



UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA  
BACHARELADO EM FÍSICA

Análise estatística de algumas redes complexas  
não-livre de escala

Abrahin Rodrigues da Silva

Manaus - AM  
11 de março de 2026

Abrahin Rodrigues da Silva

Análise estatística de algumas redes complexas  
não-livre de escala

Monografia de Graduação apresentada ao Instituto de Ciências Exatas e da Terra da Universidade Federal do Amazonas como requisito parcial para a obtenção do grau de bacharel em Física.

Orientador(a)

Prof. Dr. Mircea Daniel Galiceanu

Universidade Federal do Amazonas  
Instituto de Ciências Exatas e da Terra

Manaus - AM

11 de março de 2026

Monografia de Graduação sob o título *Análise estatística de algumas redes complexas não-livre de escala* apresentada por Abrahin Rodrigues da Silva e aceita pelo Instituto de Ciências Exatas e da Terra da Universidade Federal do Amazonas, conforme o Portaria 1 (3047015), SEI nº 23105.008635/2026-20, sendo aprovada por todos os membros da banca examinadora abaixo especificada:

Prof. Dr. Mircea Daniel Galiceanu

Orientador(a)

Departamento de Física

Universidade Federal do Amazonas

Dr. Marcus Vinícius Alves Ribeiro

SEDUC/AM

Universidade Federal do Amazonas

MSc. João Vitor Fernandes da Gama

Pós-Graduação em Física - UFAM

Universidade Federal do Amazonas

Manaus - AM, 11 de Março de 2026.

Dedico este trabalho a Deus, fonte de sabedoria e força, e à minha família, pelo apoio incondicional ao longo de toda essa caminhada.

# Agradecimentos

Primeiramente a Deus, pela força, saúde e sabedoria concedidas ao longo desta jornada. Por ser meu refúgio nos momentos de cansaço e a luz que iluminou meu caminho quando os desafios pareciam maiores que as minhas forças. Sem a Sua presença, esta conquista não seria possível.

Aos meus pais, Abraão Marques da Silva e Evany Gomes Rodrigues, pelo amor incondicional e por investirem no meu futuro, muitas vezes abrindo mão dos seus próprios sonhos para que eu pudesse realizar os meus.

À minha namorada, Aryane Vivian Gomes, por todo o amor, paciência e apoio incondicional durante esta caminhada.

Aos meus três irmãos, Aene Rodrigues, Abiene Rodrigues, Anton Lúcio Rodrigues, pelo apoio incondicional e pela torcida constante ao longo destes anos de formação.

Ao meu orientador Dr. Mircea Daniel Galiceanu, pela paciência, pelo rigor acadêmico e por acreditar neste projeto desde o início. Suas críticas foram fundamentais para o meu crescimento.

Aos meus irmãos da igreja, pela irmandade e pelas orações que me sustentaram durante este percurso.

Aos meus amigos de faculdade, William Corrêa, Luciana Cerdeira, Tatiane Sena, Jorge Lucas Mubarac, por terem compartilhado comigo os cafés e sucos, as noites em claro e as tensões das provas.

Aos professores do Departamento de Física, Me. Walter Castro, Dr. José Ricardo, Dr. Daniz Mota, Dr. Igor Tavares Padilha, Dr. Mircea Daniel Galiceanu, que compartilharam seus conhecimentos e despertaram em mim a paixão por esta profissão.

À Universidade Federal do Amazonas, pela oportunidade de formação e pela infraestrutura oferecida. E o financiamento deste presente trabalho.

Agradecimentos dirigidos àqueles que contribuíram de maneira indireta à elaboração do trabalho, sejam eles pessoas ou mesmo organizações.

*“Este belíssimo sistema do Sol, dos planetas e dos cometas só pode proceder do conselho e domínio de um Ser inteligente e poderoso.”*

Sir. Isaac Newton\*

# Análise estatística de algumas redes complexas não-livre de escala

Autor: Abrahin Rodrigues da Silva

Orientador: Prof. Dr. Mircea Daniel Galiceanu

## Resumo

Neste trabalho consideramos uma nova classe de rede complexa de tipo árvore: as redes não-livre de escala. Elas serão construídas a partir de duas distribuições de grau: de tipo lei de potência com corte e normal logarítmica. Através do mesmo, realizar uma análise estatística deste tipo de rede, considerando a distribuição de grau, o coeficiente de agrupamento e o diâmetro, como alguns exemplos de grandezas estatísticas da teoria de redes complexas. É possível determinar essas grandezas também através dos autovalores da matriz de conectividade ou simplesmente através das definições das grandezas. Variando os parâmetros da construção das redes iremos monitorar as mudanças topológicas geradas e sua influência na análise estatística implementada.

*Palavras-chave:* Redes complexas, Lei de potência com corte, Distribuição log-normal.

# Análise estatística de algumas redes complexas não-livre de escala

Autor: Abrahin Rodrigues da Silva

Orientador: Prof. Dr. Mircea Daniel Galiceanu

## Abstract

In this work, we consider a new class of complex tree-type networks: non-scale-free networks. These networks are constructed from two degree distributions: a truncated power-law distribution and a log-normal distribution. A statistical analysis of this type of network is performed by considering the degree distribution, the clustering coefficient, and the diameter, among other examples of statistical measures from complex network theory. These quantities can be determined either through the eigenvalues of the connectivity (adjacency) matrix or directly from their definitions. By varying the parameters used in the network construction, we monitor the resulting topological changes and their influence on the implemented statistical analysis.

*Keywords:* Complex Networks; Power-law with cutoff; Log-normal distribution.

# Lista de figuras

Figura 1 – Exemplo de Rede Complexa Regular . . . . .	18
Figura 2 – Exemplo de rede aleatória . . . . .	19
Figura 3 – Redes aleatórias e Livre de Escala. Nas redes aleatórias, a distribuição segue uma curva em forma de sino, indicando que a maioria dos nós possui quantidade semelhante de conexões, sem a presença de nós altamente conectados. Esse tipo de rede é comparado a uma malha rodoviária, onde as cidades têm número parecido de ligações. Já nas redes livres de escala, a distribuição segue uma lei de potência, na qual a maioria dos nós tem poucas conexões, enquanto poucos nós (hubs) concentram muitas ligações. Esse modelo se assemelha ao sistema de transporte aéreo, onde poucos aeroportos principais conectam muitos outros menores . . . . .	20
Figura 4 – Exemplo rede de mundo-pequeno. . . . .	22
Figura 5 – Fluxograma da metodologia do trabalho . . . . .	29
Figura 6 – A probabilidade de $P(k)$ de se obter o grau $k$ para $N = 1000$ , usando a equação . . . . .	31
Figura 7 – A probabilidade de $P(k)$ de se obter o grau $k$ para $N = 1000$ . As redes foram construídas a partir da equação . . . . .	32

# Lista de tabelas

Tabela 1 – Dados gerados pela equação da lei de potência de corte. . . .	32
Tabela 2 – Dados gerados pela equação da normalmente logarítmica. . .	33

# Lista de abreviaturas e siglas

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
$N$	Total de Nós de uma rede complexa
$E$	Ligações entre nós de uma rede complexa
$G(N, E)$	Grafo de uma rede complexa
$A$	Matriz de Adjacência da rede
$D$	Diâmetro da rede
$\langle l \rangle$	Caminho médio da rede
$k$	Grau de ligações da rede
$P(k)$	Distribuição de Grau da rede
$C$	Coefficiente de Agrupamento
$C_p$	Coefficiente de Pearson
$\gamma$	Função de onda de probabilidade.
$a;b$	Parâmetros de ajustes

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>12</b>
<b>1.1</b>	<b>Objetivos</b> . . . . .	<b>14</b>
<b>1.2</b>	<b>Organização do Trabalho</b> . . . . .	<b>14</b>
<b>2</b>	<b>DESENVOLVIMENTO</b> . . . . .	<b>18</b>
<b>2.1</b>	<b>Redes Livres de Escala (scale free)</b> . . . . .	<b>19</b>
<b>2.2</b>	<b>Redes não-livre de Escala (Not scale free)</b> . . . . .	<b>21</b>
<b>2.3</b>	<b>Redes de Mundo Pequeno (Watts-Strogatz)</b> . . . . .	<b>22</b>
<b>2.4</b>	<b>Dedução Matemática: Do Binomial ao Poisson (Grafos ER)</b> .	<b>23</b>
<b>2.5</b>	<b>Coefficiente de Agrupamento e Transição de Mundo Pequeno</b>	<b>24</b>
<b>2.6</b>	<b>A Tensão entre <math>C(p)</math> e <math>L(p)</math></b> . . . . .	<b>25</b>
<b>2.7</b>	<b>Limitações Físicas e o Truncamento da Lei de Potência</b> . .	<b>25</b>
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA</b> . . . . .	<b>27</b>
<b>4</b>	<b>RESULTADOS</b> . . . . .	<b>30</b>
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES</b> . . . . .	<b>34</b>
	<b>Referências</b> . . . . .	<b>36</b>

# 1 Introdução

O conceito de redes complexas foi aplicado com sucesso em várias áreas de pesquisa, como por exemplo matemática, física, química, biologia, sociologia ou ciências da computação entre muitas outras. Com dados encontradas na natureza podemos construir várias redes reais [1, 2, 3] que podem ser estudadas através de modelos de redes complexas. Entre essas redes reais citamos: a internet [4, 5], a rede de citações científicas [6], redes neurais [2], as redes de reações metabólicas [7], as redes ecológicas [8] e as redes de transporte [9, 10]. Todos os modelos teóricos de redes complexas identificam um grafo com uma topologia não trivial, que é composto por um conjunto de vértices (ou nós) interligados por meio de ligações (ou arestas). Os vértices podem representar indivíduos, moléculas ou cidades e as ligações entre vértices existem se os nós interagem entre si ou se eles compartilham a mesma propriedade. É possível, por exemplo, modelar a rede de transporte considerando que os vértices são os aeroportos enquanto os voos diretos entre dois aeroportos representam as ligações da rede.

Os modelos teóricos atuais classificam as redes complexas [1, 2] em três grandes categorias: redes aleatórias, as redes mundo-pequeno e as redes livre de escala, tendo seus trabalhos pioneiros [11, 12, 13] respectivamente. Nos últimos anos, devido à criação ou descoberta de outras redes reais outros modelos de redes complexas surgiram, tais como as redes multiplex [14], multicamadas [15], multi-hierárquicas ou composta de várias topologias [16], ou temporais [17]. A maioria das redes reais são do tipo livre de escala [2], porém recentemente [18] foi descoberto que usando outros critérios para a construção das redes reais é possível que a distribuição de grau é mais provável de tipo não-livre de escala. Neste projeto, com o intuito de complementar nossos estudos sobre as redes livre de escala [19] iremos considerar as redes construídas a partir de duas distribuições não-livre de escala, que são as mais prováveis: lei de potência com corte (em inglês “power law with cutoff”) e normal

logarítmica (em inglês “log-normal”) [18]. Neste projeto construiremos os dois tipos de redes usando o procedimento de crescimento de redes de tipo árvore desenvolvido na referência [19], mas aplicado para as novas distribuições de grau.

As redes complexas têm sido amplamente estudadas como ferramentas matemáticas e computacionais capazes de representar sistemas reais, desde interações sociais até conexões biológicas e tecnológicas. Entre os modelos mais conhecidos, destacam-se as redes livres de escala, caracterizadas pela presença de hubs e pela distribuição de graus que segue uma lei de potência, refletindo a existência de poucos nós altamente conectados e muitos nós com baixa conectividade. No entanto, nem todas as redes seguem esse padrão; as chamadas redes não-livres de escala apresentam distribuições diferentes, como as redes aleatórias do modelo de Erdős–Rényi, nas quais os graus se aproximam de uma distribuição de Poisson. Nesse contexto, surge a questão da relação dessas redes com estruturas mais específicas, como as árvores, que são grafos conectados e sem ciclos. Embora as árvores também se encaixem como redes não-livres de escala, elas não representam a totalidade desse conjunto, uma vez que existem diversos outros modelos com propriedades distintas. Assim, compreender as diferenças entre redes livres de escala, redes não-livres de escala e árvores é fundamental para o estudo das topologias e para a análise dos fenômenos que emergem em diferentes sistemas complexos.

A árvore como uma das estruturas mais fundamentais da Teoria dos Grafos, sendo um conceito consensual entre os diferentes autores da área. Destaca-se sua relevância tanto do ponto de vista teórico quanto prático, uma vez que as árvores possuem ampla aplicação em diversos campos do conhecimento, como informática, engenharia, biologia e matemática aplicada. Além disso, sua simplicidade estrutural permite que sejam utilizadas como objeto inicial de investigação para a análise de propriedades gerais dos grafos, servindo como base para o estudo de conjecturas mais amplas, como a Conjectura de Ulam [20].

Ressalta-se, ainda, que existem diversas definições formais para o conceito de árvore, o que contribui para uma compreensão mais abrangente da sua estrutura e de suas propriedades. A partir de uma abordagem baseada em terminologia geométrica, segundo [20], explora a noção de centralidade em árvores, permitindo a identificação de vértices que desempenham papel estruturalmente mais relevante. Além disso, é apresentada a árvore bloco-ponto de articulação, estrutura naturalmente associada a qualquer grafo conexo, a qual possibilita a decomposição do grafo em componentes fundamentais para sua análise.

## 1.1 Objetivos

- O objetivo geral deste trabalho é o estudo estatístico de dois novos tipos de redes complexas construídas a partir de duas distribuições de grau: lei de potência com corte e normal logarítmica.
- O primeiro objetivo específico é a construção das redes usando a linguagem de programação Fortran. O segundo objetivo específico deste trabalho é determinar numericamente as grandezas estatísticas para as redes escolhidas.

## 1.2 Organização do Trabalho

O presente Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) constitui uma continuidade e aprofundamento de um projeto previamente desenvolvido no âmbito de uma Iniciação Científica, no qual foram investigadas propriedades estruturais preliminares de redes complexas. Na etapa inicial, foram analisadas características topológicas básicas, sendo observadas evidências de que determinadas redes não apresentavam comportamento compatível com distribuições de grau em lei de potência. A partir dessa constatação, surgiu a necessidade

de uma investigação mais rigorosa, conduzindo ao desenvolvimento deste trabalho, que tem como foco a análise estatística detalhada de redes complexas não-livres de escala, conforme discutido na literatura especializada [2, 3, 1].

Diferentemente das redes livres de escala — caracterizadas por distribuições de grau do tipo  $P(k) \sim k^{-\alpha}$  e pela presença de vértices altamente conectados (hubs) [13] —, as redes analisadas neste estudo apresentam comportamentos distintos, não sendo adequadamente descritas por modelos de lei de potência ao longo de toda a distribuição. Trabalhos recentes demonstram que redes estritamente livre de escala são menos comuns do que tradicionalmente assumido, sendo necessária maior cautela na sua identificação [18]. Nesse contexto, torna-se fundamental a utilização de métodos estatísticos formais e robustos para avaliar a adequação de diferentes modelos probabilísticos.

Dessa forma, este trabalho adota uma abordagem metodológica fundamentada em técnicas de inferência estatística, com o objetivo de comparar diferentes distribuições candidatas, como modelos exponenciais, log-normais e distribuições com corte exponencial, amplamente discutidas na teoria de redes complexas [2, 1]. Essa abordagem permite uma análise mais precisa e confiável das propriedades estruturais das redes estudadas, contribuindo para o entendimento da diversidade de comportamentos em sistemas complexos.

A organização deste trabalho está estruturada em cinco capítulos, descritos a seguir.

O Capítulo 1 apresenta a introdução do tema, contextualizando o estudo no âmbito da teoria de redes complexas, área que tem sido amplamente aplicada na modelagem de sistemas reais em diferentes áreas do conhecimento, como sistemas biológicos, sociais e tecnológicos [3, 7]. São discutidas a relevância do tema, as motivações da pesquisa e os objetivos geral e específicos do trabalho.

O Capítulo 2 é dedicado ao referencial teórico, no qual são apresentados os fundamentos matemáticos da teoria dos grafos e das redes complexas. Inicialmente, são introduzidos conceitos básicos, como vértices, arestas e a representação formal de grafos  $G = (V, E)$ , conforme estabelecido na teoria clássica

dos grafos [20]. Em seguida, são discutidas métricas estruturais importantes, como distribuição de grau, coeficiente de agrupamento, comprimento médio de caminho e assortatividade, fundamentais para a caracterização topológica das redes [2].

Ainda neste capítulo, são apresentados os principais modelos clássicos de redes complexas. O modelo de grafos aleatórios de Erdős–Rényi é discutido como uma das primeiras abordagens probabilísticas para a construção de redes [11]. Em seguida, é apresentado o modelo de mundo pequeno de Watts–Strogatz, que introduz propriedades como alta clusterização e caminhos curtos [12]. Por fim, é discutido o modelo de redes livres de escala de Barabási–Albert, baseado no mecanismo de crescimento e ligação preferencial [13]. Também são abordadas aplicações desses modelos em sistemas reais, como a World Wide Web [4, 5] e redes de colaboração científica [6].

O Capítulo 3 descreve detalhadamente a metodologia adotada neste trabalho. Inicialmente, são apresentadas as distribuições de grau utilizadas na construção das redes, com foco em modelos que não seguem estritamente uma lei de potência. Em seguida, é descrito o algoritmo de construção das redes, baseado em processos de crescimento e regras probabilísticas específicas. Também são apresentados os procedimentos de análise estatística, incluindo a estimação de parâmetros e o cálculo de grandezas estruturais.

Além disso, são discutidos os métodos computacionais empregados, incluindo a implementação em linguagem Fortran e a realização de simulações numéricas. A utilização de abordagens computacionais é essencial para o estudo de redes complexas, uma vez que muitos resultados dependem de análises numéricas em larga escala [2].

O Capítulo 4 apresenta os resultados obtidos a partir das simulações realizadas. São analisadas as distribuições de grau em diferentes escalas, bem como a influência dos parâmetros na estrutura das redes geradas. Também são discutidas propriedades estruturais como diâmetro, conectividade e correlações, comparando-se os resultados obtidos com aqueles previstos por modelos

clássicos.

Os resultados são interpretados à luz de aplicações reais, como redes de transporte [10, 9], redes ecológicas [8] e redes biológicas [7], evidenciando a relevância da análise de redes não-livres de escala para a compreensão de sistemas complexos do mundo real.

O Capítulo 5 apresenta as conclusões do trabalho, sintetizando os principais resultados e contribuições obtidas. São discutidas as limitações do estudo, especialmente no que se refere à análise de redes estáticas e não ponderadas. Além disso, são propostas direções para trabalhos futuros, incluindo a investigação de redes mais complexas, como redes multicamadas [15, 14] e redes temporais [17].

Também se destaca a possibilidade de estudar processos dinâmicos em redes, como difusão, relaxação e propagação, temas que têm sido amplamente investigados na literatura recente [16, 19]. Dessa forma, abre-se espaço para novas abordagens que integrem estrutura e dinâmica em redes complexas.

Dessa maneira, o presente trabalho está organizado de forma a conduzir o leitor desde os fundamentos teóricos até a análise detalhada dos resultados, proporcionando uma compreensão estruturada e aprofundada das propriedades de redes complexas não-livres de escala.

## 2 Desenvolvimento

As redes complexas como uma ferramenta fundamental para a representação e o estudo da estrutura de sistemas complexos presentes em diferentes áreas do conhecimento. São citados como exemplos as interações sociais entre indivíduos, as interações entre proteínas e genes em organismos biológicos, a comunicação entre computadores e os sistemas de transporte. Esses exemplos evidenciam que as redes constituem um modelo universal para a análise de sistemas interconectados, independentemente do domínio científico em que se inserem [18].

Alguns tipo de rede: Nas redes regulares, cada nó possui o mesmo número de conexões, formando uma estrutura organizada e previsível. Esse tipo de rede apresenta alta simetria, mas pouca flexibilidade diante de mudanças ou falhas.

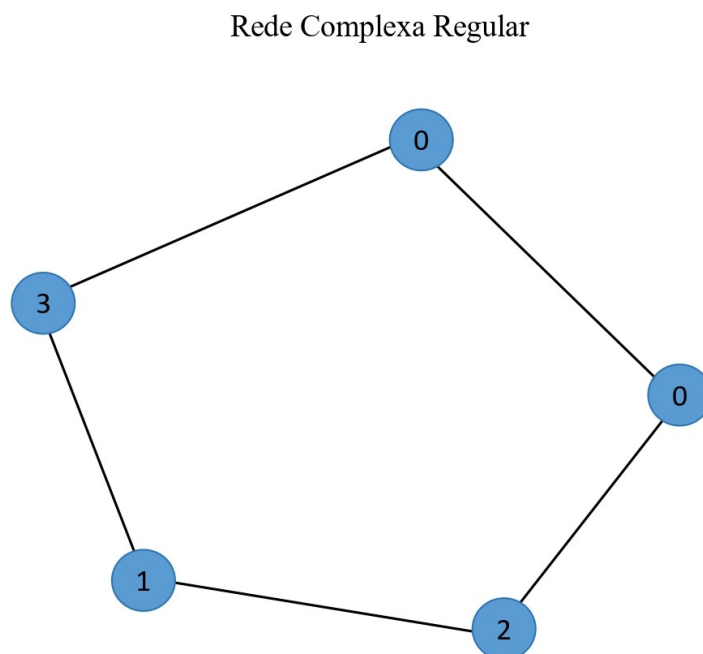


Figura 1 – Exemplo de Rede Complexa Regular.

Já as redes aleatórias são formadas pela conexão entre nós de maneira

probabilística, sem um padrão fixo. Nelas, o número de conexões por nó pode variar significativamente, gerando uma estrutura mais heterogênea. Esse modelo foi amplamente estudado por Erdős e Rényi, sendo fundamental para o entendimento de sistemas reais.

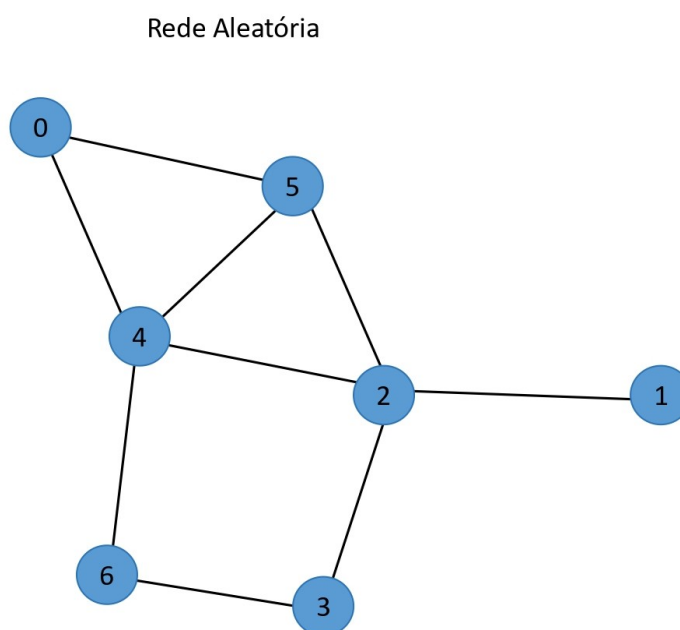


Figura 2 – Exemplo de rede aleatória

Assim, enquanto redes regulares são mais ordenadas, redes aleatórias refletem melhor a complexidade de muitos sistemas naturais.

## 2.1 Redes Livres de Escala (scale free)

Em seguida, o [18] destaca que, nas diferentes áreas da ciência das redes, é frequente a afirmação de que a maioria das redes do mundo real apresenta uma estrutura livre de escala (scale free). Essa hipótese baseia-se, de modo geral, no fato de que a distribuição dos graus dos nós segue uma lei de potência, caracterizada por uma função do tipo  $P(K) \sim k^{-\alpha}$  com  $\alpha > 1$ . Ressalta-se, entretanto, que existem variações nessa definição, com critérios

mais restritivos como valores específicos de  $\alpha$  ou a exigência de mecanismos de crescimento por ligação preferencial — e outras versões mais flexíveis, nas quais a lei de potência pode ocorrer apenas na cauda da distribuição ou apresentar um decaimento exponencial.

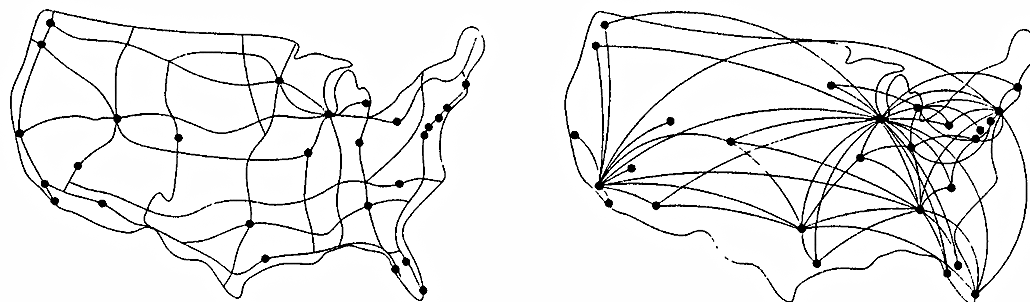


Figura 3 – Redes aleatórias e Livre de Escala. Nas redes aleatórias, a distribuição segue uma curva em forma de sino, indicando que a maioria dos nós possui quantidade semelhante de conexões, sem a presença de nós altamente conectados. Esse tipo de rede é comparado a uma malha rodoviária, onde as cidades têm número parecido de ligações. Já nas redes livres de escala, a distribuição segue uma lei de potência, na qual a maioria dos nós tem poucas conexões, enquanto poucos nós (hubs) concentram muitas ligações. Esse modelo se assemelha ao sistema de transporte aéreo, onde poucos aeroportos principais conectam muitos outros menores.

O debate em torno das redes livre de escala é fortemente influenciado pelas ambiguidades no uso do próprio termo “rede livre de escala”, uma vez que diferentes autores o utilizam com significados distintos. A definição clássica estabelece que uma rede é considerada livre de escala quando sua distribuição de graus  $P(k)$  segue uma lei de potência do tipo  $k^{-\alpha}$ . Essa definição é amplamente adotada na literatura e constitui a base conceitual do termo.

A lei de potência é a única função densidade normalizável para os graus dos nós que apresenta invariância por reescala, isto é, mantém sua forma sob transformações do tipo  $f(ck) = g(c)f(k)$ , para qualquer constante  $c$ . Essa propriedade implica a ausência de uma escala característica no sistema, justificando o termo “livre de escala”. Dessa forma, para distribuições de grau em redes, a condição de ser livre de escala é equivalente à presença de um comportamento em lei de potência.

Além disso, o texto amplia o conceito de invariância de escala, indicando que ele também pode ser aplicado a outros aspectos estruturais da rede, que não se limitam à distribuição de graus. É mencionado, por exemplo, que algumas redes apresentam auto-similaridade estrutural em seus subgrafos [20], característica que igualmente pode ser interpretada como uma forma de invariância de escala. Em tais casos, mesmo quando o enfoque não está diretamente nos graus dos nós, essas redes também são, por vezes, classificadas como livre de escala [18].

## 2.2 Redes não-livre de Escala (Not scale free)

### O Modelo de Grafos Aleatórios (Erdős-Rényi)

O ponto de partida para o estudo de redes não livre de escala é o modelo de Erdős-Rényi (ER), proposto em 1959. Em um grafo aleatório  $G(N, p)$ ,  $N$  nós são conectados com uma probabilidade  $p$ . Propriedades Topológicas Neste modelo, a distribuição de graus  $P(k)$  segue uma distribuição binomial, que para valores de  $N$  elevados e  $p$  pequenos, converge para uma Distribuição de Poisson:

$$P(k) = \frac{e^{-\langle k \rangle} \langle k \rangle^k}{k!}$$

Nesta equação,  $\langle k \rangle = p(N - 1)$  representa o grau médio. A característica fundamental aqui é a homogeneidade: a probabilidade de encontrar um nó com grau muito superior à média decai de forma exponencial ( $1/k!$ ). Portanto, não existem "super-hubs". A rede possui uma escala característica bem definida, o que a classifica como uma rede não livre de escala.

O modelo ER é célebre por demonstrar transições de fase. Quando  $\langle k \rangle < 1$ , a rede é composta por pequenos componentes isolados. Quando  $\langle k \rangle = 1$ , ocorre a emergência de um "componente gigante"(giant component) que abrange uma fração finita dos nós, alterando drasticamente a conectividade global do sistema.

## 2.3 Redes de Mundo Pequeno (Watts-Strogatz)

Em 1998, Duncan Watts e Steven Strogatz observaram que muitas redes reais não eram puramente aleatórias nem puramente regulares. Elas exibiam alto coeficiente de agrupamento (clustering) — típico de redes regulares — e baixo comprimento médio de caminho — típico de redes aleatórias [12].

Rede de Mundo Pequeno

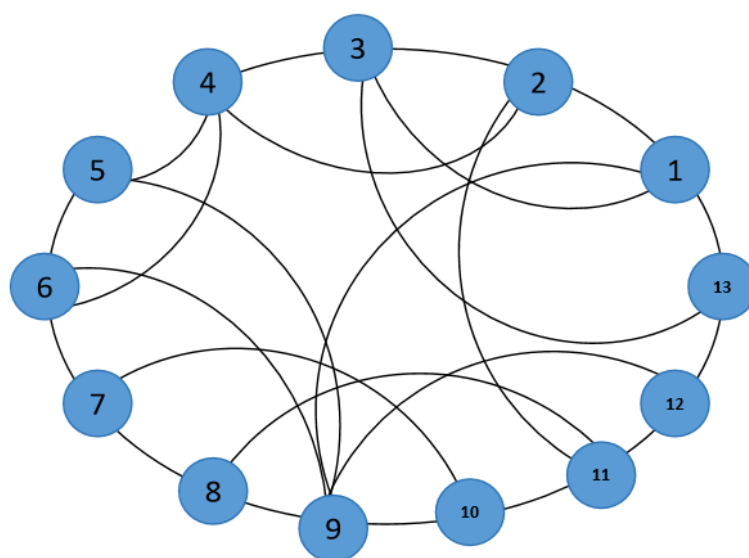


Figura 4 – Exemplo rede de mundo-pequeno.

O modelo Watts-Strogatz (WS) começa com um anel regular onde cada nó está conectado aos seus  $k$  vizinhos mais próximos. Com uma probabilidade  $p$ , algumas dessas conexões são "religadas" a nós aleatórios da rede.

- Para  $p = 0$ : A rede é um grafo regular (alta distância média, alto agrupamento).
- Para  $0 < p < 1$ : Surge o fenômeno de Mundo Pequeno.
- Para  $p = 1$ : A rede torna-se um grafo aleatório de Erdős-Rényi.

Embora as redes de mundo pequeno possam ser altamente eficientes na propagação de informação, elas são tipicamente não livre de escala. A

distribuição de graus  $P(k)$  ainda se concentra fortemente em torno da média  $\langle k \rangle$ , apresentando um decaimento rápido para valores extremos. Elas possuem uma estrutura "democrática" de conectividade. A distinção entre redes livre de escala e não livre de escala é vital para a análise de resiliência. As redes não livre de escala, devido à sua homogeneidade, respondem de forma distinta a falhas e ataques.

### Tolerância a Falhas e Ataques

Em uma rede *scale-free*, a remoção aleatória de nós raramente afeta a integridade da rede, mas ataques direcionados aos hubs a destroçam rapidamente. Nas redes não livre de escala (como a rede ER ou WS):

1. Ataques Direcionados: Têm um impacto menor do que em redes *scale-free*, pois não há nós vitais cuja remoção cause o colapso imediato da conectividade.
2. Falhas Aleatórias: A rede é mais vulnerável. Como a maioria dos nós tem o mesmo grau de importância, a perda progressiva de nós degrada a rede de forma linear e previsível, levando ao desaparecimento do componente gigante mais cedo do que em redes heterogêneas.

## 2.4 Dedução Matemática: Do Binomial ao Poisson (Grafos ER)

Em um grafo aleatório de Erdős-Rényi  $G(N, p)$ , a probabilidade de um nó possuir exatamente  $k$  conexões segue rigorosamente uma distribuição binomial. Isso ocorre porque, para um nó específico, existem  $N - 1$  outros nós aos quais ele pode se conectar, cada um com uma probabilidade independente  $p$ .

A probabilidade  $P(k)$  é expressa como:

$$P(k) = \binom{N-1}{k} p^k (1-p)^{N-1-k} \quad (2.1)$$

Para analisarmos redes de grande escala, aplicamos o limite termodinâmico, onde  $N \rightarrow \infty$ . Para manter a rede esparsa e com um grau médio  $\langle k \rangle$  constante, definimos  $\lambda = \langle k \rangle = Np$ . Ao substituir  $p = \frac{\lambda}{N}$  na equação binomial, temos:

$$P(k) = \frac{(N-1)!}{k!(N-1-k)!} \left(\frac{\lambda}{N}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^{N-1-k} \quad (2.2)$$

Ao expandir os termos e aplicar o limite  $N \rightarrow \infty$ : O termo  $\frac{(N-1)!}{(N-1-k)!}$  aproxima-se de  $N^k$ . O termo  $\left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^N$  converge para a definição de exponencial  $e^{-\lambda}$ . O termo  $\left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^{-1-k}$  converge para 1. Resultando na Distribuição de Poisson:

$$P(k) \approx \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \quad (2.3)$$

## 2.5 Coeficiente de Agrupamento e Transição de Mundo Pequeno

O modelo de Watts-Strogatz (WS) é fundamental para entender redes que, embora não sejam livre de escala, possuem propriedades de eficiência superiores aos grafos aleatórios. O foco aqui é o Coeficiente de Agrupamento Local ( $C_i$ ), que mede quão próximos os vizinhos de um nó estão de formar uma clique (um subgrafo completo).

$$C_i = \frac{2e_i}{k_i(k_i - 1)} \quad (2.4)$$

Onde  $e_i$  é o número de conexões reais entre os vizinhos do nó  $i$ , e  $k_i(k_i - 1)/2$  é o número de conexões possíveis.

## 2.6 A Tensão entre $C(p)$ e $L(p)$

A beleza do regime de mundo pequeno reside na coexistência de um alto agrupamento (típico de redes regulares) e um baixo comprimento médio de caminho  $L$  (típico de redes aleatórias).

Para uma probabilidade de religação  $p$  pequena:

Comprimento de Caminho ( $L$ ): Cai drasticamente mesmo para  $p$  muito baixo ( $p \approx 0.01$ ), pois as "pontes" aleatórias (shortcuts) conectam partes distantes da rede de forma exponencialmente eficiente.

Agrupamento ( $C$ ): Permanece alto por muito mais tempo. Matematicamente, para  $p \ll 1$ , o coeficiente de agrupamento médio comporta-se como:

$$C(p) \approx C(0) \cdot (1 - p)^3$$

Enquanto o comprimento do caminho decresce muito mais velozmente.

Esta disparidade cria o regime de Mundo Pequeno: a rede é localmente densa (agrupada) mas globalmente curta. Contudo, como o processo de religação é uniforme, a distribuição de graus  $P(k)$  permanece centrada em  $\langle k \rangle$ , mantendo a rede na categoria de escala definida.

## 2.7 Limitações Físicas e o Truncamento da Lei de Potência

Muitas redes que parecem "livre de escala" à primeira vista são, na verdade, redes de escala definida devido a custos de fiação ou limites de capacidade. Academicamente, chamamos isso de redes com **Truncamento Exponencial**.

Se uma rede segue uma lei de potência  $P(k) \sim k^{-\gamma}$ , mas possui um limite físico  $k_c$ , sua distribuição real é:

$$P(k) \sim k^{-\gamma} e^{-k/k_c} \tag{2.5}$$

Neste cenário, para  $k \ll k_c$ , a rede parece livre de escala. Para  $k \gg k_c$ , a probabilidade cai exponencialmente. Isso é comum em:

- Redes de Aeroportos: O espaço físico das pistas e terminais limita o número de voos (hubs finitos).
- Redes Sociais Físicas: O "Número de Dunbar" sugere um limite cognitivo para o número de conexões humanas estáveis.

Esses modelos demonstram que a complexidade não exige necessariamente a heterogeneidade extrema das leis de potência. Redes de escala definida são os pilares de sistemas que priorizam a previsibilidade e a estabilidade local sobre a centralização massiva.

### 3 Metodologia

Na teoria de redes complexas o grau  $k$  de um vértice é dado pelo número de ligações que ele possui e a distribuição de grau define a probabilidade de um vértice ter o grau  $k$ . Por exemplo, para as redes livre de escala essa distribuição apresenta uma lei de potência. Porém, em geral as redes reais apresentam alguns desvios dessa lei de potência. Neste trabalho iremos considerar esse problema e iremos estudar as redes geradas a partir de uma distribuição de grau de tipo lei de potência com corte e de uma distribuição normal logarítmica [18]. Vale a pena dizer que para uma certa escolha dos parâmetros é possível obter a distribuição de grau de tipo lei de potência ou exponencial.

Para as redes consideradas a probabilidade de ter o grau de um vértice igual á  $k$  é dada por

$$p_k = C \frac{e^{-ibk}}{k^a} \quad (3.1)$$

(potência de corte)

$$p_k = C \frac{e^{-\frac{(\log k - a)^2}{2b^2}}}{k} \quad (3.2)$$

(normal logarítmica)

onde  $C$  é uma constante de normalização e os parâmetros de *fitting*  $a$  e  $b$  darão a forma da distribuição de grau. Neste trabalho iremos considerar que o grau mínimo permitido é 2, dessa maneira a construção da rede nunca irá parar por falta de vértices livres. Por exemplo para  $b = 0$  (para lei de potência com corte) encontramos a distribuição de grau das redes livre de escala [19].

A construção das redes consideradas começa por fixar os valores dos parâmetros  $a$  e  $b$  e em seguida calcular todas as probabilidades  $p_k$ , que serão mantidos até o final da construção. Em seguida iremos criar o primeiro vértice e escolher aleatoriamente o número de ligações  $k_1$  das equações de cima. No próximo passo iremos escolher o vértice entre aqueles que ainda não receberam o grau e escolher o grau (ou número de ligações) dele,  $k_2$ , da mesma distribuição escolhida no passo anterior. Em seguida serão adicionados  $k_{2-1}$  novos vértices.

A construção é iterada até encontrar o número desejado de vértices,  $N$ . Neste ponto teremos construído a rede complexa com a escolha de parâmetros desejados e podemos estudar as grandezas estatísticas, em função desses parâmetros. Qualquer rede pode ser representada pela matriz de conectividade ou em alguns modelos pela matriz de adjacência. Os elementos da matriz de conectividade  $A(i, j)$ , onde os índices  $i$  e  $j$  representam o número dos vértices, são iguais a -1 se existe uma ligação direta entre os vértices  $i$  e  $j$  é 0 se não existe essa ligação. Os elementos  $A(i, i)$  são iguais ao número total de ligações que sai do vértice  $i$ .

Várias grandezas estatísticas relacionadas com a teoria das redes complexas podem ser calculadas a partir dos elementos da matriz de conectividade [1, 2]. Abaixo citaremos algumas dessas grandezas [2]:

- a) O *diâmetro*  $D$ , que representa o valor máximo entre todas as distâncias mais curtas de qualquer par de vértices. Na prática o diâmetro irá representar a maior distância da rede que um passageiro pode escolher, usando a menor trajetória entre duas paradas.
- b) A *distribuição de grau*  $P(k)$ , que representa a fração dos vértices com grau (ou número de ligações) igual a  $k$ .
- c) O *coeficiente de agrupamento*  $C$ , que representa o grau de ligações entre os vizinhos do mesmo vértice.
- d) O *coeficiente de Pearson*  $CP$ , que mede a correlação entre vértices.

Posteriormente, são calculadas métricas relevantes, como distribuição de grau, diâmetro da rede e outras propriedades topológicas, fundamentais para a caracterização das redes geradas. Com base nesses resultados, é conduzida uma análise estatística detalhada, visando avaliar o comportamento das distribuições e verificar sua adequação a diferentes modelos probabilísticos. O fluxograma apresentado na a seguir ilustra de forma resumida as etapas que compõem a metodologia empregada neste estudo.

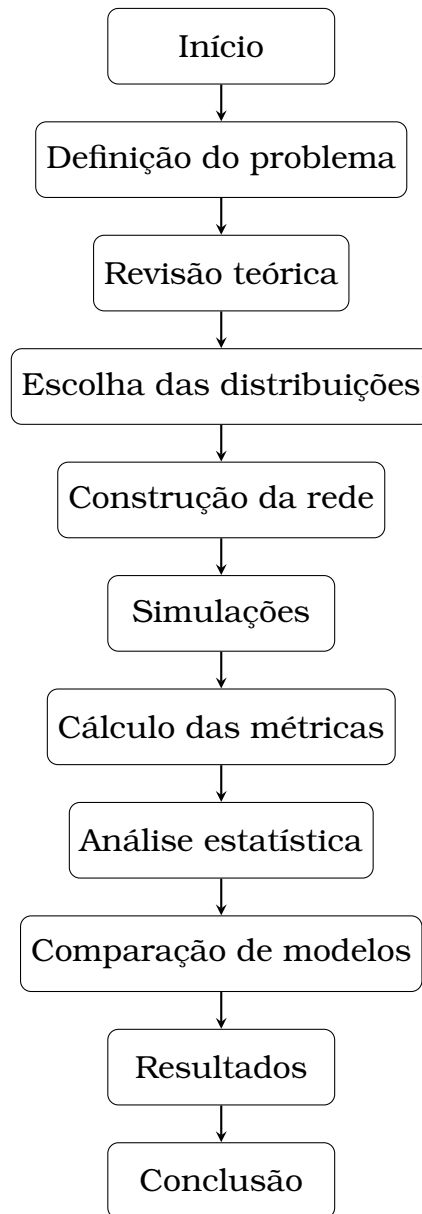


Figura 5 – Fluxograma da metodologia do trabalho

Conforme ilustrado no fluxograma, o processo metodológico apresenta caráter iterativo, especialmente na etapa de análise estatística. Caso os resultados obtidos não apresentem um ajuste satisfatório aos modelos considerados, é realizado um refinamento dos parâmetros e uma nova geração das redes, permitindo a reavaliação das propriedades estruturais.

## 4 Resultados

Primeiramente antes de observar o estudo dos gráficos falaremos um pouco sobre a distribuição grau generalizada utilizada neste projeto. Na Probabilidade e Estatística a distribuição grau  $P(k)$  é uma família de distribuições de probabilidade contínuas parametrizados por dois parâmetros positivos, denotados por  $a$  e  $b$  que aparecem como expoentes da variável e controlam o formato da distribuição.

A construção da rede considerada parte de um programa feito em Fortran que começa por criar o primeiro vértice e escolher aleatoriamente o número de ligações (o grau)  $k$  deste vértice com o uso da equação (3.2). No próximo passo iremos escolher o vértice entre aqueles que ainda não receberam o grau e escolher o grau (ou número de ligações). A construção é iterada até encontrar o número desejado de vértices,  $N$ . Neste ponto teremos então construído a rede complexa com a escolha de parâmetros desejados e podemos estudar as grandezas estatísticas desta rede em função desses parâmetros. É necessário saber que a rede é de tipo árvore sendo assim é zero o *coeficiente de agrupamento*, ou seja, não existe caminho fechado e não corre o risco de formar um anel.

A construção da rede feita pelo programa em Fortran se dá através da construção de uma matriz conhecida como Laplaciano ou matriz de conectividade que por sua vez guarda todas as informações da rede e através dos seus autovalores é possível o cálculo de outras características da rede. O programa é rodado mais de uma vez para se poder tirar uma média de todas as informações. Neste relatório mostramos a distribuição de grau  $k$  no eixo x para várias escolhas dos parâmetros. Na figura 1 mostramos a distribuição de grau distribuídas a partir da equação (3.1).

Considerando o caso em  $a = 10$  e  $b = 0.1$ , onde encontra-se apenas um ponto no gráfico a distribuição de grau das redes não livre de escala dada pela lei logarítmica da equação (3.2) sendo y denominado de expoente de livre escala. Sendo , ocasionou em apenas 1 ponto por conta que o grau de distribuição

relativamente pouco. Note que tem a possibilidade maior distribuição para certa quantidade probabilística havendo assim ramificações.

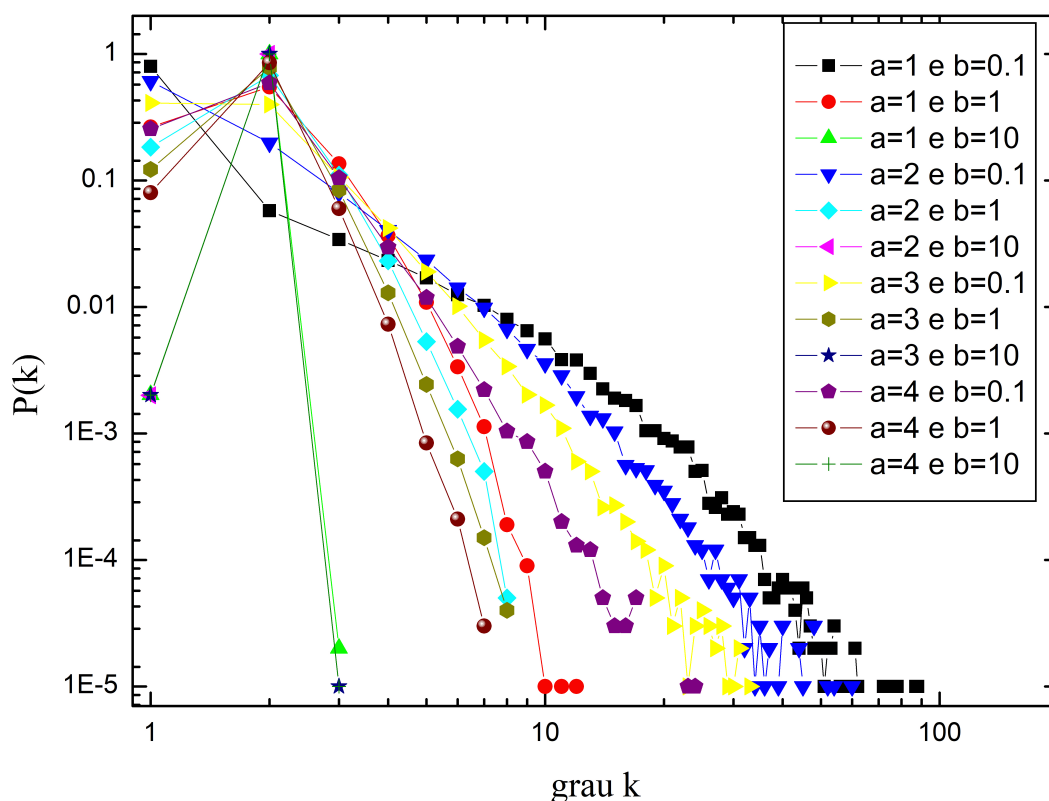


Figura 6 – A probabilidade de  $P(k)$  de se obter o grau  $k$  para  $N = 1000$ , usando a equação (3.1).

Na primeira figura usando a lei de potência com corte escolhemos  $N = 1000$  ao fixar  $a$ , variando o expoente  $b$ . De novo o coeficiente  $C$  da Equação (3.2) é igual à soma de todas as probabilidades permitidas. Observamos que aumentando o valor do coeficiente  $b$  encontramos probabilidades menores de obter vértices com grau alto. Segue o resultado na figura para todas as combinações com  $a, b \in \{0.1, 1, 10\}$ .

Neste segundo gráfico escolhemos  $N = 1000$  e fixamos  $a$ , mas variamos o expoente  $b$ . O coeficiente  $C$  da Equação (3.2) é igual à soma de todas as probabilidades de 1 a 1000. Os resultados estão plotados em escala logarítmica e notamos que a probabilidade de se obter o grau máximo, 1000, quando  $a = 10$  é muito baixa, porém é máxima para grau  $k = 1000$  por isso o grau mais provável é 10. Para  $a > 0.1$  teremos muito prováveis redes com grau mínimo permitido.

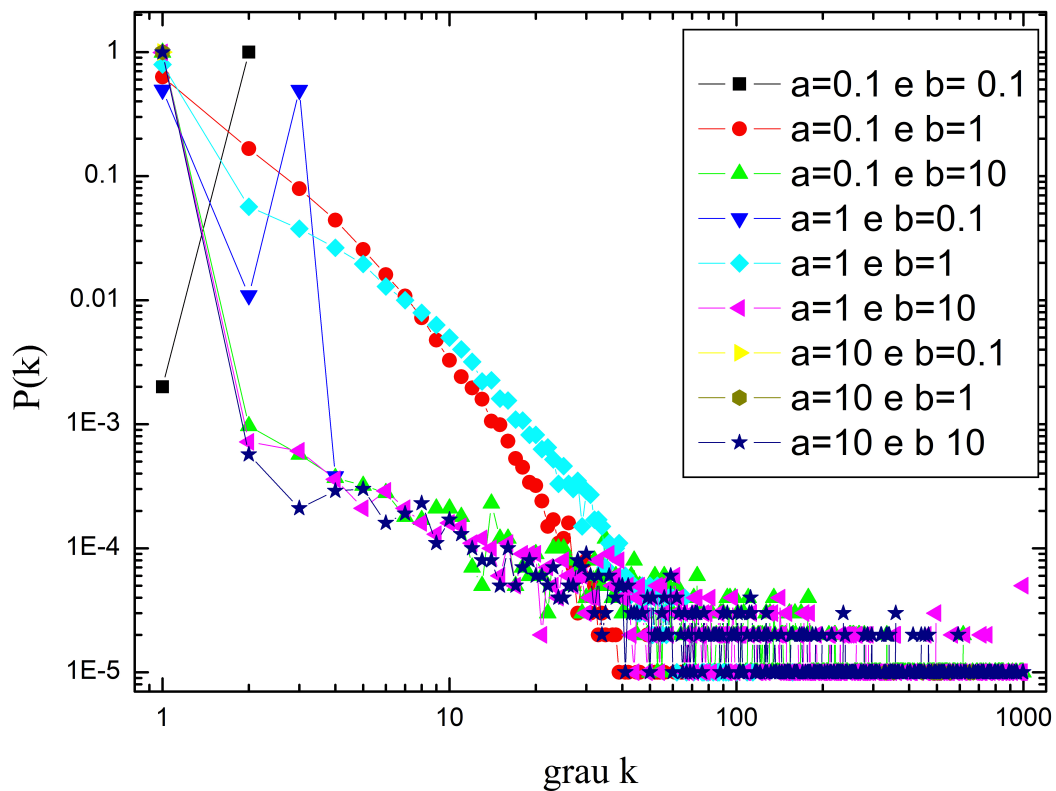


Figura 7 – A probabilidade de  $P(k)$  de se obter o grau  $k$  para  $N = 1000$ . As redes foram construídas a partir da equação (3.2).

Para valores baixos de  $a$  observamos que todas as probabilidades têm valores próximos, sugerindo a criação de redes com vértices de grau alto.

$a$	$b$	$D$	$C_p$
1	0.1	19.370	-0.3578234624
1	1	51.890	-0.1354119554
1	10	993.990	-0.0009819639
2	0.1	26.920	-0.2413475201
2	1	66.260	-0.0818831449
2	10	999.000	-0.0010020040
3	0.1	37.310	-0.1545205777
3	1	88.130	-0.0641747013
3	10	995.810	-0.0009919840
4	0.1	52.700	-0.1060872645
4	1	121.360	-0.0410762917
4	10	997.810	-0.0009919840

Tabela 1 – Dados gerados pela equação (3.1) lei de potência de corte.

$a$	$b$	$D$	$C_P$
0.1	0.1	999.00	-0.0010020040
0.1	1	26.11	-0.2412725242
0.1	10	6.07	-0.6880101533
1	0.1	34.29	-0.3299398777
1	1	19.87	-0.3139405763
1	10	5.55	-0.7247571264
10	0.1	1.00	-1.0000000000
10	1	1.14	-0.9970039245
10	10	5.54	-0.7252293028

Tabela 2 – Dados gerados pela equação (3.2) normalmente logarítmica.

## 5 Conclusões

O presente Trabalho de Conclusão de Curso teve como objetivo investigar, sob uma perspectiva estatística e estrutural, as propriedades de redes complexas que não apresentam comportamento livre de escala. A partir da metodologia desenvolvida, foi possível calcular grandezas estatísticas relevantes e analisar o comportamento da distribuição de grau, evidenciando que variações nos parâmetros do modelo impactam diretamente a organização topológica da rede, conforme discutido na literatura clássica de redes complexas [2, 3].

Os resultados indicaram que as redes analisadas não apresentam ajuste consistente ao modelo de lei de potência em intervalos significativos, quando avaliadas por métodos rigorosos como a estimação por máxima verossimilhança e testes de aderência, como o de Kolmogorov–Smirnov. A comparação entre modelos probabilísticos, por meio de critérios como AIC e BIC, mostrou melhor adequação de distribuições alternativas, como exponenciais, log-normais ou com corte exponencial. Esses achados reforçam que a identificação de comportamento do tipo *power-law* não deve ser feita apenas de forma visual, corroborando estudos recentes que indicam que redes livre de escala são menos comuns do que frequentemente assumido [18].

Do ponto de vista estrutural, observou-se que o diâmetro da rede varia no intervalo [1.00, 999.00], refletindo diferentes regimes topológicos. Para diâmetro igual a 1, a rede assume configuração semelhante a uma estrela, com alta centralização, enquanto valores elevados indicam estruturas mais lineares e pouco conectadas. Esses resultados estão em consonância com estudos sobre propriedades estruturais de redes reais, como a World Wide Web e redes de colaboração científica [4, 6]. Além disso, para valores intermediários, emergem redes com padrões de conectividade mais complexos e não associativos.

A análise também evidenciou que redes não-livres de escala podem apresentar diferentes níveis de heterogeneidade estrutural, influenciando propriedades como robustez, centralização e dinâmica de propagação. Tais ca-

racterísticas são fundamentais para a compreensão de processos reais, como disseminação de doenças, transporte e fluxos em redes biológicas e tecnológicas [7, 9, 10].

Metodologicamente, o trabalho contribui ao sistematizar uma abordagem robusta para análise de redes complexas, integrando técnicas de inferência estatística, testes de aderência e comparação de modelos. Essa abordagem fortalece a confiabilidade dos resultados e amplia a compreensão sobre a diversidade estrutural dos sistemas complexos, em linha com abordagens teóricas consolidadas [1, 20].

Entretanto, o estudo apresenta limitações, uma vez que a análise foi restrita a redes estáticas e não ponderadas, não contemplando aspectos temporais ou dinâmicos. Nesse sentido, a generalização dos resultados deve ser realizada com cautela.

Como perspectivas futuras, sugere-se a ampliação da investigação para redes dinâmicas, ponderadas e multilayer, bem como o estudo de mecanismos gerativos alternativos. Trabalhos recentes destacam a importância dessas extensões para melhor representar sistemas reais complexos [15, 17, 14]. Além disso, recomenda-se explorar com maior profundidade os impactos dessas estruturas em processos dinâmicos, como difusão, sincronização e resiliência.

Por fim, conclui-se que este trabalho consolida e aprofunda a investigação iniciada anteriormente, demonstrando que redes não-livres de escala constituem uma classe relevante e ainda pouco explorada. Os resultados obtidos contribuem tanto para o avanço teórico quanto para aplicações práticas, abrindo novas possibilidades de estudo no campo das redes complexas.

## Referências

- 1 MENDES, J.; DOROGOVITSEV, S. *Evolution of networks Oxford University Press*. [S.l.]: Oxford, 2003. 12, 15, 28, 35
- 2 NEWMAN, M. E. *Networks: an introduction*. [S.l.]: Oxford university press, 2010. 12, 15, 16, 28, 34
- 3 ESTRADA, E. Introduction to complex networks: structure and dynamics. In: *Evolutionary equations with applications in natural sciences*. [S.l.]: Springer, 2014. p. 93–131. 12, 15, 34
- 4 ALBERT, R.; JEONG, H.; BARABÁSI, A.-L. Diameter of the world-wide web. *nature*, Nature Publishing Group UK London, v. 401, n. 6749, p. 130–131, 1999. 12, 16, 34
- 5 HUBERMAN, B. A.; ADAMIC, L. A. Growth dynamics of the world-wide web. *Nature*, Nature Publishing Group UK London, v. 401, n. 6749, p. 131–131, 1999. 12, 16
- 6 NEWMAN, M. E. Scientific collaboration networks. i. network construction and fundamental results. *Physical review E*, APS, v. 64, n. 1, p. 016131, 2001. 12, 16, 34
- 7 JEONG, H. et al. The large-scale organization of metabolic networks. *Nature*, Nature Publishing Group UK London, v. 407, n. 6804, p. 651–654, 2000. 12, 15, 17, 35
- 8 BELLINGERI, M.; BODINI, A. Food web's backbones and energy delivery in ecosystems. *Oikos*, Wiley Online Library, v. 125, n. 4, p. 586–594, 2016. 12, 17
- 9 BONA, A. D. et al. Analysis of public bus transportation of a brazilian city based on the theory of complex networks using the p-space. *Mathematical Problems in Engineering*, Wiley Online Library, v. 2016, n. 1, p. 3898762, 2016. 12, 17, 35
- 10 BERCHE, B. et al. Transportation network stability: a case study of city transit. *Advances in Complex Systems*, World Scientific, v. 15, n. supp01, p. 1250063, 2012. 12, 17, 35
- 11 ERDŐS, P.; RÉNYI, A. On the evolution of random graphs. *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei, Akadémiai Kiadó*, v. 5, n. 1-2, p. 17–61, 1959. 12, 16
- 12 WATTS, D. J.; STROGATZ, S. H. Collective dynamics of 'small-world' networks. *nature*, Nature Publishing Group, v. 393, n. 6684, p. 440–442, 1998. 12, 16, 22
- 13 BARABÁSI, A.-L.; ALBERT, R. Emergence of scaling in random networks. *science*, American Association for the Advancement of Science, v. 286, n. 5439, p. 509–512, 1999. 12, 15, 16

- 14 COZZO, E. et al. *Multiplex networks: basic formalism and structural properties*. [S.l.]: Springer, 2018. v. 2. 12, 17, 35
- 15 KIVELÄ, M. et al. Multilayer networks. *Journal of complex networks*, Oxford University Press, v. 2, n. 3, p. 203–271, 2014. 12, 17, 35
- 16 JURJIU, A.; GALICEANU, M. Dynamics of a polymer network modeled by a fractal cactus. *Polymers*, MDPI, v. 10, n. 7, p. 787, 2018. 12, 17
- 17 HOLME, P.; SARAMÄKI, J. Temporal networks. *Physics reports*, Elsevier, v. 519, n. 3, p. 97–125, 2012. 12, 17, 35
- 18 BROIDO, A. D.; CLAUSET, A. Scale-free networks are rare. *Nature communications*, Nature Publishing Group UK London, v. 10, n. 1, p. 1017, 2019. 12, 13, 15, 18, 19, 21, 27, 34
- 19 JURJIU, A.; JÚNIOR, D. G. M.; GALICEANU, M. Relaxation dynamics of generalized scale-free polymer networks. *Scientific reports*, Nature Publishing Group, v. 8, n. 1, p. 1–15, 2018. 12, 13, 17, 27
- 20 HARARY, F. *Graph theory (on Demand Printing of 02787)*. [S.l.]: CRC Press, 2018. 13, 14, 16, 21, 35