremas, corolário, demonstrações (partição, teorema de Euler, prova bijetiva, gráfico de uma partição, partição conjugada e partição autoconjugada);

2. Etapa – Exemplificar: Mostrar exemplos de cada definição apresentada;

3. Etapa – Compreensão: Resolução de exercícios e verificação da aprendizagem.

Avaliação Construção dos gráficos de Ferrers utilizando as definições apresentadas na aula, com materiais de sua preferência que estarão disponíveis como: tento (matéria-prima).

Recurso didático Quadro negro, pincel, apagador, computador, projetor, matéria-prima.

3.2 Avaliação

Como parte do processo avaliativo e de consolidação dos conteúdos abordados em aula sobre a Teoria de Partições de Números Inteiros e suas representações gráficas, realizamos uma atividade prática com foco na construção dos gráficos de Ferrers.

Nesta avaliação, os estudantes foram convidados a aplicar as definições e conceitos trabalhados previamente, utilizando materiais didáticos diversificados que estavam à disposição, incluindo tampo (como matéria-prima principal). Cada estudante teve que representar visualmente as partições numéricas por meio dos diagramas de Ferrers.

Durante a construção, os alunos demonstraram compreensão dos seguintes aspectos:

O conceito de partição de um número inteiro como uma decomposição desse número em uma soma de inteiros positivos, independentemente da ordem dos somandos;

A organização das partições em diagramas de Ferrers, respeitando a disposição decrescente das quantidades por linha;

A importância da representação visual para facilitar a análise de propriedades combinatórias e simetrias das partições.

Além do desenvolvimento prático, foi possível observar o trabalho colaborativo e a atenção aos detalhes geométricos na construção dos diagramas.

Ao término da atividade, para reforçar os conceitos e aferir individualmente a compreensão, foi aplicado um breve questionário com as seguintes questões:

1. Você acha que o uso de material concreto contribui para o entendimento do conteúdo?
2. Você teve dificuldade para realizar a atividade?
3. O que achou da atividade?

4 Resultados

A aplicação da sequência didática foi feita na Escola Estadual João Válerio de Oliveira na sala do 1º ano "03" dentro do Programa Residência Pedagógica para desenvolvimento no estudo de partições de números inteiros apresentou resultados significativamente positivos. A organização progressiva dos conteúdos, partindo de situações mais concretas e caminhando gradativamente para níveis crescentes de abstração, contribuiu de maneira expressiva para a compreensão dos conceitos por parte da maioria dos estudantes envolvidos. Observou-se, ao longo das atividades, um maior engajamento dos discentes, bem como o desenvolvimento de habilidades relacionadas ao raciocínio combinatório, à visualização de estruturas matemáticas e à argumentação lógica.

Entretanto, é importante destacar que, apesar dos avanços obtidos, nem todos os estudantes conseguiram, no primeiro momento, atingir plenamente a compreensão dos conceitos abordados. Alguns apresentaram dificuldades, sobretudo em etapas que exigiam maior abstração ou o domínio de técnicas específicas, como as provas bijetivas e o uso de diagramas de Ferrers. Esses desafios, contudo, são esperados em processos de ensino-aprendizagem que envolvem conteúdos matemáticos de natureza mais abstrata.

Ainda assim, acredita-se que, com a continuidade do trabalho pedagógico, novas intervenções didáticas e a implementação de estratégias diversificadas, esses obstáculos poderão ser gradualmente superados. A consolidação do aprendizado, especialmente em temas que exigem o desenvolvimento de uma compreensão profunda, demanda tempo, prática e constante mediação docente. A sequência didática, portanto, cumpre um papel importante não apenas por promover avanços já observados, mas também por fornecer uma base sólida sobre a qual o aprofundamento dos estudos poderá ser construído nos momentos subsequentes.

Em síntese, os resultados obtidos até o presente momento sinalizam que a proposta metodológica adotada é promissora e possui potencial para promover a aprendizagem efetiva de partições de números inteiros, desde que acompanhada de um trabalho contínuo e adaptativo que considere as necessidades específicas de cada estudante.



Figura 9 – Escola Estadual João Valério de Oliveira



Figura 10 – Sala da aplicação

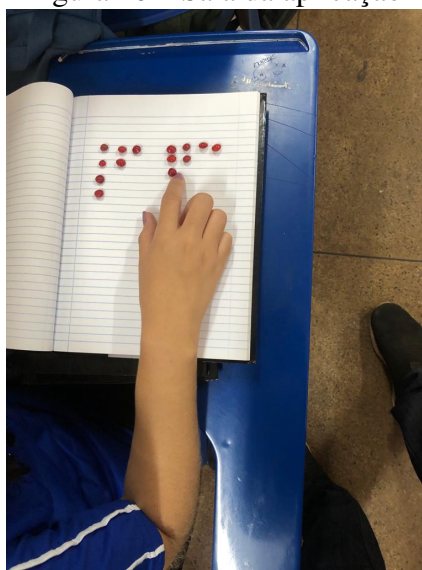


Figura 11 – Alunos realizando a avaliação



Figura 12 – Alunos respondendo o questionário

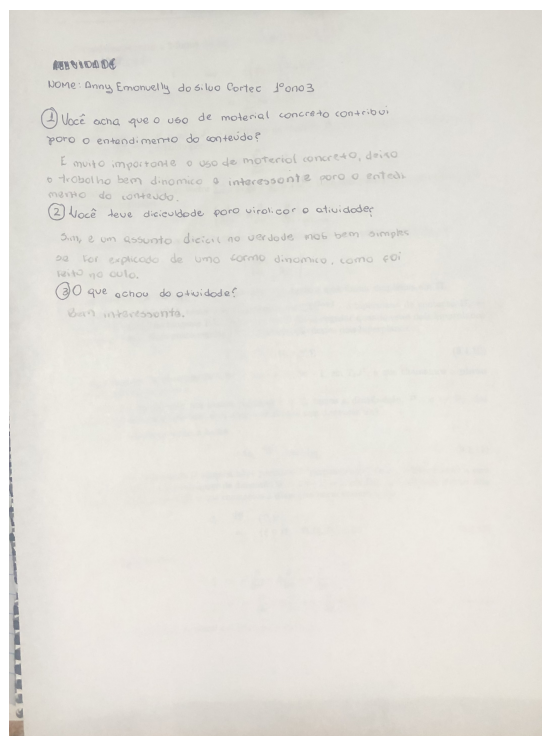


Figura 13 – Resposta de um dos alunos ao questionário

5 Considerações Finais

A teoria de partições de números inteiros, embora tradicionalmente associada ao ensino superior, revela-se uma ferramenta poderosa e promissora para enriquecer o ensino básico de matemática. Sua abordagem intuitiva permite que conceitos complexos sejam trabalhados de forma acessível, favorecendo a exploração de padrões, o desenvolvimento do pensamento lógico e a conexão com diversos tópicos matemáticos. Além de estimular a resolução criativa de problemas, o estudo de partições contribui tanto para o fortalecimento de conhecimentos já adquiridos quanto para a construção de novas competências. Assim, mesmo sendo um tema desafiador, sua aplicação na educação básica amplia horizontes e potencializa o aprendizado de forma significativa.

Referências

- [1] Alves, E. M. S. A ludicidade e o ensino de matemática: uma prática possível. Papyrus, 2001.
- [2] Alves de Oliveira, Rodrigo. Provas Bijetivas em Partições: uma proposta de abordagem no ensino básico. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação), Brasília, 2020.
- [3] Andrews, George E. The Theory of Partitions. Cambridge University Press, 1998.
- [4] Andrews, George E.; Eriksson, Kimmo. Integer Partitions. Cambridge University Press, 2004.
- [5] Brasil. Base Nacional Comum Curricular. Ministério da Educação, 2017.
- [6] CAPES. Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior. Disponível em: <http://www.capes.gov.br/perguntas-frequentes>. Acesso em: 30 abr. 2023.
- [7] Da Fonseca Luciano, Karina Maria. O uso de material concreto no ensino e aprendizagem da matemática.
- [8] De Alcântara Filho, José; Nicot, Yuri Expósito. A utilização de elementos da floresta na produção de recursos metodológicos para ao ensino de ciências e matemática no contexto amazônico. REAMEC-Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática, v. 8, n. 3, p. 467-482, 2020.
- [9] De Albuquerque Silva, Wagner Negromonte. Análise e uso do conceito de função e de função bijetiva em livros do Ensino Médio - uma contribuição reflexiva para a formação do professor. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Campina Grande, 2020.
- [10] Dienes, Z. Aprendizado Moderno de Matemática. Trad. J. E. Fortes. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1970.
- [11] Dos Santos, Rafael Marques; Webler, Geovane. Material concreto na compreensão dos conceitos matemáticos.
- [12] InfoEscola. Função injetiva. Disponível em: www.infoescola.com/matematica/funcão-injetiva.
- [13] InfoEscola. Função sobrejetora. Disponível em: www.infoescola.com/matematica/funcão-sobrejetora.
- [14] Instituto Brasileiro de Florestas. Olho De Pavão - *Adenantha pavonina* - Semente. Arquivado em 3 set. 2016, no Wayback Machine.
- [15] Jennings, Charles. Provas bijetivas de identidades em partições. Trabalho de Con-

clusão de Curso (TCC), Universidade do Estado do Amazonas (UEA), 2018.

[16] Kamii, C. A criança e o número: Implicações educacionais da teoria de Piaget para a atuação com escolares de 4 e 6. Trad. A. de Assis. 11a ed. Campinas: Papirus, 1990.

[17] Kishimoto, T. M. Jogo, brinquedo e à educação. 6a ed. São Paulo: Cortez, 1994.

[18] Krug, Fernanda. A ludicidade no ensino da matemática no município de Luzerna/SC. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação), Instituto Federal Catarinense, Videira, 2016.

[19] Lorenzato, S. O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores. Campinas: Autores Associados, 2006.

[20] Masola, Wilson de Jesus; Allevato, Norma. Dificuldades de aprendizagem matemática de alunos ingressantes na educação superior. Revista Brasileira de Ensino Superior, v. 2, n. 1, p. 64-74, jun./mar. 2016.

[21] Masola, Wilson de Jesus; Allevato, Norma. Matemática: o “calcanhar de Aquiles” de alunos ingressantes na Educação Superior. Produto Educacional (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2014.

[22] Masola, Wilson de Jesus; Vieira, Gilberto; Allevato, Norma. Ingressantes na Educação superior e suas Dificuldades em Matemática: uma Análise das Pesquisas Publicadas nos Anais dos X e XI ENEMs. In: Anais do XII ENEM, São Paulo: SBEM/SBEM-SP, 2016. p. 1-13.

[23] Mucelin, Cláudio. Demonstrações bijetivas. Dissertação (Mestrado), Universidade Estadual de Campinas, 2011.

[24] Rocha, Áurea Maria Costa; Aguiar, Maria da Conceição Carrilho de. Aprender e ensinar construir identidade e profissionalidade docente no contexto da universidade: uma realidade possível. In: Anais da 35a REUNIÃO ANUAL DA ANPED, Porto de Galinhas, 2012. p. 1-17.

[25] Sadovsky, P. Falta Fundamentação Didática no Ensino da Matemática. Nova Escola. São Paulo, Ed. Abril, jan./fev. 2007.

[26] Turrioni, Ana Maria Silveira. O laboratório de educação matemática na formação inicial de professores. Dissertação (Mestrado), Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2004.